

基于Kramers逃逸速率的Duffing振子广义调参随机共振研究*

冷永刚¹⁾²⁾ 赖志慧^{1)†}

1) (天津大学机械工程学院, 天津 300072)

2) (天津大学机构理论与装备设计教育部重点实验室, 天津 300072)

(2013年9月9日收到; 2013年10月9日收到修改稿)

以二维 Duffing 振子的随机共振为研究对象, 提出 Duffing 振子的广义调参随机共振. 以 Kramers 逃逸速率为基础, 建立了 Duffing 振子随机共振的判别函数, 阐述了 Duffing 振子在不同噪声强度及信号频率输入条件下的广义调参随机共振规律, 并给出了 Duffing 振子广义调参随机共振的一般方法.

关键词: Duffing 振子, 随机共振, Kramers 逃逸速率, 广义参数调节

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.63.020502

1 引言

1981年, Benzi 等^[1-3]在研究古气候冰川问题时首次提出“随机共振”的概念, 用以解释过去70万年地球的冰川期和暖气候期交替出现的现象. 随后, 随机共振现象在实验中得到验证^[4,5], 这一有趣的非线性现象开始得到越来越广泛的关注^[6].

随机共振是指原本微弱的信号在噪声和非线性系统的帮助下能量得到增强. 此时, 噪声所起的已经不是人们印象中的消极作用, 而是积极作用, 随机共振发生时, 一部分噪声能量转移到信号身上, 使原本微弱的信号大大增强. 由于信号的输出, 信噪比随噪声的增大呈现先增后减的趋势, 并在某一噪声强度值时出现峰值, 产生类似力学中人们熟知的共振输出现象, 故称为随机共振. 正是由于随机共振能够提高含噪微弱信号的输出信噪比, 人们将随机共振引入微弱信号检测领域, 并取得了丰富的研究成果^[7-9].

二维 Duffing 振子是一类能够产生随机共振的非线性系统. Duffing 振子的随机共振研究始于1989年^[10,11], 随后, 文献^[12, 13]对 Duffing 振子随

机共振的输出特性进行了理论推导和仿真, 文献^[14]通过电路实验验证了 Duffing 振子的随机共振, 文献^[15, 16]则建立了二维 Duffing 振子的微弱信号检测模型, 实现基于二维 Duffing 振子的微弱信号检测.

随机共振实际上是信号、噪声和非线性系统三者之间的最优匹配关系. 然而实际工程应用中, 信号和噪声情况往往未知, 它们与系统三者之间也并不总是最优匹配关系, 此时若想通过随机共振实现微弱信号检测, 就需要改变信号、噪声或非线性系统三者中的某一个、两个或全部特性, 由于待测信号给定, 最好的方法就是调节系统的参数, 使信号、噪声和非线性系统重新实现最优匹配. 在此前的调参共振研究中, 成果大多集中于系统参数的调节^[17]和信号尺度的调节^[18]及二者的关联性^[19], 主要涵盖传统的一维双稳随机共振模型. 而二维 Duffing 振子模型中还包含可调的阻尼比参数, 但已有的调参共振研究成果较少. 此前的研究中, 文献^[20, 21]研究了阻尼比参数的变化对 Duffing 振子随机共振的影响, 文献^[15]则提出 Duffing 振子的变尺度随机共振, 实现大频率信号的随机共振,

* 国家自然科学基金(批准号: 51275336)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20120032110001)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: laizh@tju.edu.cn

这些研究为 Duffing 振子的调参随机共振奠定了一定基础.

Duffing 振子的调参随机共振研究, 目前还存在诸如参数的调节机理不清楚、参数之间关联性不明晰等问题. 本文在前期研究基础上, 建立了 Duffing 振子的广义调参随机共振模型, 以 Kramers 逃逸速率为分析手段, 深入研究了各相关参数的变化对系统随机共振的影响, 探究 Duffing 振子的广义调参随机共振机理和规律, 揭示 Duffing 振子广义调参随机共振的一般方法.

2 Duffing 振子随机共振机理

二维 Duffing 振子的随机共振模型可以写成如下形式:

$$\ddot{x} + k\dot{x} - ax + bx^3 = A \cos(2\pi f_0 t) + \sqrt{2D}\xi(t), \quad (1)$$

其中, k 是阻尼比; $-ax + bx^3$ 是势场作用力, 对应势函数 $U(x) = -ax^2/2 + bx^4/4$, $a > 0$, $b > 0$ 称为系统参数; $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ 表示幅值为 A , 频率为 f_0 , 初相位为 0 的周期驱动力; $n(t) = \sqrt{2D}\xi(t)$ 表示强度为 D 的噪声信号, 其中 $\xi(t)$ 是均值为 0, 方差为 1 的高斯白噪声. 这样, 方程 (1) 可以理解成布朗粒子在诸如液体等介质的势场 $U(x)$ 中的运动, 如图 1 所示. 粒子同时受到阻尼力 $-k\dot{x}$, 势场作用力 $-dU(x)/dx$, 周期驱动力 $s(t)$ 和随机噪声 $n(t)$ 的共同作用, 系统输出 x 即是布朗粒子的位移函数 $x(t)$.

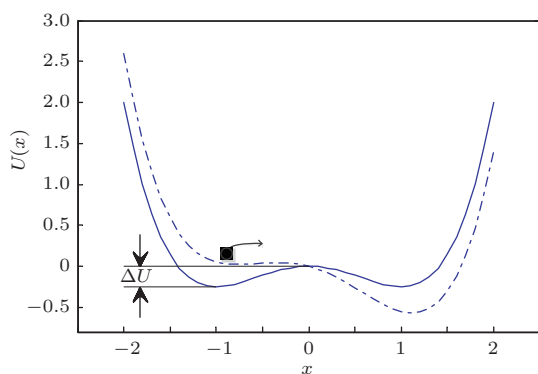


图 1 Duffing 系统的双稳势函数 (实线) 及周期力调制的势函数 (虚线)

从图 1 可以看出, 当输入信号不存在, 即 $s(t) = n(t) = 0$ 时, 系统势函数为一典型的双稳势场结构, 系统存在两个稳定平衡点 ($x_{m1,m2} = \pm\sqrt{a/b}$) 和一个不稳定平衡点 ($x_b = 0$), 中间势垒高度

$\Delta U = a^2/(4b)$. 而当周期信号 $s(t)$ 存在时, 系统势函数受到特征信号周期性的调制, 由 $U(x)$ 变为 $V(x)$:

$$V(x) = U(x) - xA \cos(2\pi f_0 t) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 - xA \cos(2\pi f_0 t), \quad (2)$$

这样, 系统势函数就被周期性地抬高或加深, 如图 1. 此时, 系统存在一临界幅值 $A_C = \sqrt{4a^3/(27b)}$ ^[19], 当周期信号幅值 $A < A_C$ 时, 布朗粒子只能在单阱中做小幅振荡; 而当周期信号幅值 $A > A_C$ 时, 布朗粒子能够越过势垒进行大范围的跃迁运动.

有意思的是, 当噪声 $n(t)$ 存在且系统各参数合适的条件下, 即使周期信号幅值 $A < A_C$, 布朗粒子也能在噪声的帮助下实现跃迁, 系统发生随机共振, 实现大范围输出. 随机共振发生则意味着信号、噪声和系统三者之间达到最优匹配. 由噪声引起的布朗粒子在势阱间跃迁的速率可由著名的 Kramers 逃逸速率给出^[6]

$$r_K = \frac{\omega_m \omega_b}{2\pi k} \exp\left(-\frac{\Delta U}{D}\right), \quad (3)$$

其中 $\omega_m = \sqrt{U''(x_m)}$, $\omega_b = \sqrt{U''(x_b)}$ 分别表示布朗粒子在稳定平衡点 x_m 和不稳定平衡点 x_b 处的振动角频率. 由此得到 Duffing 方程 (1) 的 Kramers 逃逸速率

$$r_K = \frac{a}{\sqrt{2\pi k}} \exp\left(-\frac{a^2}{4bD}\right). \quad (4)$$

当布朗粒子在某一势阱中的平均驻留时间 $T_K = 1/r_K$ 与势函数的周期性变化时间 (周期信号的半周期 $T/2$) 相等, 即满足

$$T_K = T/2, \quad (5)$$

或其等价形式

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi k}} \exp\left(-\frac{a^2}{4bD}\right) = 2f_0 \quad (6)$$

时, Duffing 方程 (1) 将发生随机共振^[6], 此时系统输出信号的频率特征与信号频率特征相一致, 且幅值大大增强. 这就是 Duffing 振子的随机共振机理.

下面给出一组典型参数, 说明 Duffing 振子产生的随机共振现象. 在方程 (1) 中, 给定参数条件

$$k = 0.5, \quad a = b = 1, \quad A = 0.1, \\ f_0 = 0.01 \text{ Hz}, \quad D = 0.29, \quad (7)$$

采用 4 阶 Runge-Kutta 算法对非线性微分方程进行数值求解, 取采样频率 $f_s = 5 \text{ Hz}$ (相应的计算步长 $h = 1/f_s = 0.2 \text{ s}$), 计算点数 $N = 20000$, 输出谱平

均十次(以下计算同), 并令 $sn(t) = s(t) + n(t)$ 表示输入信号, 得到方程(1)的输入和输出信号的波形及其频谱, 如图2. 从图2中可以看出, Duffing 方程在该参数条件下实现随机共振, 表现为输出频

谱的频率 $f = f_0$ 处谱峰值达到最大, 且比输入频谱 $f = f_0$ 处谱峰值大得多. 本文将输出频谱频率 $f = f_0$ 处的谱峰值记为 Am , 将其作为判断随机共振发生的依据, 即 Am 最大时, 随机共振发生.

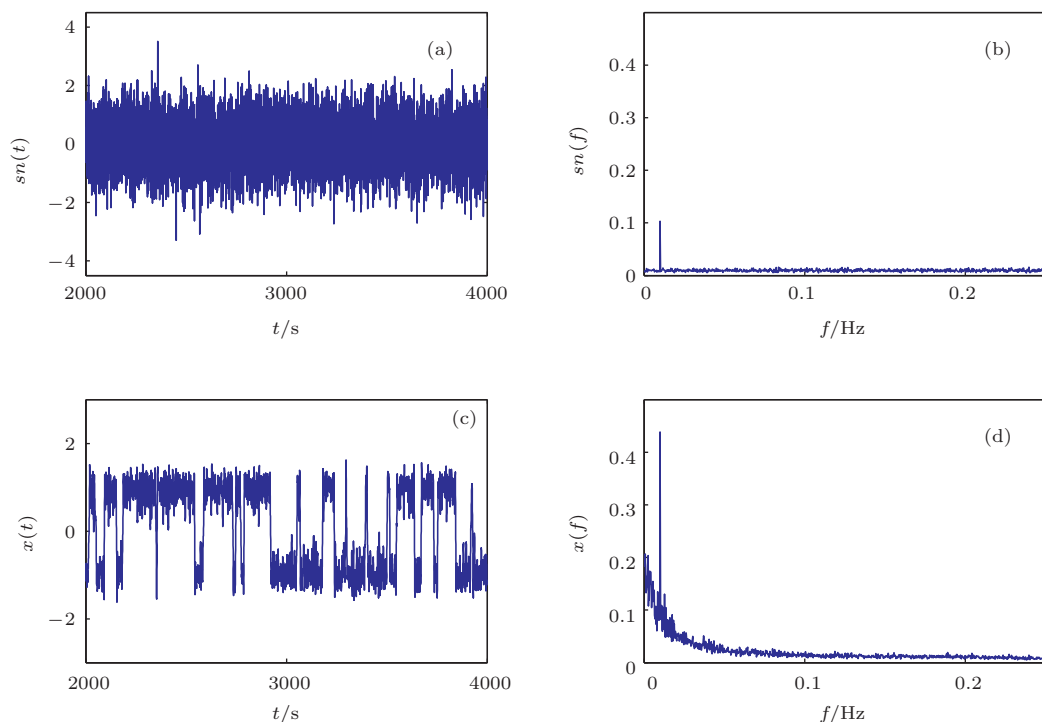


图2 Duffing 振子的随机共振 (a) 输入信号波形; (b) 输入信号频谱; (c) 输出信号波形; (d) 输出信号频谱

3 Duffing 振子的广义调参随机共振研究

3.1 Duffing 振子的广义调参随机共振

Duffing 振子发生随机共振时, 高频噪声能量向低频信号转移, 使输出信号的强度大大增强, 从而将信号凸显出来. 因此, Duffing 振子常作为一种微弱信号检测模型, 用于实现强背景噪声下微弱信号的特征提取. 但是, 随机共振的产生, 需要信号、噪声和系统三者实现最优匹配, 在对实际工程信号的检测中, 这往往很难满足. 于是人们提出 Duffing 振子的调参随机共振, 进一步扩展其应用.

研究 Duffing 振子的调参随机共振具有两个重要意义: 其一, 基于绝热近似理论的随机共振仅适用于小参数条件(同时要求 $A \ll 1$, $D \ll 1$ 和 $f_0 \ll 1$), 小参数限制条件十分苛刻^[22], 而实际工程参数往往不满足小参数条件, 此时可以通过调参随机共振实现大参数信号的检测; 其二, 信号、噪声和系统三者非最优匹配时, 可通过调整一个或多个参数, 使三者参数匹配, 实现随机共振. 因此, 进一

步研究 Duffing 振子的调参随机共振机理就显得尤为重要.

为了利用 Duffing 振子的随机共振模型对实际工程信号进行检测, 人们通常会先对待测信号进行线性幅值变换和时间/频率尺度变换, 这样, Duffing 方程(1)可改写为

$$\begin{aligned} & \ddot{x} + k\dot{x} - ax + bx^3 \\ &= \varepsilon \left[A \cos \left(2\pi \frac{f_0}{R} t' \right) + \sqrt{2D} \xi(t') \right] \\ &= \varepsilon A \cos \left(2\pi \frac{f_0}{R} t' \right) + \sqrt{2\varepsilon^2 D} \xi(t'), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 ε 是幅值变换系数, 用于实现待测信号的线性放大或缩小; R 是变尺度系数, 用于实现待测信号的时间/频率尺度变换; $t' = Rt$, 是变换后的时间尺度; $x = x(t')$ 是时间尺度 t' 下的系统输出. 因此, 对待测信号进行线性幅值变换或尺度变换也可以理解为一种广义调参手段. 这样, 对 Duffing 方程(8)的各参数进行调节使系统实现随机共振, 我们就称为 Duffing 振子的广义调参随机共振. 这些参数包括: 阻尼比参数 k ; 系统参数 a, b ; 信号参数 A, f_0 ,

D ; 其他参数如幅值变换系数 ε , 变尺度系数 R .

3.2 基于 Kramers 逃逸速率的参数分析

本文以 Kramers 逃逸速率为工具, 对 Duffing 振子的广义调参随机共振机理进行研究. 由 Duffing 方程 (1) 的随机共振实现条件 (6) 式, 可以得到 Duffing 方程 (8) 的随机共振实现条件

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi k}} \exp\left(-\frac{a^2}{4b\varepsilon^2 D}\right) = 2f_0/R. \quad (9)$$

首先, 我们利用 (9) 式对 Duffing 方程 (8) 的各参数进行整体分析. 定义函数

$$F(k, a, b, A, f_0, D, \varepsilon, R) = \frac{aR}{2\sqrt{2\pi k}f_0} \exp\left(-\frac{a^2}{4b\varepsilon^2 D}\right), \quad (10)$$

显然, 当 $F = 1$ 时, 随机共振发生. 因此称函数 (10) 为随机共振的判别函数. 由函数 (10) 可得以下规律:

- 1) 函数 F 的取值与参数 A 无关;
- 2) 函数 F 是参数 b, D, ε, R 的单调递增函数;
- 3) 函数 F 是参数 k, f_0 的单调递减函数;
- 4) 当 $a < \varepsilon\sqrt{2bD}$, F 随参数 a 单调递增; 当 $a > \varepsilon\sqrt{2bD}$, F 随参数 a 单调递减.

其中前三点显然可知, 现在仅对第 4) 点进行简单推导. 函数 (10) 对参数 a 进行求导得

$$\begin{aligned} \frac{dF}{da} &= \frac{R}{2\sqrt{2\pi k}f_0} \exp\left(-\frac{a^2}{4b\varepsilon^2 D}\right) + \frac{aR}{2\sqrt{2\pi k}f_0} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{a^2}{4b\varepsilon^2 D}\right) \cdot \left(-\frac{2a}{4b\varepsilon^2 D}\right) \\ &= \frac{R}{2\sqrt{2\pi k}f_0} \exp\left(-\frac{a^2}{4b\varepsilon^2 D}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{4b\varepsilon^2 D - 2a^2}{4b\varepsilon^2 D}\right), \end{aligned} \quad (11)$$

$dF/da > 0$ 即 $a < \varepsilon\sqrt{2bD}$ 时, F 随参数 a 单调递增; $dF/da < 0$ 即 $a > \varepsilon\sqrt{2bD}$ 时, F 随参数 a 单调递减. 得证.

根据判别函数 (10) 所得的 4 条参数规律, 可以进一步深入研究 Duffing 振子的广义调参随机共振机理, 这也是本文研究的基本依据. 其中, 对于给定的待测信号, f_0 和 D 是信号参数不可调, 而 k, a, b, ε, R 则是主要的调节参数. 本文接下来将以参数 (7) 为基准参数, 进一步研究这 5 个可调参数对不同频率及噪声强度待测信号的调参随机共振机理.

需要说明的是, 函数 (10) 只是对 Duffing 振子调参随机共振机理的定性研究, 它可以解释各参数

对随机共振的影响及各参数之间的规律, 但不能仅通过 $F = 1$ 决定随机共振是否发生, 还需结合其他因素进行考虑, 分析如下.

3.3 噪声强度的变化对随机共振的影响及调参研究

随机共振的发生对噪声强度是存在一定要求的, 当噪声强度太小时, 布朗粒子不能积累足够的能量实现跃迁, 即发生“欠共振”; 而当噪声强度太大时, 由于超过系统产生随机共振的噪声强度, 过多剩余的噪声只能作为残余噪声存在, 并淹没系统输出的特征信号, 即发生“过共振”. 因此, 一定参数条件下 Duffing 振子的随机共振存在一最优噪声强度值, 而待测微弱信号中的噪声强度往往很难满足, 这一方面是由于微弱信号的背景噪声太强, 另一方面是由于噪声强度不能与其他参数匹配. 本节将研究如何通过调参方法实现不同噪声强度信号的随机共振.

3.3.1 调节阻尼比参数 k

由 3.2 的规律 2) 和 3) 可知, 为保证判别函数 $F = 1$, 在其他参数条件保持不变的情况下, 阻尼比参数 k 和噪声强度 D 呈正相关, 即大噪声强度的信号, 需要匹配大的阻尼比参数 k , 反之亦然. 当噪声强度 D 取不同值时, 判别函数 (10) 中 $0 < \exp(-a^2/4b\varepsilon^2 D) < 1$, 因此理论上总有合适的阻尼比参数 k 使得 $F = 1$ 成立, 这说明阻尼比参数调节随机共振对任意噪声强度值信号都是可行的.

以参数条件 (7) 为基准进行研究. 在 Duffing 系统 (8) 中, 令 $\varepsilon = R = 1$, 其他参数按条件 (7) 给定, 我们保证其他参数条件不变, 取三个不同的阻尼比参数 k 分别等于 0.5, 1.5 和 2.5, 同时, 将噪声强度 D 在 $[0, 5]$ 区间进行取值, 对方程 (8) 进行数值求解, 得到不同阻尼比参数条件下输出频谱频率 $f = f_0$ 处的谱峰值 A_m 随噪声强度 D 的变化规律, 如图 3.

图 3 中各曲线的最大值所对应的噪声强度值 D , 就表示该组参数条件下 Duffing 系统 (8) 发生随机共振的最优噪声强度值. 可以看出, 随着阻尼比 k 的增大, Duffing 系统发生随机共振的最优噪声强度值也增大; 换言之, 随着系统输入信号噪声强度增大, 与之匹配的阻尼比 k 的取值也随着增大. 因此, 可以通过调节阻尼比参数 k 的取值, 实现不同噪声强度信号的随机共振. 具体方法为: 根据系统输出波形和频谱图, 判断系统输出为欠共振 (噪声

太小)或过共振(噪声太大)状态,若为欠共振,则减小 k 的取值,反之增大 k 的取值.

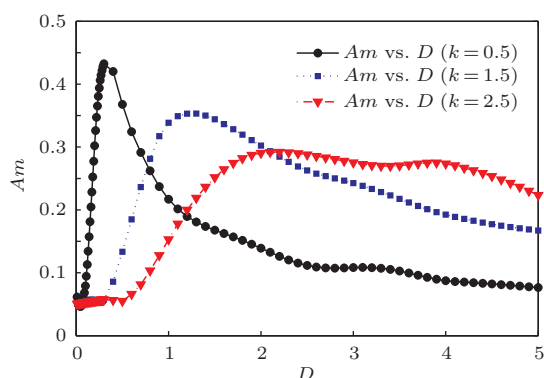


图3 不同阻尼比参数条件下输出频谱频率 $f = f_0$ 处的谱峰值 A_m 随噪声强度 D 的变化规律

阻尼比参数 k 对不同噪声强度信号的调节规律也可以从阻尼力的概念进行理解.在Duffing方程(1)中,阻尼力表征了介质对布朗粒子的阻碍作用,其大小取决于粒子的运动速度和阻尼比 k 的大小.当系统输出为过共振状态,即噪声强度 D 太大时,粒子的跃迁速率超过势函数的周期性变化,此时增大系统的阻尼比参数 k ,可减缓粒子的跃迁速率,从而与势函数的周期性变化相匹配.反之亦然.

3.3.2 调节系统参数 a

由3.2的规律4)可知,判别函数 $F(a)$ 随系统参数 a 的增大先增后减,因此函数 $F(a)$ 在 $a = \varepsilon\sqrt{2bD}$ 时取得最大值,即

$$F(a) \leq \frac{\varepsilon\sqrt{2bDR}}{2\sqrt{2\pi k}f_0} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 2bD}{4b\varepsilon^2 D}\right) = \frac{\varepsilon\sqrt{bDR}}{2\pi k f_0} \exp\left(-\frac{1}{2}\right). \quad (12)$$

为了使判别函数 $F = 1$,即系统发生随机共振,则须满足

$$\frac{\varepsilon\sqrt{bDR}}{2\pi k f_0} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \geq 1, \text{ 即 } D \geq \frac{4e\pi^2 k^2 f_0^2}{\varepsilon^2 b R^2}. \quad (13)$$

从(12)和(13)式可以看出,系统参数 a 的调节对小噪声信号的随机共振存在限制,即其他参数一定时,如果噪声强度 D 太小,那么不管怎样调节系统参数 a ,都无法使系统输出实现随机共振.而且这一临界噪声强度,同时受到 k, b, ε, R 等参数的共同影响.

当噪声强度 D 满足条件(13)时,结合3.2的规律2)可知,为保证函数 $F = 1$,在其他参数条件保持不变的情况下,系统参数 a 和噪声强度 D 先呈负相关、后呈正相关,因此,从这一点来看,对大噪声

强度的信号,需要匹配小的(当 $a < \varepsilon\sqrt{2bD}$)或大的(当 $a > \varepsilon\sqrt{2bD}$)系统参数 a .

但是,系统参数 a 的调节困难在于,随着待测信号噪声强度 D 的改变,判别函数 F 取最大值时参数 a 的临界值 $\varepsilon\sqrt{2bD}$ 也随之改变,那么调节系统参数 a 的匹配规律就变成动态的了.因此,通过调节系统参数 a 的取值来实现不同噪声强度输入信号的随机共振,我们只能得到一些定性的结论,即使参数 a 尽量小或尽量大,显然,这是缺乏一般性的规律.

3.3.3 调节系统参数 b

由3.2的规律2)可知,为保证判别函数 $F = 1$,在其他参数条件保持不变的情况下,系统参数 b 和噪声强度 D 呈负相关,即大噪声强度的信号,需要匹配小的系统参数 b ,反之亦然.从函数(10)可以看出,系统发生随机共振时,保持其他参数条件不变,当噪声强度 D 改变,只要同时改变系统参数 b 并保证 bD 不变,则总能保持 $F = 1$,这说明系统参数 b 的调参随机共振对任意噪声强度值信号都是可行的.

同样以参数条件(7)为基准进行研究.在Duffing系统(8)中,令 $\varepsilon = R = 1$,其他参数按条件(7)给定,我们保证其他参数条件不变,取三个不同的系统参数 b 分别等于0.5, 1和1.5,同时,将噪声强度 D 在 $[0, 5]$ 区间进行取值,对方程(8)进行数值求解,从而得到不同系统参数 b 条件下输出频谱频率 $f = f_0$ 处的谱峰值 A_m 随噪声强度 D 的变化规律,如图4.

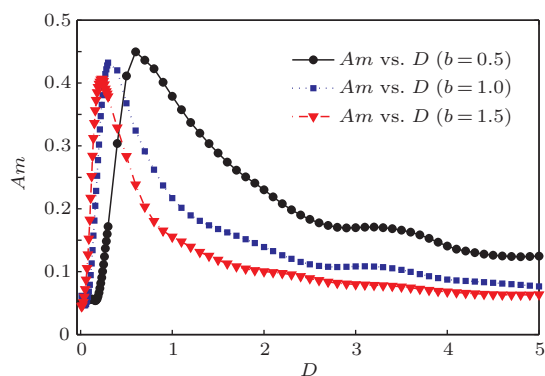


图4 不同系统参数 b 条件下输出频谱频率 $f = f_0$ 处的谱峰值 A_m 随噪声强度 D 的变化规律

从图4可以看出,随着系统参数 b 的增大,Duffing系统发生随机共振的最优噪声强度值减小;换言之,随着系统输入信号噪声强度增大,与之匹配的系统参数 b 的取值随之减小.因此,可以通过调节系统参数 b 的取值,实现不同噪声强度信号

的随机共振, 具体方法为, 根据系统输出波形和频谱图, 判断系统输出为欠共振(噪声太小)或过共振(噪声太大)状态, 若为欠共振, 则增大 b 的取值, 反之减小 b 的取值.

系统参数 b 对不同噪声强度信号的调节规律也可以从势垒角度进行理解, 因为判别函数(10)中参数 b 只来源于势垒高度项 $\Delta U = a^2/(4b)$. 当系统参数 b 增大时, Duffing系统势垒高度随之减小, 则布朗粒子跃迁所需要的噪声强度(即随机共振的最优噪声强度)也减小, 这与图4结果是一致的. 此外, 由于 b 的增大, 阱间距 $d = 2\sqrt{a/b}$ 随之减小, 则布朗粒子跃迁的最大位移也减小, 这在图4中体现为随着 b 的增大, Am - D 曲线的最大值随之减小.

3.3.4 调节幅值变换系数 ε

由3.2的规律2)可知, 为保证函数 $F = 1$, 在其他参数条件保持不变的情况下, 幅值变换系数 ε 和噪声强度 D 呈负相关, 即大噪声强度的信号, 需要匹配小的幅值变换系数 ε , 反之亦然. 这与系统参数 b 的规律是一致的. 但幅值变换系数 ε 的调节, 却同时受到其他因素的影响.

容易理解, 当待测信号噪声强度值 D 增大时, 通过减小幅值变换系数 ε , 可以减小输入Duffing系统的噪声强度值, 但同时 ε 也缩小了输入系统的信号幅值 A . 虽然从函数(10)看信号幅值 A 似乎对系统随机共振的发生不产生影响, 但事实上, 信号幅值 A 的变化同样也影响随机共振, 因为函数(10)或方程(9)仅仅是从频率或逃逸速率角度分析随机共振, 并没有从信号幅度与噪声水平的匹配关系进行分析, 而随机共振的核心是信号、噪声和系统三者所包含的频率、幅值等要素要达到协同匹配. 从方程(8)易知, 幅值变换系数 ε 变化时, 噪声强度 D 的变化率比信号幅值 A 的变化率要快. 对于大的噪声强度值 D , 如果 ε 的取值很小, 那么幅值变换后输入系统的信号幅值 A 将太小, 即周期驱动力太小, 此时即使噪声存在, 也很难使布朗粒子实现跃迁. 因此, 减小幅值变换系数 ε 对实现大噪声强度信号的随机共振在一定范围内有效, 这是幅值变换系数 ε 调节方法处理不同噪声强度信号的局限性, 一般只适合于一定范围内的微调.

3.3.5 调节变尺度系数 R

对待测信号进行时间/频率尺度变换, 是通过调节变尺度系数 R 来实现的. 具体含义为, 对于一组以采样频率 f_s 采集的频率为 f_0 的待测信号, 其离散数据的时间间隔 $dt = 1/f_s$, 引入变尺度系数

R , 人为地将信号的时间间隔理解为放大 R 倍, 使 $dt' = R/f_s$, 以步长 $h = R/f_s$ 进行数值计算, 则相当于周期信号的频率被压缩了 R 倍, 即 $f'_0 = f_0/R$. 这一变换的本质在于: 一个采样频率为 f_s 、频率为 f_0 的实测信号通过变尺度系数 R 进行尺度变换之后, 变成了一个二次采样频率为 $f_{sr} = f_s/R$, 频率为 $f'_0 = f_0/R$ 的信号.

由3.2的规律2)可知, 为保证判别函数 $F = 1$, 在其他参数条件保持不变的情况下, 变尺度系数 R 和噪声强度 D 呈负相关, 即大噪声强度的信号, 需要匹配小的变尺度系数 R , 反之亦然. 这与系统参数 b 的规律也是一致的.

同样以参数条件(7)为基准进行研究. 在Duffing系统(8)中, 令 $\varepsilon = 1$, 其他参数按条件(7)给定, 保持其他参数条件不变, 取三个不同的变尺度系数 R 分别等于0.5, 1和2, 同时, 将噪声强度 D 在 $[0, 5]$ 区间进行取值, 对方程(8)进行数值求解, 得到不同变尺度系数 R 条件下输出频谱频率 $f = f_0$ 处的谱峰值 Am 随噪声强度 D 的变化规律, 如图5.

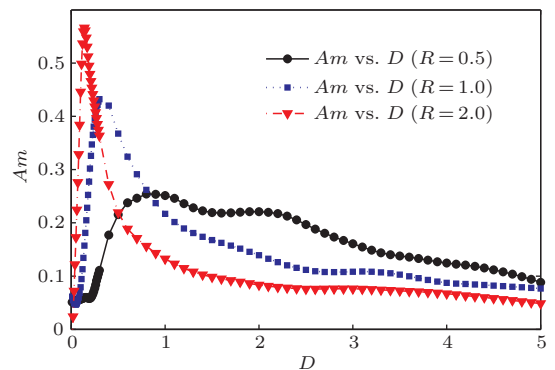


图5 不同变尺度系数 R 条件下输出频谱频率 $f = f_0$ 处的谱峰值 Am 随噪声强度 D 的变化规律

从图5可以看出, 随着变尺度系数 R 的增大, Duffing系统发生随机共振的最优噪声强度值减小; 换言之, 随着系统输入信号噪声强度增大, 与之匹配的变尺度系数 R 的取值随之减小. 因此, 可以通过调节变尺度系数 R 的取值, 实现不同噪声强度信号的随机共振. 同时可以看出, 随着 R 的增大, Am - D 曲线的最大值也随之增大, 这是因为, R 增大相当于输入信号的频率 $f'_0 = f_0/R$ 减小, 信号越接近低频区域, 由于噪声能量的低频积聚性, 信号可从噪声处所获得的能量就越多, 因此系统发生随机共振时的信号谱峰值也就越大.

需要注意的是, 虽然从判别函数(10)来看, 不管噪声强度 D 为何值, 总应该存在合适的变尺度系数 R 与之匹配, 但其实不然. 首先, 如果噪声强度

D 大, 需要减小变尺度系数 R , 则输入信号的频率 $f'_0 = f_0/R$ 增大, 如果 R 的取值太小, f'_0 容易超出合适的小参数范围, 使随机共振输出效果变差; 其次, 如果噪声强度 D 小, 需要增大变尺度系数 R , 那么, 输入信号的二次采样频率 $f_{sr} = f_s/R$ 减小, 而数值计算的步长 $h = 1/f_{sr} = R/f_s$, 如果 R 的取值太大, 会使计算误差增大甚至发生溢出. 因此, 对于不同噪声强度的信号, 变尺度系数 R 也存在一定的调节范围, 才能使系统输出实现随机共振.

3.4 信号频率的变化对随机共振的影响及调参研究

待测信号的另一个重要参数是特征信号的频率 f_0 . 与噪声强度不同, 频率参数的变化可能更为悬殊. 例如, 满足参数条件 (7) 时 Duffing 方程 (1) 能够实现随机共振, 此时 $D = 0.29$ 和 $f_0 = 0.01$ Hz 均为小参数, 当噪声强度增强到大参数 D' 时, D'/D 的比值往往不会特别大, 否则信号信噪比极低, 即使通过调参方式也无法进行检测; 而当信号频率增大到大参数 f'_0 时, f'_0/f_0 的比值却可能非常大, 达到上千倍甚至上万倍. 因此研究信号频率的变化对随机共振的影响及调参随机共振机理, 主要针对的是大频率参数信号.

实测信号的特征信号频率可能远远大于绝热近似要求的小参数范围, 此时, 频率 f_0 的增大导致系统响应 $x(t)$ 越来越滞后于输入 [23], 从 Kramers 逃逸速率的角度看, 即表现为 $r_K \leq 2f_0$, 或判别函数 $F \leq 1$, 布朗粒子的跃迁无法跟上周期信号转变的速率, 系统无法实现随机共振. 下面分析大频率信号的调参随机共振方法.

仍然从判别函数 (10) 入手分析. 从函数 (10) 可以看出, 等号右端的指数项对布朗粒子的跃迁速率存在制约, 从而对判别函数 F 的取值存在制约, 即无论参数 b 和 ε 取何值, 都要满足 $0 < \exp(-a^2/4b\varepsilon^2 D) < 1$. 函数 F 受其制约, 需要满足

$$F = \frac{aR}{2\sqrt{2\pi k f_0}} \exp\left(-\frac{a^2}{4b\varepsilon^2 D}\right) \in \left(0, \frac{aR}{2\sqrt{2\pi k f_0}}\right), \quad (14)$$

从 (14) 式可以看出, 对于一定的参数, 若信号频率 f_0 增大到使 $aR/(2\sqrt{2\pi k f_0}) < 1$, 那么, 1) 单独调节参数 b 和 ε 的取值显然无法满足 $F = 1$, 系统输出不能实现大频率信号的调参随机共振; 2) 如果单独调节阻尼比参数 k , 由 (14) 式知, 当信号频率从 f_0 增大到 f'_0 时, 只需减小参数 k 到 k' 使 $k'f'_0 = kf_0$,

即可使 $F = 1$ 保持不变. 但是需要注意, 当 k' 极小时, 布朗粒子跃迁将不再满足 Kramers 逃逸速率 (4) 式, 因为 k' 极小的时候, r_K 趋于无穷大, 表示粒子跃迁速率无穷大, 这显然是不对的, 进而以 $F = 1$ 来判断随机共振发生也就没有意义了; 3) 系统参数 a 的单独调节同样不适用. 由 (12) 式可知, 当信号频率 f_0 很大时

$$F(a) \leq \frac{\varepsilon\sqrt{bDR}}{2\pi k f_0} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \ll 1, \quad (15)$$

即无法通过单独调节系统参数 a 满足 $F = 1$, 使系统输出实现随机共振.

以上分析表明, 如果想通过单独调节某一参数实现大频率信号的随机共振, 只能调节变尺度系数 R . 由 3.2 的规律 2) 和 3) 可知, 为保证判别函数 $F = 1$, 在其他参数条件保持不变的情况下, 变尺度系数 R 和信号频率 f_0 呈正相关, 即大频率的信号, 需要匹配大的变尺度系数 R . 由判别函数 (10) 可知, 只要改变参数使 R/f_0 保持不变, 就能使系统输出实现随机共振. 文献 [15] 就是通过这种变尺度的方法实现大频率信号的随机共振.

3.5 Duffing 振子广义调参随机共振规律的总结

根据前文分析, 表 1 总结出当噪声强度 D 或信号频率 f_0 (大参数) 变化时, Duffing 振子随机共振的参数调节规律. 从中可以看出, 当信号频率 f_0 为大参数时, 只能通过调节变尺度系数 R 来实现系统的随机共振. 而噪声强度 D 变化时, 参数 k , a , b , ε , R 的调节均可实现系统的随机共振, 其中阻尼比参数 k 和系统参数 b 的调节规律较为简便, 而系统参数 a 的调节规律较为复杂, 幅值变换系数 ε 和变尺度系数 R 则只适合微调. 由这些规律我们得到 Duffing 振子广义调参随机共振的一般方法.

实际应用中, 参数调节顺序是: 首先, 根据实际信号的估算频率取合适的信号采样频率 f_s , 对信号进行采集, 将采集到的信号 $sn(t)$ 进行线性放大或缩小, 调节幅值变换系数 ε 使变换后的信号 ($sn'(t) = \varepsilon sn(t)$) 幅值落入合适的小参数范围之内; 其次, 对待测信号 $sn'(t)$ 进行时间/频率尺度变换, 调节变尺度系数 R , 使尺度变换后的信号频率 f'_0 落入合适的小参数范围之内; 最后, 保持变尺度系数 R 不变, 根据系统的输出波形和频谱判断系统所处的过共振或欠共振状态, 根据表 1 调参规律调节阻尼比参数 k 或系统参数 b 的取值. 如有需要, 可进一步微调幅值变换系数 ε , 从而使系统发生随机共振.

表1 噪声强度 D 或信号频率 f_0 变化时 Duffing 振子随机共振的参数调节规律

参数	随噪声强度 D 变化的调节规律	随信号频率 f_0 (大参数) 变化的调节规律
阻尼比参数 k	D 较大, 增大 k ; 或相反	无效
	当 $a < \varepsilon\sqrt{2bD}$ 时, D 较大, 减小 a ; 或相反	
系统参数 a	D 较大, 增大 a ; 或相反	无效
	当 $a > \varepsilon\sqrt{2bD}$ 时, D 较大, 减小 a ; 或相反	
系统参数 b	D 较大, 减小 b ; 或相反	无效
幅值变换系数 ε	D 较大, 减小 ε ; 或相反	无效
	但 ε 不能太小, 适合微调	
变尺度系数 R	D 较大, 减小 R ; 或相反	f_0 较大, 增大 R , 使 f_0/R 保持不变
	但需在一定范围内调节	

4 结 论

二维 Duffing 振子的随机共振是信号、噪声和非线性系统三者之间实现最优匹配的结果. 作为一种常用的微弱信号检测模型, 其应用的最大困难在于待测信号中的信号参数和噪声强度往往很难与非线性系统实现最优匹配. 由此, 本文提出 Duffing 振子的广义调参随机共振, 其参数不仅包含信号参数、噪声强度与系统各参数, 还包括实际工程应用中涉及到的幅值变换系数和时间/频率尺度变换系数. 通过 Kramers 逃逸速率所建立的 Duffing 振子广义调参随机共振的判别函数, 阐述了 Duffing 振子在不同频率及噪声强度输入信号条件下的广义调参随机共振机理. 研究表明, 当输入信号的噪声强度发生变化时, 为实现系统的调参随机共振, 通过调节阻尼比参数 k 和系统参数 b 较为简便, 系统参数 a 的调节规律较为复杂, 而幅值变换系数 ε 和变尺度系数 R 则只适合微调; 当输入信号的频率为大参数时, 则只能通过调节变尺度系数 R 来实现系统的调参随机共振. 本文的研究能够为实际工程中 Duffing 振子调参随机共振的微弱信号检测提供理论依据.

参考文献

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiana 1981 *Physica A* **14** 453
- [2] Bensi R, Parisi G, Srutera A 1982 *Tellus* **34** 11
- [3] Nicolis C 1982 *Tellus* **1** 1
- [4] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Lett.* **97A** 5

- [5] McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626
- [6] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rew. Mod. Phys.* **70** 223
- [7] Leng Y G, Wang T Y, Guo Y, Xu Y G, Fan S B 2007 *Mech. Syst. Signal PR* **21** 138
- [8] Xu B H, Zeng L Z, Li J L 2007 *J. Sound. Vib.* **303** 255
- [9] Steeve Zozor, Pierre-Olivier Amblard 2002 *Signal Process* **82** 353
- [10] Gammaitoni L, Marchesoni F, Menichella-Saetta E, Santucci S 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 349
- [11] Gammaitoni L, Menichella-Saetta E, Santucci S, Marchesoni F, Presilla C 1989 *Phys. Rev. A* **40** 2114
- [12] Jung P, Hänggi P 1990 *Phys. Rev. A* **41** 2977
- [13] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 802 (in Chinese) [康艳梅, 徐健学, 谢勇 2003 物理学报 **52** 802]
- [14] Wang F Z, Chen W S, Qin G R, Guo D Y, Liu J L 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 27
- [15] Leng Y G, Lai Z H, Fan S B, Gao Y J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 230502 (in Chinese)[冷永刚, 赖志慧, 范胜波, 高毓璜 2012 物理学报 **61** 230502]
- [16] Lai Z H, Leng Y G, Fan S B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 070503 (in Chinese)[赖志慧, 冷永刚, 范胜波 2013 物理学报 **62** 070503]
- [17] Leng Y G, Wang T Y, Guo Y, Wu Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 30 (in Chinese)[冷永刚, 王太勇, 郭焱, 吴振勇 2007 物理学报 **56** 30]
- [18] Yang D X, Hu Z, Yang Y M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 080501 (in Chinese) [杨定新, 胡政, 杨拥民 2012 物理学报 **61** 080501]
- [19] Leng Y G 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 020503 (in Chinese) [冷永刚 2012 物理学报 **61** 020503]
- [20] Alfonsi L, Gammaitoni L, Santucci S, Bulsara A R 2000 *Phys. Rev. E* **62** 299
- [21] Wu X J, Guo W M, Cai W S, Shao X G, Pan Z X 2003 *Talanta* **61** 863

[22] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear System* (Shanghai: Shanghai Science & Technology Education Press) p222 (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社) 第 222 页]

[23] Wang J F, Liu F, Wang J Y, Chen G, Wang W 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2305 (in Chinese)[王嘉赋, 刘锋, 王均义, 陈光, 王炜 1997 物理学报 **46** 2305]

Generalized parameter-adjusted stochastic resonance of Duffing oscillator based on Kramers rate^{*}

Leng Yong-Gang¹⁾²⁾ Lai Zhi-Hui^{1)†}

1) (School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

2) (Key Laboratory of Mechanism Theory and Equipment Design of Ministry of Education, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

(Received 9 September 2013; revised manuscript received 9 October 2013)

Abstract

The stochastic resonance (SR) of two-dimensional Duffing oscillator is studied in this paper. We propose the generalized parameter-adjustment SR of Duffing oscillator. On the basis of Kramers rate, we build a discrimination function of the SR of Duffing oscillator, and we expound the generalized parameter-adjustment SR laws of Duffing oscillator under different noise intensity and signal frequency conditions. The general method of generating the generalized parameter-adjustment SR of Duffing oscillator is also given in this paper.

Keywords: Duffing oscillator, stochastic resonance, Kramers rate, generalized parameter-adjustment

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.63.020502

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51275336), and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of High Education of China (Grant No. 20120032110001).

† Corresponding author. E-mail: laizh@tju.edu.cn