

非局域表面暗孤子及其稳定性分析*

高星辉¹⁾²⁾ 唐冬¹⁾ 张承云¹⁾ 郑晖¹⁾ 陆大全²⁾ 胡巍^{2)†}

1)(广州大学机械与电气工程学院, 广州 510006)

2)(华南师范大学, 广东省微纳光子功能材料与器件重点实验室, 广州 510631)

(2013年9月22日收到; 2013年10月24日收到修改稿)

非局域体介质中的暗孤子及表面亮孤子由于在光通信领域的潜在应用而受到极大关注, 然而到目前为止却没有对非局域表面暗孤子的研究. 在线性介质和非局域非线性介质的分界面上, 数值模拟得到了 $1+1$ 维非局域基态和二阶表面暗孤子, 研究了它们的波形与传播常数和介质非局域程度的关系, 基于它们的稳定性分析进行了理论推导和数值模拟. 稳定性分析结果表明: $1+1$ 维非局域基态表面暗孤子在其存在区域总是稳定的, 而二阶表面暗孤子是区域不稳定的, 其不稳定区域的宽度与传播常数以及介质的非局域程度有关系, 且受传播常数的影响更大. 加噪声的初始输入传输图验证了稳定性分析结果的正确性.

关键词: 非局域, 表面暗孤子, 稳定性

PACS: 42.65.Tg, 42.65.Jx

DOI: 10.7498/aps.63.024204

1 引言

空间非局域是许多非线性材料如光折变晶^[1,2]、液晶^[3,4]、热非线性介质^[5]、等离子体^[6]的一种内在特性, 它产生于载流子扩散、分子重定向、热转移等非线性过程^[17]. 空间非局域可以极大地改变暗孤子的特性及它们间的相互作用, 基于这个原因, 近些年来对暗孤子的研究在理论^[8,-11]和实验^[12,13]上都得到了极大关注. 当然, 上面所述的暗孤子是指非局域非线性体介质中的暗孤子. 然而, 如果非局域非线性介质出现界面时, 分界面对暗孤子特性会有什么影响? 研究表明, 在合适的条件下, 光可以附着在这个分界面上并形成特殊的表面波.

表面光波是一种位于两种不同介质分界面上的特殊光波, 已经广泛用于通过检测物理、化学或者生物因子来了解材料表面内在和外在特性的研究中. 非线性表面波已经在固态物理、非线性光学

和近场光学^[14,15]中引起了特别关注. 非线性表面孤子不仅能在局域非线性和线性介质组成的分界面上产生, 在非局域非线性介质和线性介质组成的分界面上也能产生. 在非局域非线性介质中发现了不同类型的表面孤子并进行了相关研究, 例如基态表面亮孤子^[16]、非相干表面孤子^[17]、表面偶极子和表面涡旋孤子^[18]、多极表面亮孤子^[19]、表面环形孤子^[20]. 在非局域自散焦介质中, Katarshov等^[21]预测了表面亮孤子并进行了理论研究. Skinner和Anderson^[22]以及Chen^[23]讨论了在局域非线性和线性介质组成的分界面上产生的表面暗孤子. 然而, 在非局域非线性和线性介质组成的界面上能否产生非局域表面暗孤子? 截止到目前还没有这方面的研究.

本文先从描述一束激光在非局域非线性和线性介质组成的界面上传输的理论模型出发, 并数值模拟得到了该理论模型的解——非局域基态和二阶表面暗孤子, 然后对它们的稳定性进行了理论分析, 数值模拟得到了稳定性分析结果, 最后利用加

* 国家自然科学基金 (批准号: 11174090, 11174091) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: huwei@scnu.edu.cn

噪声的传输验证了稳定性分析结果的正确性.

2 非局域表面暗孤子解

2.1 理论模型

考虑一束沿 z 轴传播的横电 (TE) 极化激光入射到由非局域热介质和线性介质组成的分界面上. 显然, 该光束的传播可由 1+1 维非局域非线性薛定谔方程来描述:

1) 在自散焦非线性介质中, 即 $x \leq 0$

$$i \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q \Delta n = 0,$$

$$\Delta n - \omega_m^2 \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} + |q|^2 = 0; \quad (1)$$

2) 在线性介质中, 即 $x > 0$

$$i \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q n_d = 0; \quad (2)$$

其中 $q(x, z)$ 是光束的复振幅包络; x, z 分别为以束宽和衍射长度进行归一化后的横坐标和纵坐标; ω_m 为热介质非局域响应的本征长度, 这里用 $\frac{\omega_m}{\omega_0}$ 表示自散焦热介质非局域程度, ω_0 为光束的束宽, 为方便计算这里取 $\omega_0 = 1$; Δn 为激光引起非局域自散焦介质折射率的非线性变化; $n_d = (n_N^2 - n_L^2 k_0^2 \omega_0^2 / 2)$ 为归一化后的折射率差, n_N, n_L 分别为自散焦非线性介质和线性介质的线性折射率, k_0 为真空中的波数. 当 n_N, n_L 的差为 10^{-5} 数量级时, n_d 的值就可以达到几百甚至几千.

2.2 非局域表面暗孤子数值解

为了寻找满足方程 (1) 和 (2) 的孤子解, 我们令 $q(x, z) = W(x) e^{i\beta z}$, $\Delta n(x, z) = N(x)$, 其中 β 为传播常数且为负值, $W(x), N(x)$ 是实函数. 将 $q(x, z), \Delta n(x, z)$ 的表达式代入到方程 (1), (2) 得到

$$-\beta W + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + NW = 0,$$

$$N - \omega_m^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + W^2 = 0; \quad (3)$$

$x > 0$

$$-\beta W + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + n_d W = 0. \quad (4)$$

对 TE 极化波, 横向电场应该满足 $q(x = +0) = q(x = -0)$ 这个连续条件. 根据参考文献

[16], 非线性折射率应该满足 $\frac{\partial \Delta n}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$, 这个条件只要非局域非线性介质和线性介质组成的分界面热绝缘就可以实现, 如非局域非线性介质为液晶或者铅玻璃, 而线性介质为空气或者真空. 假设 $n_d \gg 1$, 这种物理系统在现实中很容易找到 [24], 在数值模拟时我们取 $n_d = 500$. 参考文献 [16—21, 24] 表明, 当 $n_d \gg 1$ 时, 几乎所有的激光能量都局限在折射率更高的介质中. 所以, 在折射率低的介质中光场振幅应该满足边界条件 $q(x \rightarrow +\infty) = 0$.

文献 [10] 证明, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 表面暗孤子有与体介质中暗孤子一样的渐近行为, 则有 $W(x \rightarrow -\infty) = \sqrt{-\beta}$, 同时有 $N(x \rightarrow -\infty) = \beta$. 在实际的热非线性系统中, Δn 与由于吸收了光能量而导致的温度变化成比例. 然而, 对于能量 $I = |q|^2 = |W|^2$ 均匀分布的光场 (也就是在 $x \rightarrow -\infty$ 附近), 由于热能的转移需要温度梯度, 因而温度分布不可能是均匀的. 基于这个原因, 在热非线性介质中形成表面暗孤子和体暗孤子所需的完全均匀的背景不可能存在. 为了解决这个问题, 在实验上我们用一个宽得多的光束来近似代替均匀背景. 在这里, 理论研究时为了数值模拟方便, 取

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow -\infty} = 0 \quad \text{和} \quad \frac{\partial N}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow -\infty} = 0.$$

归纳起来, 得到方程 (1) 和 (2) 应该满足的边界条件

$$W(-\infty) = \sqrt{-\beta}, N(-\infty) = \beta,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow -\infty} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow -\infty} = 0,$$

$$W(-0) = W(+0), \quad \frac{\partial N}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow -0} = 0,$$

$$W(+\infty) = 0. \quad (5)$$

结合边界条件 (5), 对方程 (3) 和 (4) 离散化, 离散化时边界条件用三点微分公式进行处理, 然后进行数值模拟得到基态表面暗孤子和二阶暗孤子解, 见图 1.

从图 1 (a) 和 (b) 可知, 随着介质非局域程度 ω_m 的增加, 基态表面暗孤子的“肩”升高并远离分界面, 同时“光谷”(肩到分界面这段) 的宽度也增加. 在分界面上, 基态表面暗孤子光强趋于 0 但并不完全等于 0, 这是因为数值模拟时取 $n_d = 500$, 只有 n_d 为无穷大时在分界面上光强才完全为 0.

随着传播常数 $-\beta$ 的增加, 暗背景的光强增强, “光谷” 的宽度却减小. 与基态暗孤子相比, 在“肩”和分界面之间, 二阶表面暗孤子有两个暗谷和一个峰, 见图 1(c) 和 (d).

3 非局域表面暗孤子稳定性分析

3.1 稳定性的理论分析

为了分析非局域表面暗孤子对横向扰动的稳定性, 对方程 (1) 和 (2) 引入扰动解 $q(x, z) = [W(x) + a(x, z)]e^{i\beta z}$, $\Delta n(x, z) = N(x) + b(x, z)$,

这里 $|a(x, z)| \ll |W(x)|$, $|b(x, z)| \ll |N(x)|$ 且为实扰动. 将扰动解代入到 (1) 和 (2) 式中并围绕方程 (3) 和 (4) 线性化, 且忽略高阶项得到关于 a, b 的线性方程, 即

$x \leq 0$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \beta a + (Na + Wb) &= 0, \\ b - \omega_m^2 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} &= W^* a + Wa^*; \end{aligned} \quad (6)$$

$x > 0$

$$i \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + (n_d - \beta)a = 0. \quad (7)$$

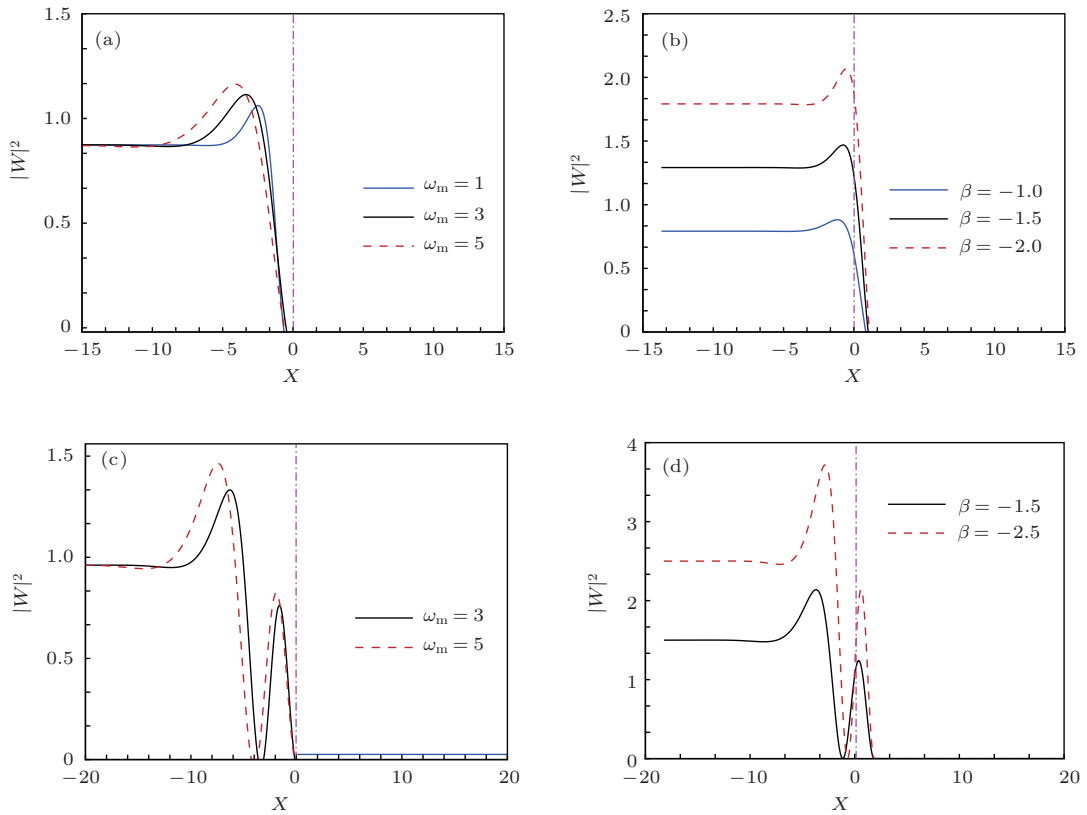


图 1 非局域基态和二阶表面暗孤子波形 (a) $-\beta = 1$, $\omega_m = 1, 3, 5$ 时基态表面暗孤子波形; (b) $\omega_m = 1$, $-\beta = 2, 1.5, 1$ 时基态表面暗孤子波形; (c) $-\beta = 1$, $\omega_m = 3, 5$ 时二阶表面暗孤子波形; (d) $\omega_m = 3$, $-\beta = 1.5, 2.5$ 时二阶表面暗孤子波形

令 $a(x, z) = a_+ e^{i\lambda z} + a_- e^{-i\lambda z}$, 代入到方程 (6) 和 (7) 中得

$x \leq 0$

$$\begin{aligned} &[(L_0 + WL_d^{-1}W^* - \lambda)a_+ + WL_d^{-1}Wa_-^*] e^{i\lambda z} \\ &+ [(L_0 + WL_d^{-1}W^* + \lambda^*)a_- \\ &+ WL_d^{-1}Wa_+^*] e^{-i\lambda^* z} = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$x > 0$

$$[L_n a_+ - \lambda a_+] e^{i\lambda z} + [L_n a_- + \lambda^* a_-] e^{-i\lambda^* z}$$

$$= 0; \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta + N, \\ L_d &= \omega_m^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1, \\ L_n &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta + n_d. \end{aligned}$$

方程 (8), (9) 要对任意的 z 成立, 则有

$x \leq 0$

$$(L_0 + WL_d^{-1}W^* - \lambda)a_+ + WL_d^{-1}Wa_+^* = 0; \quad (10a)$$

$$(L_0 + WL_d^{-1}W^* + \lambda^*)a_- + WL_d^{-1}Wa_+^* = 0; \quad (10b)$$

$x > 0$

$$L_n a_+ - \lambda a_+ = 0, \quad (11a)$$

$$L_n a_- + \lambda^* a_- = 0. \quad (11b)$$

对方程 (10b) 取共轭并结合方程 (10a), 同时对方程 (11b) 取共轭结合 (11a) 有

$x \leq 0$

$$\begin{aligned} (L_0 + WL_d^{-1}W^* - \lambda)a_+ + WL_d^{-1}Wa_+^* &= 0, \\ (L_0 + W^*L_d^{-1}W + \lambda)a_+^* + W^*L_d^{-1}W^*a_+ &= 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$x > 0$

$$\begin{aligned} L_n a_+ - \lambda a_+ &= 0, \\ L_n a_+^* + \lambda^* a_+^* &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

方程组 (12) 和 (13) 可以写成 $\mathbf{A}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$ 的形式, 其中

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_+ \\ a_+^* \end{pmatrix},$$

$x \leq 0$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} L_0 + WL_d^{-1}W^* - \lambda & WL_d^{-1}W \\ -W^*L_d^{-1}W^* & -L_0 - W^*L_d^{-1}W + \lambda \end{pmatrix};$$

$x > 0$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} L_n & 0 \\ 0 & -L_n \end{pmatrix};$$

这样, 稳定性问题的求解就转化为求本征值方程的本征值 λ 问题. 非局域表面暗孤子的不稳定性来源于本征值虚部的负数 (见 $a(x, z) = a_+ e^{i\lambda z} + a_- e^{-i\lambda z}$), 即扰动随着本征值虚部的负数 $k = -\text{Im}(\lambda)$ 指数增长, 从而导致表面暗孤子不稳定; 而 $g = \text{Re}(\lambda_{\max})$ 对应 $a(x, z)$ 的传播项.

3.2 稳定性分析数值结果

对上面推导出来的本征值方程进行数值求解并取最大的本征值 λ_{\max} , 得到稳定性分析图, 见图 3 (b). 从稳定性分析结果可知, 与非局域体介质中的基态暗孤子一样, 非局域基态表面暗孤子在其存在领域总是稳定的, 非局域二阶表面暗孤子是区间不稳定的. 为了验证稳定性分析结果的正确性, 我们令方程 (1), (2) 的加噪声初始输入为 $u(x, z = 0) = W(x)[1 + \rho(x)]$, 其中 $\rho(x)$ 为高斯分布的随机噪声且方差 $\delta^2 = 0.03$. 将上述初始输入代入方程 (1), (2) 并利用菱形差分法进行数值模拟, 得到加噪声的孤子传输图, 分界面上振幅连续、非线性折射率的导数为零.

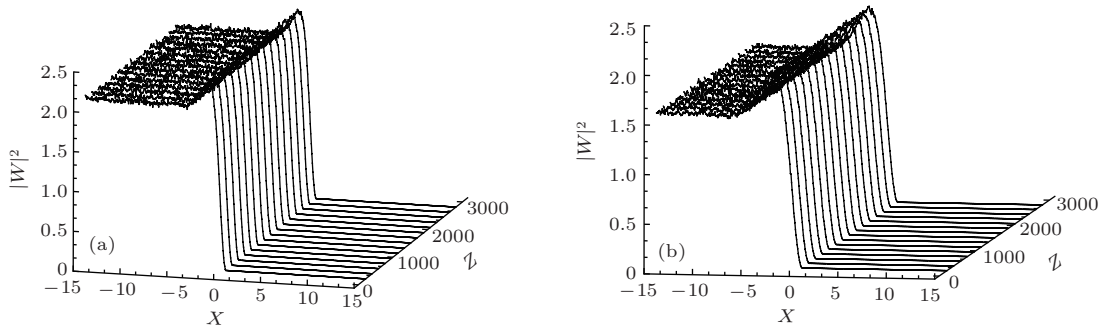


图 2 非局域基态表面暗孤子加噪传输图 (a) $\omega_m = 1, -\beta = 2$ 时的传输图; (b) $\omega_m = 3, -\beta = 1.5$ 时的传输图

图 2 (a), (b) 为加噪后非局域基态表面暗孤子传输图, 其中 ω_m, β 为基态表面暗孤子存在领域内的任意值. 从图中可以看出, 非局域程度和传播常数为任何值时, 加了微扰的基态表面暗孤子

传输 3000 个瑞利距离后波形仍然保持不变, 说明非局域基态表面暗孤子在其存在领域内总是稳定的. 图 3 (b) 为非局域二阶表面暗孤子稳定性分析图, $-\beta$ 为横坐标, 对应的 $k = -\text{Im}(\lambda_{\max})$ 为纵坐标

标. 从图 3(b)可以看出, 非局域二阶表面暗孤子是区域不稳定的, 在曲线外稳定, 曲线内是不稳定的, 图 3(c)–(f) 验证了图 3(b) 稳定性分析结果的正确性. 图 3(c), (d) 分别为 $\omega_m = 3$ 且 $-\beta$ 在曲线区域外、内取任意值时加噪二阶表面暗孤子传输图. 图 3(c) (曲线外取 $\beta = -1$) 表明在加噪传输 3000 个瑞利距离后二阶表面暗孤子波形仍然保持不变, 图 3(d) (曲线内取 $\beta = -4$) 表明在加噪传输 500 个瑞利距离后二阶表面暗孤子波形已经严重变

形. 图 3(e), (f) 分别为 $\omega_m = 5$ 且 $-\beta$ 在曲线区域外、内取任意值时加噪二阶表面暗孤子传输图. 从图 2 和图 3 可以得出结论: 与非局域体暗孤子相类似, 非局域基态表面暗孤子在其存在区域总是稳定的, 而二阶表面暗孤子是区间不稳定的, 其稳定区域与传播常数和局域程度有关系, 并且不稳定区域受传播常数的影响更大, 在介质的非局域程度一定时, 二阶表面暗孤子在传播常数小时更稳定.

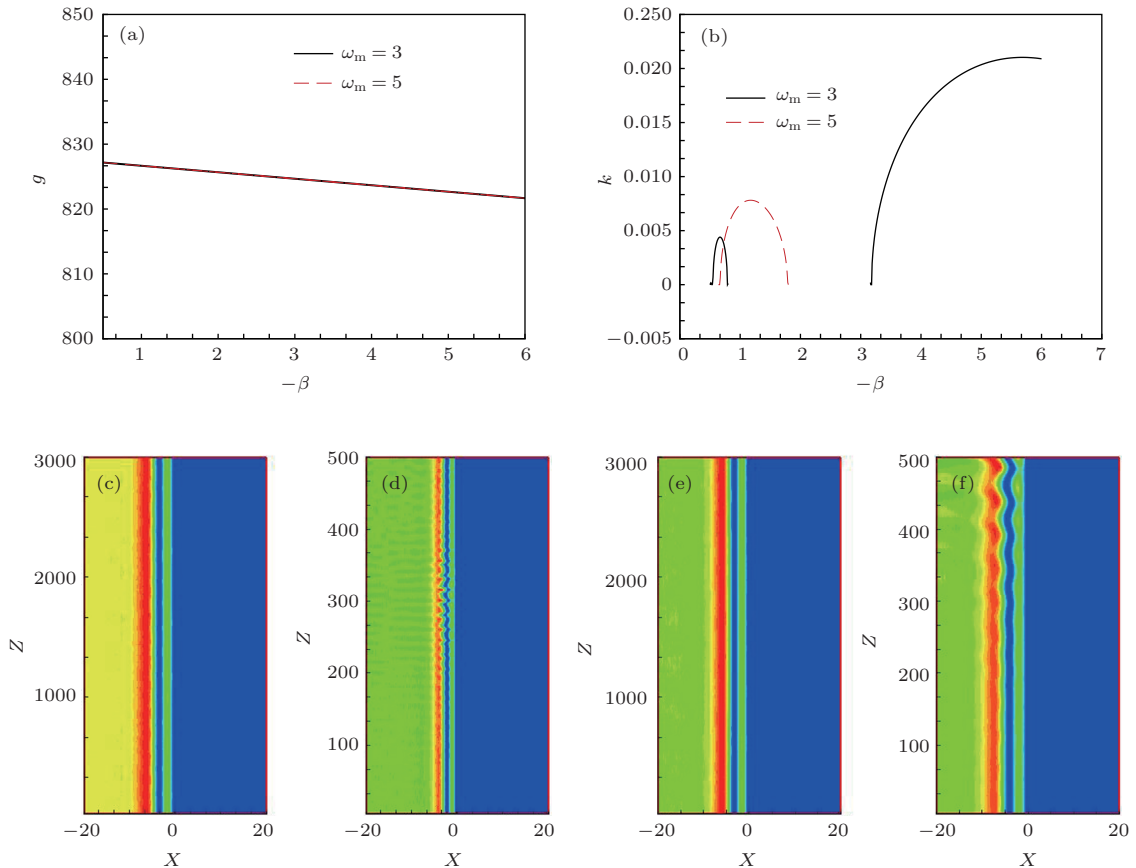


图 3 二阶表面暗孤子稳定性分析图 (a) $\omega_m = 3, 5$ 时, 扰动增长率的实部-传播常数图; (b) $\omega_m = 3, 5$ 时, 扰动增长率虚部的负数-传播常数 (稳定性分析); 二阶表面暗孤子加噪传输图; (c) $\omega_m = 3, -\beta = 1$ 时的传输图; (d) $\omega_m = 3, -\beta = 4$ 时的传输图; (e) $\omega_m = 5, -\beta = 2.1$ 时的传输图; (f) $\omega_m = 5, -\beta = 1$ 时的传输图

4 结 论

本文通过数值模拟得到了非局域基态、二阶表面暗孤子解. 和非局域基态、二阶体暗孤子类似, 非局域基态表面暗孤子在其存在领域内总是稳定的, 而二阶非局域暗孤子是区间不稳定的, 其不稳定区间的大小与介质的非局域程度以及传播常数有关系, 并且受传播常数的影响更大. 这对非局域表面暗孤子理论和实验方面进一步的研究有重要的参

考和指导意义.

参考文献

- [1] Mitchell M, Segev M, Christodoulides D N 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 4657
- [2] Mamaev A V, Zozulya A A, Anderson D Z, Saffman M 1997 *Phys. Rev. A* **56** R1110
- [3] Peccianti M, Brzdakiewicz K A, Assanto G 2002 *Opt. Lett.* **27** 1460
- [4] Peccianti M, Conti C C, Assanto G 2005 *Opt. Lett.* **30** 415

- [5] Derrien F, Henninot F, Warengem M, Abbate G 2000 *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **2** 332
- [6] Litvak A G, Mironov V A, Fraiman G M, Yunakovskii A D 1975 *Sov. J. Plasmas Phys.* **1** 31
- [7] Krolikowski W, Bang O, Nikolov N I, Neshev D, Wyller J, Rasmussen J J, Edmundson D 2004 *J. Opt. B* **6** S288
- [8] Nikolov N I, Neshev D, Krolikowski W, Bang O, Rasmussen J J, Christiansen P L 2004 *Opt. Lett.* **29** 286
- [9] Ouyang S, Guo Q 2009 *Opt. Express* **17** 5170
- [10] Armaroli A, Trillo S, Fratalocchi A 2009 *Phys. Rev. A* **80** 053803
- [11] Gao X H, Zhang C Y, Tang D, Zheng H, Lu D Q, Hu W 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 044214 (in Chinese)[高星辉, 张承云, 唐冬, 郑晖, 陆大全, 胡巍 2013 物理学报 **62** 044214]
- [12] Dreischuh A, Neshev D N, Petersen D E, Bang O, Krolikowski W 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 043901
- [13] Zhou L H, Gao X H, Yang Z J, Lu D Q, Guo Q, Cao W W, Hu W 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 044208 (in Chinese)[周罗红, 高星辉, 杨振军, 陆大全, 郭旗, 曹伟文, 胡巍 2011 物理学报 **60** 044208]
- [14] Stegeman G I, Seaton C T 1985 *J. Appl. Phys.* **58** R57
- [15] Mihalache D, Bertolotti M, Sibilia C 1989 *Prog. Opt.* **27** 229
- [16] Alfassi B, Rotschild C, Manela O, Segev M, Christodoulides D N 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 213901
- [17] Alfassi B, Rotschild C, Manela O, Segev M 2009 *Phys. Rev. A* **80** 041808
- [18] Ye F, Kartashov Y V, Torner L 2008 *Phys. Rev. A* **77** 033829
- [19] Kartashov Y V, Vysloukh V A, Torner L 2009 *Opt. Lett.* **34** 283
- [20] Kartashov Y V, Vysloukh V A, Torner L 2007 *Opt. Express* **15** 16216
- [21] Kartashov Y V, Ye F, Vysloukh V A, Torner L 2007 *Opt. Lett.* **32** 2260
- [22] Skinner S R, Andersen D R 1991 *J. Opt. Soc. Am. B* **8** 759
- [23] Chen Y J 1992 *Phys. Rev. A* **45** 4974
- [24] Yang Z J, Ma X K, Lu D Q, Zheng Y Z, Gao X H, Hu W 2011 *Opt. Express* **19** 4890

Nonlocal surface dark solitons and their stability analysis*

Gao Xing-Hui¹⁾²⁾ Tang Dong¹⁾ Zhang Cheng-Yun¹⁾ Zheng Hui¹⁾
Lu Da-Quan²⁾ Hu Wei^{2)†}

1) (College of Mechanical and Electric Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

2) (Guangdong Key Laboratory of Micro-Nano Photonic Materials and Devices, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

(Received 22 September 2013; revised manuscript received 24 October 2013)

Abstract

Due to their future applications in optical communication, nonlocal dark solitons in bulk medium and surface bright solitons have received much attention recently. However, nonlocal surface dark solitons have not been investigated till now. In this paper, 1+1 dimensional nonlocal fundamental and second-order surface dark solitons have been found numerically at the interface between thermal nonlinear medium and linear medium. The relation between the wave shape of nonlocal surface dark soliton and propagation constant and nonlocality degree is investigated. Moreover, the stability of them is analyzed theoretically. The numerical simulation results show that 1 + 1 dimensional nonlocal fundamental surface dark Solitons are always stable in the domain of their existence, while second-order surface dark solitons are oscillatorily unstable and the width of unstable domain depends more greatly on propagation constant than nonlocality degree of nonlocal nonlinear medium. The figure showing the propagation, with the initial input of noise added, confirms the correctness of stability analysis results.

Keywords: nonlocal, surface dark solitons, stability

PACS: 42.65.Tg, 42.65.Jx

DOI: 10.7498/aps.63.024204

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11174090, 11174091).

† Corresponding author. E-mail: huwei@scnu.edu.cn