

分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路*

刁利杰 张小飞 陈帝伊†

(西北农林科技大学水利与建筑工程学院电气工程系, 杨凌 712100)

(2013年10月14日收到; 2013年10月21日收到修改稿)

RLC 并联电路是一种非常重要的单元电路, 本文尝试着系统地分析和总结分数阶 $RL_\alpha C_\beta$ 并联电路的基本特征和规律. 对比整数阶 RLC 并联电路, 电感的分数阶阶次 α 和电容的分数阶阶次 β 作为两个新的关键参数, 使得分数阶 $RL_\alpha C_\beta$ 并联电路在设计上有了更多自由度、更大的灵活性和新意. 同时, 它们的引入也增加了许多新的现象和规律. 本文首先分析了分数阶 $RL_\alpha C_\beta$ 并联电路的两个基本特性: 导纳和相位. 进而分析了分数阶条件下分数阶 $RL_\alpha C_\beta$ 并联电路所特有的纯虚阻抗的问题. 并且, 分析了 LC 电路中特有的现象之一——谐振, 和五个参数对谐振的影响. 进一步地, 阻抗和相位关于各参数的敏感性分析也得到了详细地研究. 数值分析和理论分析两者互相印证, 彼此支持.

关键词: 分数阶电路, 并联 RLC 电路, 纯虚导纳, 敏感性分析

PACS: 84.30.Bv, 45.10.Hj

DOI: 10.7498/aps.63.038401

1 引言

近几十年来, 非线性电路一直是国内外的研究热点之一, 不同领域的研究人员都致力于该课题的研究, 包括混沌电路^[1-4], 电力电子电路^[5-7] 和忆阻器电路^[8-10] 等, 开展了相关的理论分析、数值仿真和实验研究.

分数阶微积分因为具有一定的记忆功能, 且更符合自然界普遍连续的朴素哲学观点, 近年来飞速发展, 广泛应用于力学^[11-13]、控制科学与控制^[14-16]、信号处理^[17-19] 等领域. 在分数阶非线性电路理论中, 也取得了初步的研究成果^[20,21]. 但是, 作为一种重要单元电路的 RLC 电路, 还没有系统的研究和总结其在分数阶领域的特性和规律.

本文将系统的研究分数阶 $RL_\alpha C_\beta$ 并联电路的基本特征和规律. 具体包括分析分数阶 $RL_\alpha C_\beta$ 并联电路的两个基本特性: 导纳和相位, 进而研究分数阶条件下分数阶 $RL_\alpha C_\beta$ 并联电路所特有的纯虚阻抗的问题. 并且, 分析了 LC 电路中特有的现象

之一——谐振及五个参数对其影响. 最后, 给出阻抗和相位对各参数的敏感性分析.

2 导纳

分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路示意图如图 1 所示, 根据电路理论易知, 其导纳公式为

$$Y(j\omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{R} + (j\omega)^\alpha C + \frac{1}{(j\omega)^\beta L}, \quad (1)$$

进而, 可得

$$Y(j\omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{R} + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha C + \frac{\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\omega^\beta L} + j\left(\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha C - \frac{\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\omega^\beta L}\right), \quad (2)$$

式中虚部的平方加实部的平方, 然后等式左右两边同乘 R^2 , 可得

* 国家自然科学基金(批准号: 50879072)、国家高技术研究发展计划(863 计划)(批准号: 2011BAD29B08)、中央高校基本科研业务费(批准号: Z109021310)和国家级大学生创新实验项目资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: diyichen@nwsuaf.edu.cn

$$\begin{aligned}
 & \|Y(j\omega, \alpha, \beta)\|^2 R^2 \\
 &= 1 + (\omega^\alpha RC)^2 + \left(\frac{R}{\omega^\beta L}\right)^2 \\
 &+ 2\omega^\alpha RC \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \\
 &+ 2\left[\frac{R}{\omega^\beta L} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\right. \\
 &\left. + \frac{\omega^\alpha R^2 C}{\omega^\beta L} \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\pi\right)\right]. \quad (3)
 \end{aligned}$$

为了更好地分析分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路导纳随着电路频率 ω 的变化规律, 分别将 $RC = L/R$ 的值取 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10 和 100, 画出 $|Y(j\omega, \alpha, \beta)| \times R$

关于 ω 变化的曲线图, 如图 2 所示.

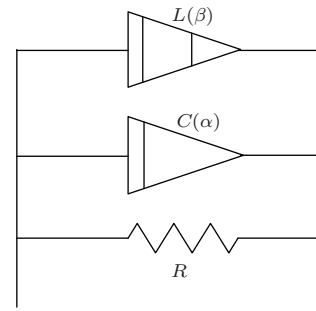


图 1 分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路示意图

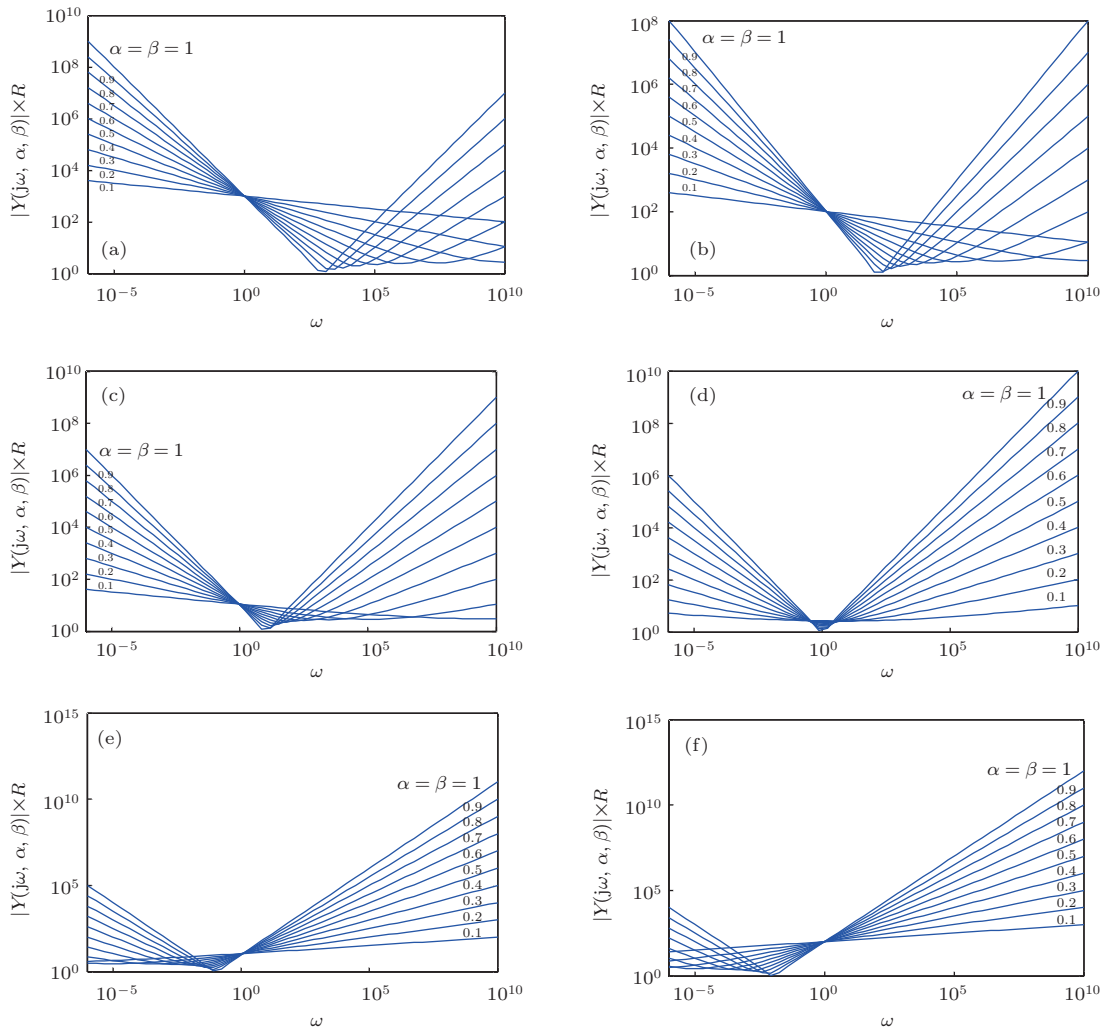


图 2 分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路导纳随电路频率 ω 变化示意图 (a) $RC = L/R = 0.001$; (b) $RC = L/R = 0.01$; (c) $RC = L/R = 0.1$; (d) $RC = L/R = 1$; (e) $RC = L/R = 10$; (f) $RC = L/R = 100$

观察图 2 可知, 阻抗的最小值点随着 $RC = L/R$ 的逐渐增大而向左侧移动, 因为 (3) 式中 $(\omega^\alpha RC)^2 + \left(\frac{R}{\omega^\beta L}\right)^2$ 的最小值为 2, 而 $1/\left(\omega^\beta \frac{L}{R}\right)$ 的值应该在 0.5 到 2 之间, 所以, 当 $RC = L/R$ 增大

时, ω 的值就会减小来保证出现最小值. 有趣的是, 除了图 2 (d) 之外, 其余各图在频率等于 1, 即 $\omega = 1$ 时, 阻抗交于一点. 观察任一图可知, 随着分数阶阶次减小, 阻抗的增大趋势和减小趋势都变缓, 这主要是 (3) 式中

$$2 \left(\frac{R}{\omega^\beta L} \cos \left(\frac{\beta\pi}{2} \right) + \frac{\omega^2 R^2 C}{\omega^\beta L} \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \pi \right) \right)$$

的影响所致. 为了更加形象地描述阻抗随分数阶阶次的变化规律, 给出了如图3所示的三维图.

对比图3中各图可知, 当 $RC = L/R$ 取值较小时, 电容的分数阶阶次 β 对整个导纳的影响很小, 起初甚至可以忽略. 随着 $RC = L/R$ 的取值逐渐增大, 电感的分数阶阶次 α 对整个导纳的影响不断减弱, 直至微乎其微. 所以, 对比图3(a)和(f), 两

个图形相当于旋转 90° . 这主要是因为(3)式中

$$(\omega^\alpha RC)^2 + \left(\frac{R}{\omega^\beta L} \right)^2$$

的两个因子随着 $RC = L/R$ 的变化, 对整个导纳值的影响程度不同. 具体为, 当 $RC = L/R$ 取值较小时, $\left(\frac{R}{\omega^\beta L} \right)^2$ 对整个导纳影响较大. 所以, 电容的分数阶阶次 β 对整个导纳影响大; 当 $RC = L/R$ 取值较大时, $(\omega^\alpha RC)^2$ 对整个导纳影响较大. 所以, 电感的分数阶阶次 α 对整个导纳影响大.

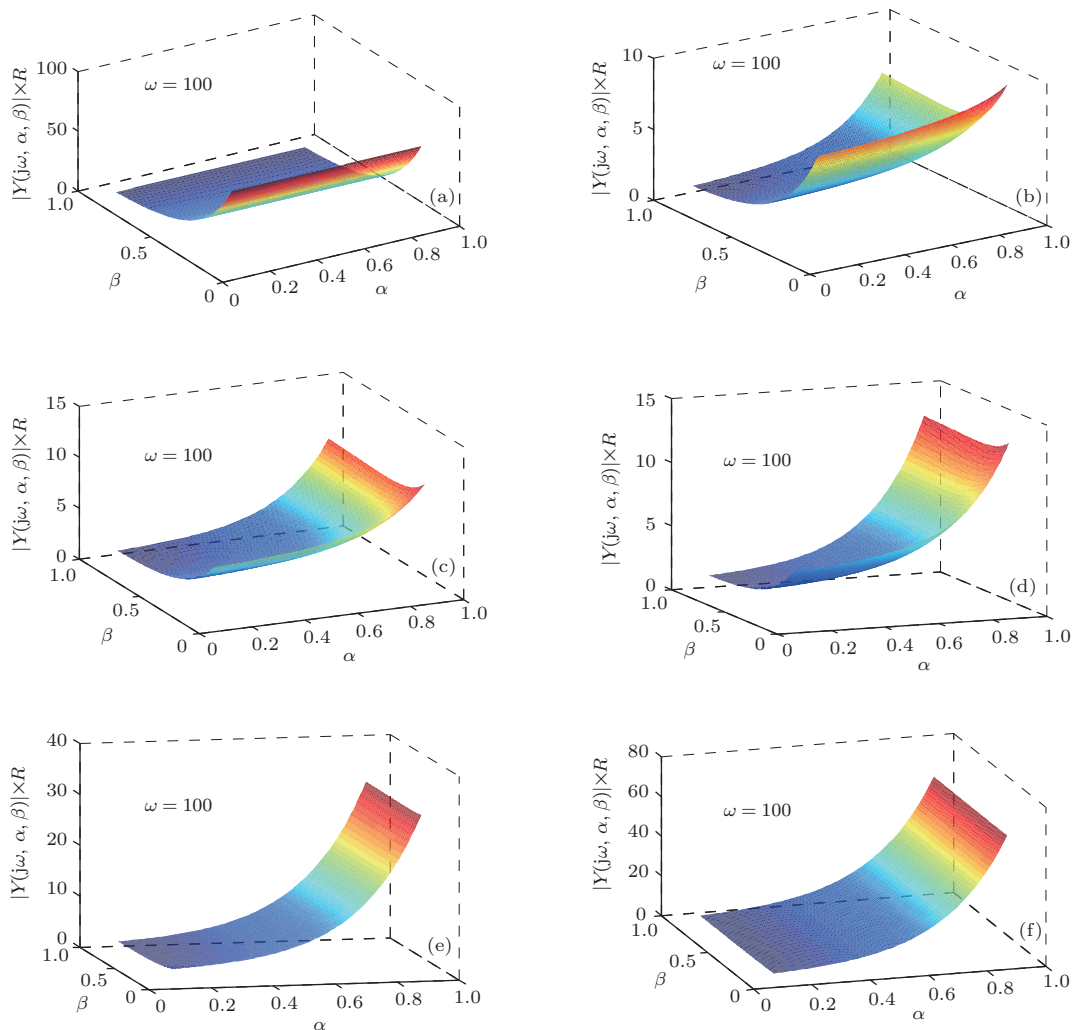


图3 分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路导纳随分数阶阶次变化的三维图 (a) $RC = L/R = 0.001$; (b) $RC = L/R = 0.01$; (c) $RC = L/R = 0.15$; (d) $RC = L/R = 0.2$; (e) $RC = L/R = 0.5$; (f) $RC = L/R = 1$

3 相位

将(2)式的虚部除以其实部, 可得其相位表达式为

$$\varphi(Y(j\omega, \alpha, \beta)) = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) \omega^\alpha RC - \frac{R}{\omega^\beta} \sin \left(\frac{\beta\pi}{2} \right)}{1 + \omega^\alpha RC \cos \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) + \frac{R}{\omega^\beta} \cos \left(\frac{\beta\pi}{2} \right)} \right). \quad (4)$$

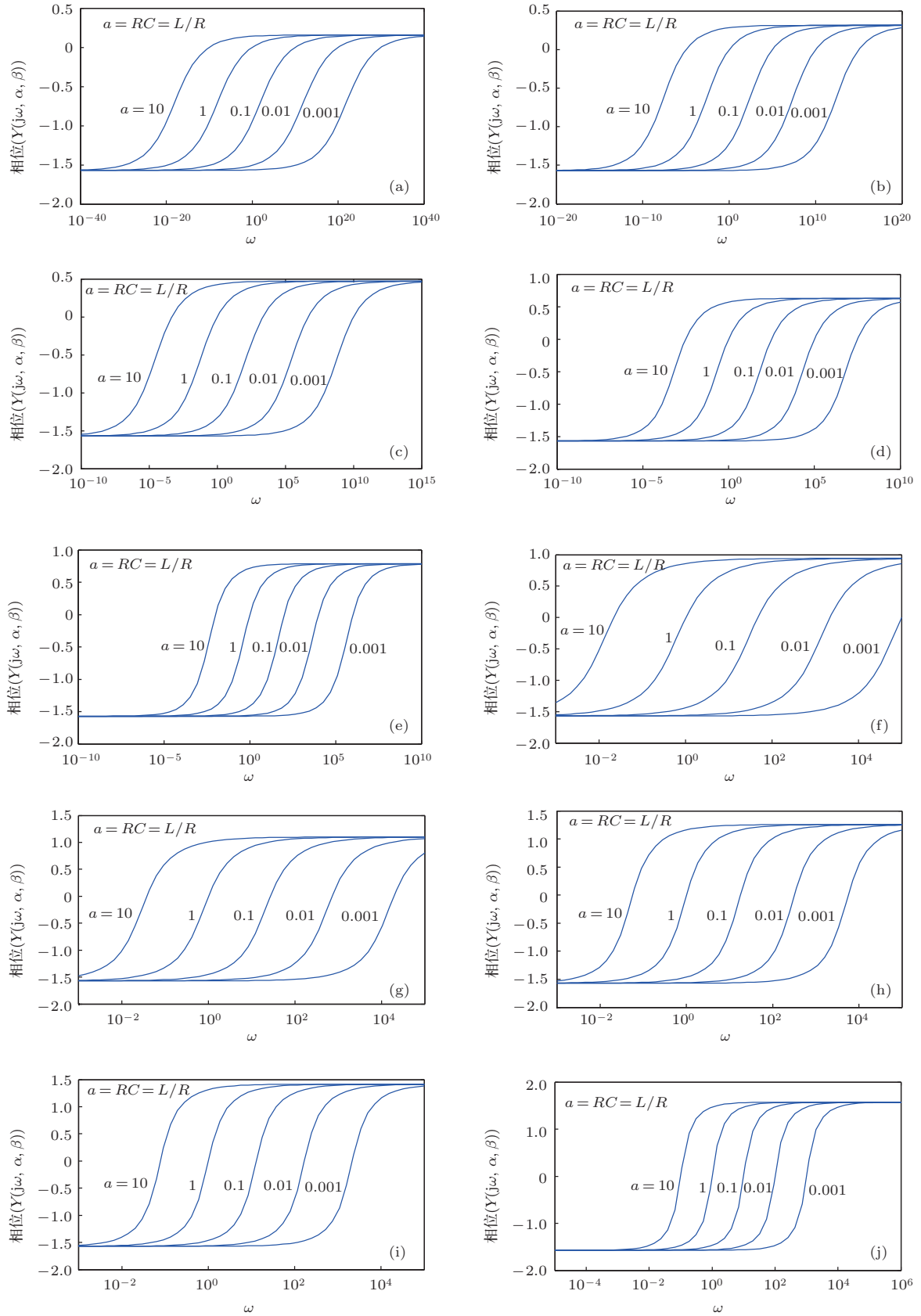


图4 分数阶并联 $RL_{\alpha}C_{\beta}$ 电路相位随频率变化图 (a) $\alpha = \beta = 0.1$; (b) $\alpha = \beta = 0.2$; (c) $\alpha = \beta = 0.3$; (d) $\alpha = \beta = 0.4$; (e) $\alpha = \beta = 0.5$; (f) $\alpha = \beta = 0.6$; (g) $\alpha = \beta = 0.7$; (h) $\alpha = \beta = 0.8$; (i) $\alpha = \beta = 0.9$; (j) $\alpha = \beta = 1$

根据(4)式,可以画出分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路相位随频率 ω 变化图,如图4所示.

对比图4中各图可知,随着分数阶阶次的增大,相位曲线所构成的“类磁滞回线区域”的宽度越来越窄,但其相位最大值却越来越大.在同一图中,相位的最大值和最下值不随 $RC = L/R$ 的变化而变化,尽管上升速度随着 $RC = L/R$ 的变化有所不同.为了更形象地展示相位随着分数阶阶次的变化趋势,还给出了如图5所示的三维图.

对比图5可知,当 $RC = L/R$ 取值较小时,相位随 β 变化显著,而随 α 变化不明显.但是,当 $RC = L/R$ 取值增大时,这个关系发生改变.相位随 β 的变化几乎可以忽略,而随 α 的变化明显.关键是因为 $RC = L/R$ 取值较小时,(4)式中 $R/(\omega^\beta L)$ 起决定性作用,进而电容的分数阶阶次 β 占主导地位.当 $RC = L/R$ 取值较大时, $\omega^\alpha RC$ 的影响逐渐增大,所以电感的分数阶阶次 α 对相位的影响逐渐增大.

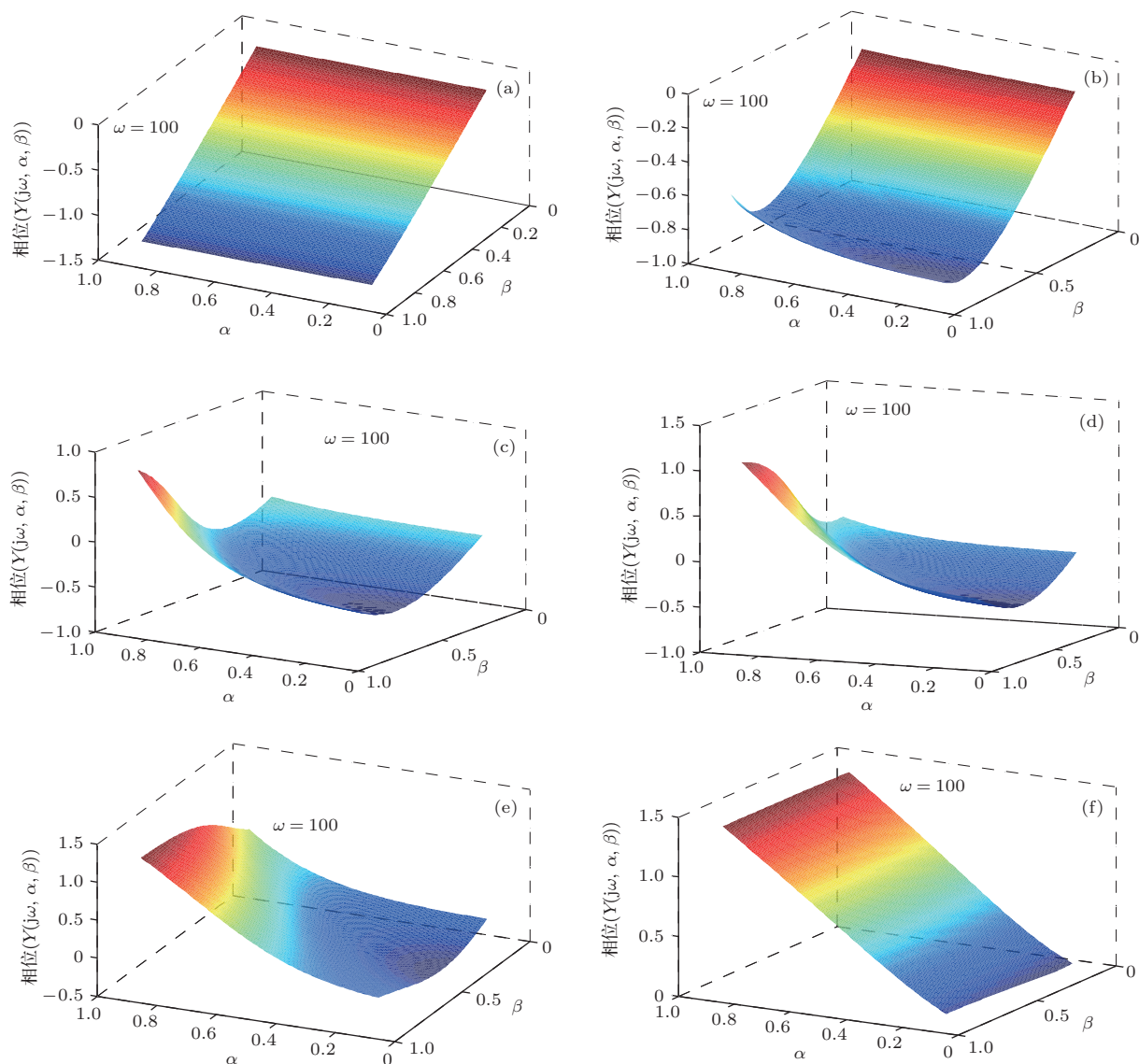


图5 分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路相位随分数阶阶次的变化图 (a) $RC = L/R = 0.001$; (b) $RC = L/R = 0.01$; (c) $RC = L/R = 0.03$; (d) $RC = L/R = 0.05$; (e) $RC = L/R = 0.1$; (f) $RC = L/R = 0.2$

4 纯虚导纳

4.1 纯虚导纳等效为电容

对于(2)式所表示的分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路导纳,其在一定频率下可为纯虚导纳,对应的频率

可由下式求得:

$$-\frac{1}{R} = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha C + \frac{\cos(\beta\pi/2)}{\omega^\beta L}. \quad (5)$$

令 $RC = L/R$,求解(5)式可得 ω_{pi}^α ,此处 ω_{pi} 为纯虚频率,得

$$\omega_{pi}^\alpha = \frac{1}{2RC} \left[-\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} + \sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} - 4} \right] \quad (6)$$

和

$$a = \left[-\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} + \sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} - 4} \right]. \quad (7)$$

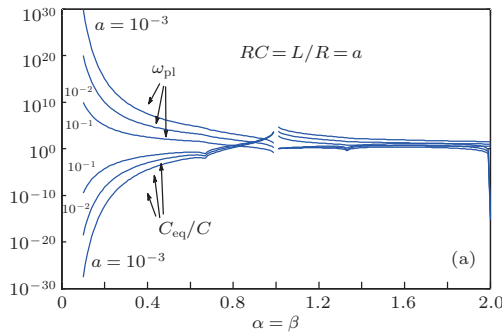
分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路在此频率下可对外等效为一个整数阶电容 C_{eq} ,

$$j \left(\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \frac{a}{2R} - \frac{\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\frac{a}{2RC}L} \right) = j\omega_{pi} C_{eq}. \quad (8)$$

由 (6), (7) 和 (8) 式可得

$$\left(\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \frac{a}{2RC} - \frac{\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\frac{a}{2R}L} \right) \times \left(\frac{a}{2RC} \right)^{-1/\alpha} = \frac{C_{eq}}{C}. \quad (9)$$

为了更形象地展示等效电容和纯虚频率随着分数阶阶次和电阻、电感和电容值的变化规律, 给出图 6.



观察图 6(a) 可知, ω_{pi} 和 C_{eq}/C 在分数阶阶次 $\alpha = \beta$ 为 0.1 到 1 和 1 到 2 两个区间内均大致单调, 即 ω_{pi} 呈递减趋势, C_{eq}/C 呈递增趋势. 观察图 6(b) 可知, 整个趋势在 $\alpha = \beta = 2/3$ 和 $\alpha = \beta = 4/3$ 两处出现了间断.

4.2 纯虚导纳等效为电感

分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路在此频率下还可对外等效为一个整数阶电感 L_{eq} , 其对应公式为

$$j \left(\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \frac{a}{2R} - \frac{\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\frac{aL}{2RC}} \right) = \frac{1}{j\omega_{pi} L_{eq}}. \quad (10)$$

由 (2) 式, (6) 和 (7) 式得

$$\frac{L_{eq}}{L} = \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \frac{a}{2R} \right) \left(\frac{a}{2RC} \right)^{1/\alpha}}. \quad (11)$$

如图 7 所示, 形象地展示等效电感和纯虚频率随着分数阶阶次和电阻、电感和电容值变化规律.

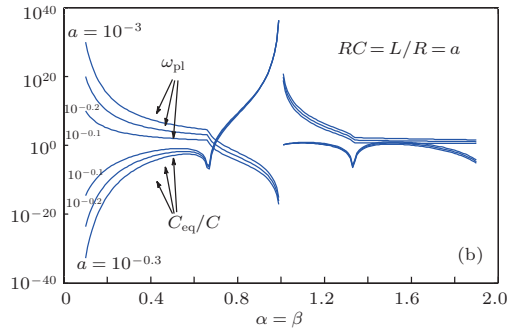


图 6 分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路的纯虚导纳等效电容随分数阶阶次变化图 (a) 全局图; (b) 局部放大图

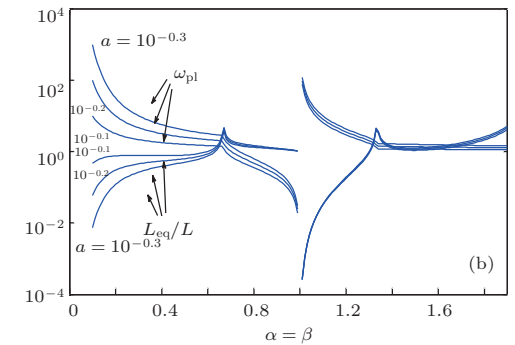
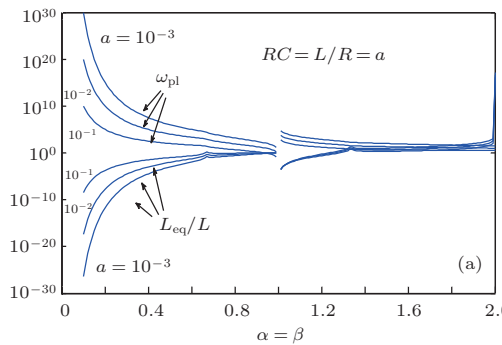


图 7 分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路的纯虚导纳等效电感随分数阶阶次变化图 (a) 全局图; (b) 局部放大图

5 谐振频率

谐振现象是并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路的一个重要现象. 我们将分析系统参数, 特别是两个新参数: 分数阶阶次 α 和 β 对谐振频率的影响.

将 (2) 式中的虚部设为 0, 则有

$$\mathrm{j} \left(\sin \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) \omega^\alpha C - \frac{\sin \left(\frac{\beta\pi}{2} \right)}{\omega^\beta L} \right) = 0.$$

则谐振频率为

$$\omega = \left(\frac{\sin \left(\frac{\beta\pi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) LC} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

分别选取电感的分数阶阶次 α 为 0.1, 0.3, 0.5 和 0.9, 画出谐振频率随电容的分数阶阶次 β 变化曲线 (如图 8 所示), 其中 $LC = 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100$.

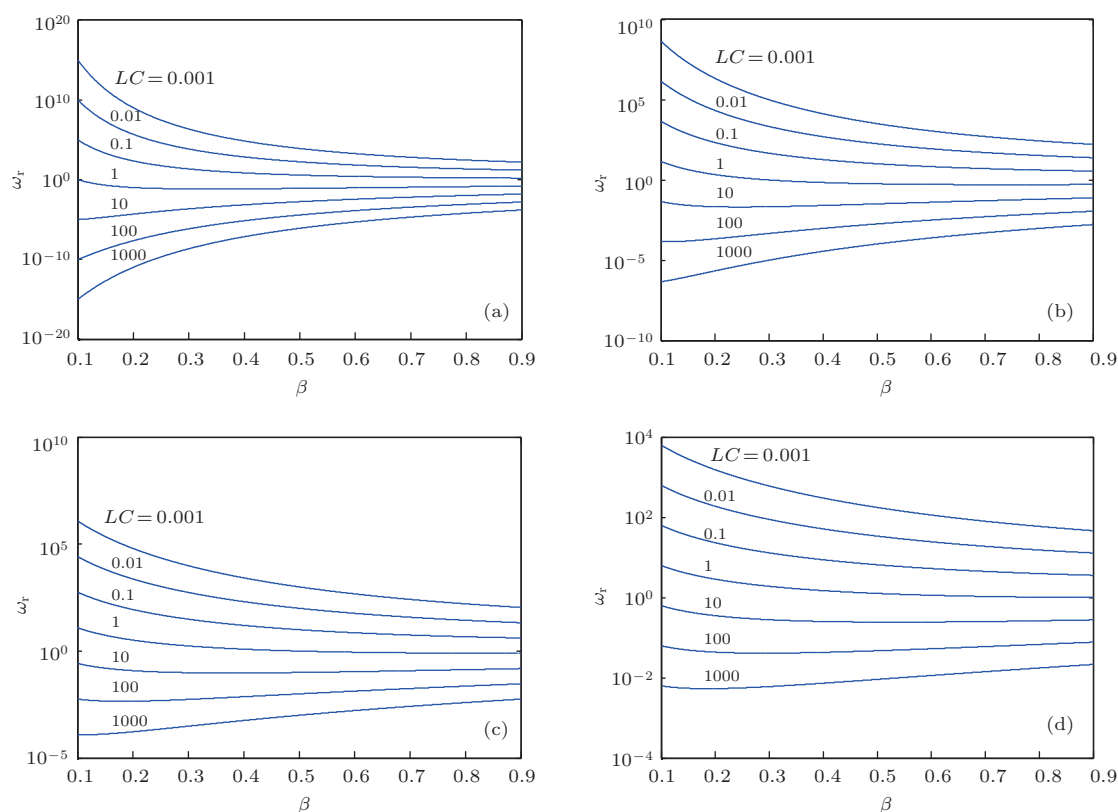


图 8 分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路的谐振频率随分数阶阶次 β 变化图 (a) $\alpha = 0.1$; (b) $\alpha = 0.3$; (c) $\alpha = 0.5$; (d) $\alpha = 0.9$

表 1 当 $LC = 10^{-8}$, 不同分数阶阶次所对应的谐振频率值

β, α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	1.00×10^{40}	4.80×10^{25}	6.97×10^{18}	7.1×10^{14}	2×10^{12}	2.6×10^{10}	1.1×10^9	1×10^8	2×10^7	3×10^6
0.2	4.49×10^{27}	1.00×10^{20}	4.63×10^{15}	7.4×10^{12}	8×10^{10}	3×10^9	2.4×10^8	3×10^7	7×10^6	2×10^6
0.3	1.43×10^{21}	2.16×10^{16}	2.15×10^{13}	1.9×10^{11}	6×10^9	4.1×10^8	5.1×10^7	1×10^7	2×10^6	8×10^5
0.4	1.41×10^{17}	6.29×10^{13}	3.88×10^{11}	1×10^{10}	6×10^8	7.3×10^7	1.3×10^7	3×10^6	1×10^6	4×10^5
0.5	2.662×10^{14}	8.75×10^{11}	1.74×10^{10}	9.5×10^8	1×10^8	1.7×10^7	3828278	1×10^6	4×10^5	2×10^5
0.6	2.806×10^{12}	3.33×10^{10}	1.47×10^9	1.4×10^8	2×10^7	4641589	1323115	461432	2×10^5	87594
0.7	8.799×10^{10}	2.51×10^9	1.96×10^8	2.7×10^7	6×10^6	1534952	517947	206276	93764	47468
0.8	5.753×10^9	3.08×10^8	36702066	6931433	2×10^6	581384	225018	100000	49685	27061
0.9	631375151	53887582	8871103	2124378	657587	246098	106650	51944	27826	16132
1.0	101193432	12350410	2616112	757059	271442	114163	54370.6	28612	16344	10000

类似地, 还可画出谐振频率随电感分数阶阶次 α 变化曲线, 如图 9 所示.

为了更好地展示谐振频率随分数阶阶次变化规律, 将图 8 和图 9 局部放大, 得到图 10.

对比图 8 各图可知, 随电感的分数阶阶次 α 增大, 在同一 LC 值下的谐振频率起始值逐渐降低. 对于任一图, 随着 LC 值增大, 谐振频率的值减小. 类似地, 由图 9 中可知, 随电容的分数阶阶次 β 增

大, 在同一 LC 值下的谐振频率起始值逐渐降低. 尽管图 8 和图 9 展示的谐振频率随分数阶阶次变化是单调的, 其实则不然, 通过图 10 的局部放大图可以很好地说明其非单调性.

为了更精确和量化地展示谐振频率随分数阶阶次变化规律, 选取 LC 一特定值, 即 $LC = 10^{-8}$, 给出表 1 所示谐振频率值.

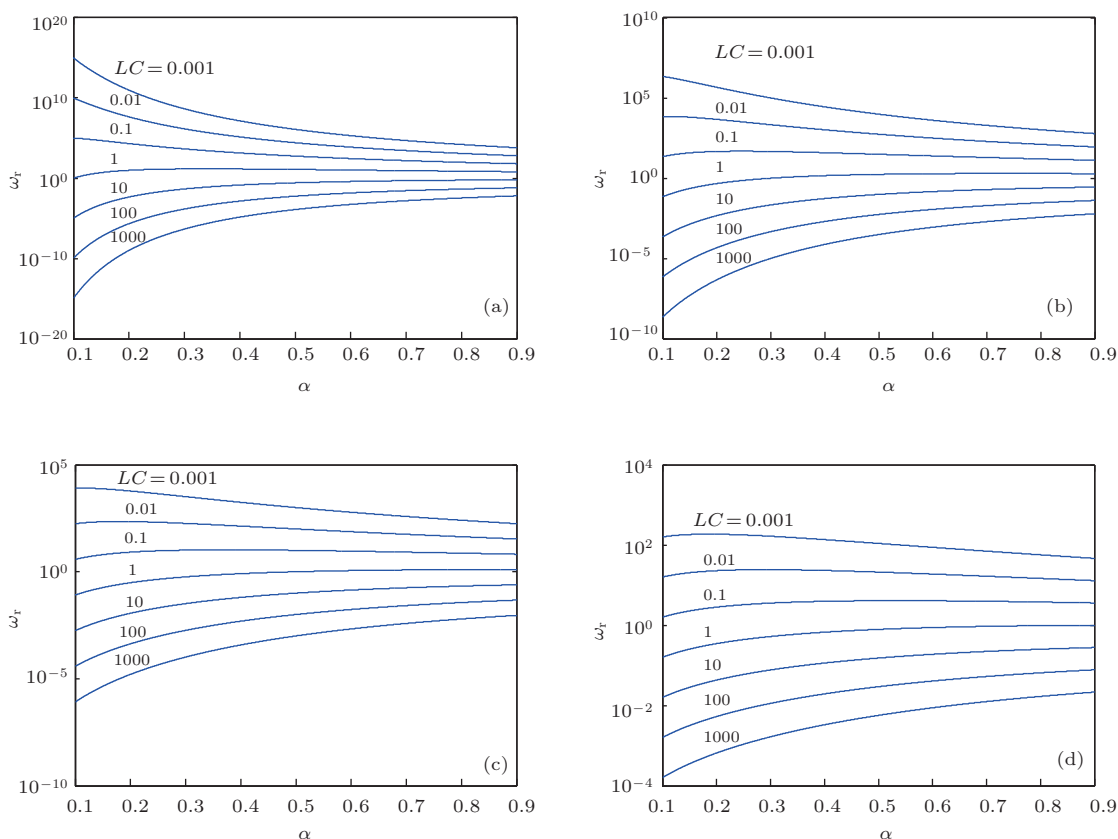


图 9 分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路的谐振频率随分数阶阶次 α 变化图 (a) $\beta = 0.1$; (b) $\beta = 0.3$; (c) $\beta = 0.5$; (d) $\beta = 0.9$

分析表 1 可知, 给定 β 值时, 谐振频率随 α 的增大而减小; 类似地, 给定 α 值, 谐振频率随 β 的增大而减小.

6 灵敏度分析

6.1 导纳

将 (3) 式对 α 求偏导, 得

$$\begin{aligned} \frac{R}{L} \times & \left(RC\omega^{\alpha+\beta} \left(2 \cos \left(\frac{\pi(\alpha+\beta)}{2} \right) \ln \omega \right. \right. \\ & - \pi \sin \left(\frac{\pi(\alpha+\beta)}{2} \right) + 2 \frac{L}{R} \omega^\beta \cos \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) \ln \omega \\ & \left. \left. - \pi \frac{L}{R} \omega^\beta \sin \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) + 2LC\omega^{\alpha+\beta} \ln \omega \right) \right) \end{aligned}$$

$$= 0. \quad (12)$$

据 (12) 式, 绘制图 12 和图 13.

由图 11(a) 易知, 随着分数阶阶次 β 增大, 分数阶阶次 α 的最高值点有减小趋势, 最大值有增大趋势, 且频率 ω 取值范围减小. 从图 11(b) 可知, 随 $RC = L/R$ 增大, 分数阶阶次 α 最高值点先减小再增大, 且频率 ω 取值范围减小.

由图 12(a) 可知, 随频率 ω 增大, 导纳最大值一直减小, 只是起初减速快, 而后减速慢, 而导纳最小值则是先减小后增大, 其转折点在频率 $\omega = 10$ 附近. 几条曲线比较, 随分数阶阶次 β 增大, 曲线下移, 且频率 ω 取值范围减小.

将(3)式对 β 求偏导, 得

$$-\left(\frac{R}{L\omega^\beta}\right)^2 \times \left(2\ln\omega + 2\frac{L}{R}\omega^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\ln\omega\right. \\ \left.+ \pi\frac{L}{R}\omega^\beta \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) + 2RC\frac{L}{R}\omega^{\alpha+\beta}\right)$$

$$\times \cos\left(\frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}\right)\ln\omega \\ + \pi LC\omega^{\alpha+\beta} \sin\left(\frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}\right) = 0. \quad (13)$$

所以, 根据(13)式, 可绘出图13和图14.

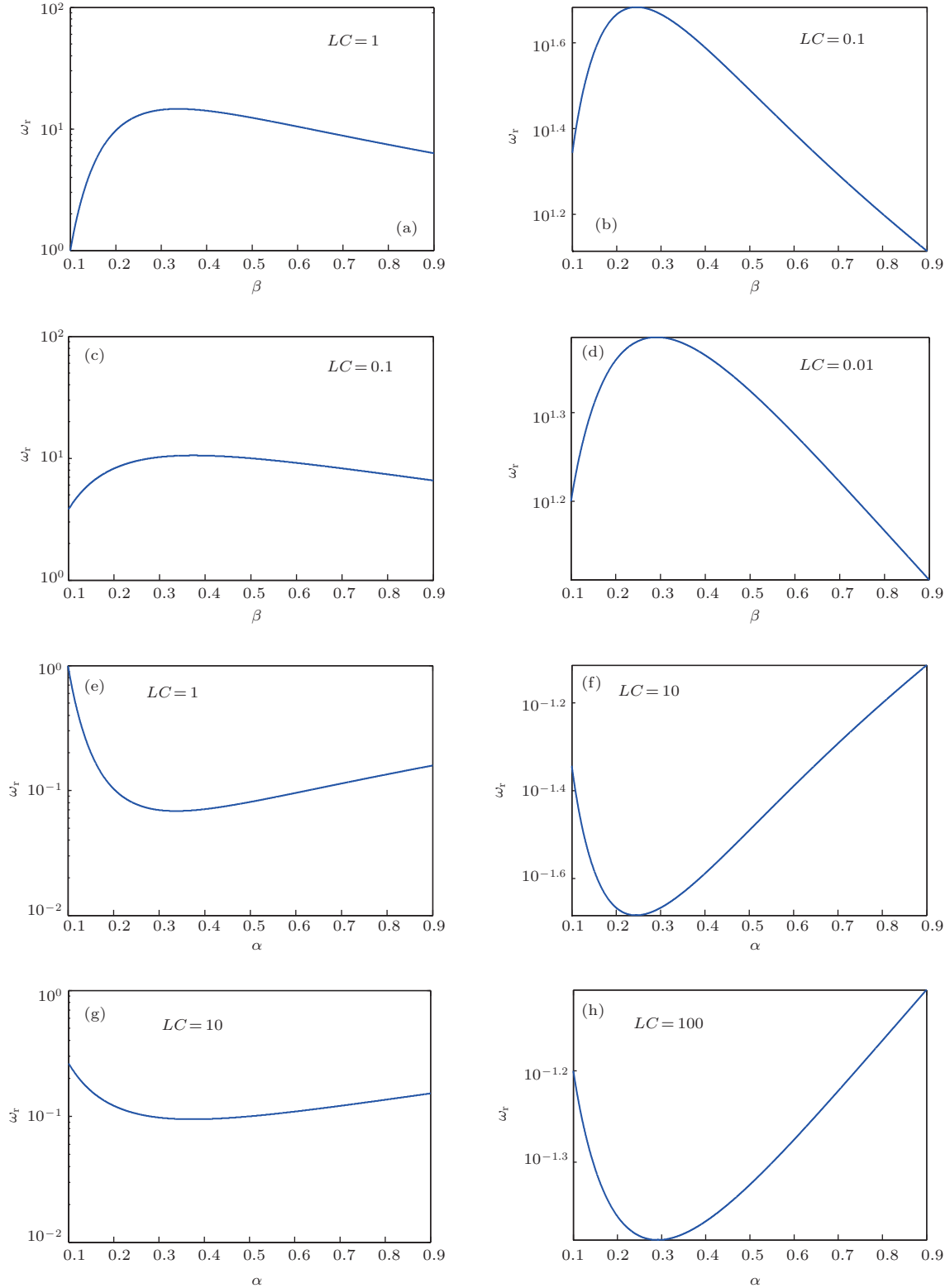
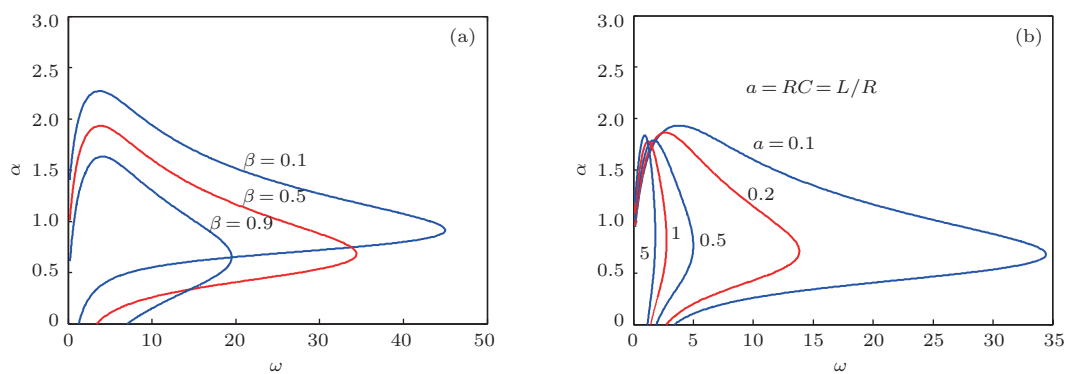
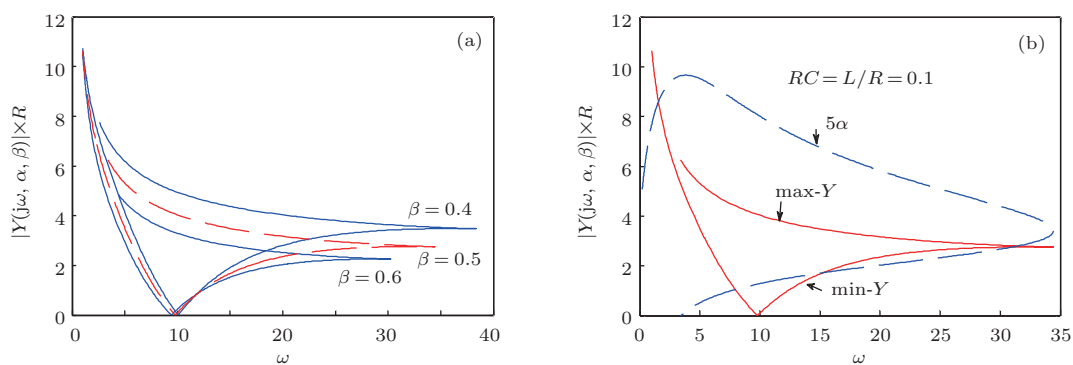
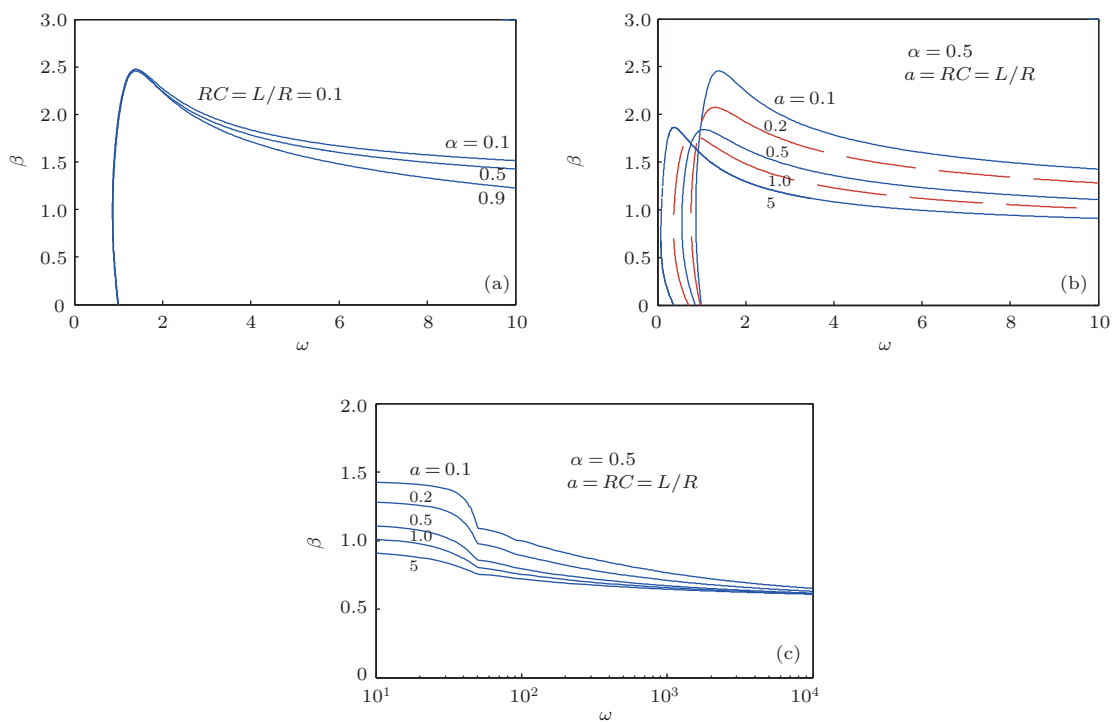
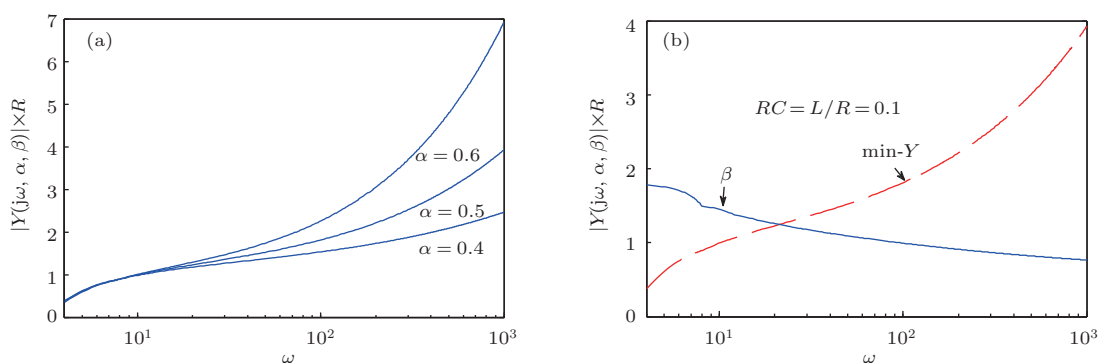


图10 分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路的谐振频率随分数阶次变化的局部放大图 (a) $\alpha = 0.1$; (b) $\alpha = 0.3$; (c) $\alpha = 0.5$; (d) $\alpha = 0.9$; (e) $\beta = 0.1$; (f) $\beta = 0.3$; (g) $\beta = 0.5$; (h) $\beta = 0.9$


 图 11 频率 ω 对分数阶阶次 α 的影响分析 (a) $RC = L/R = 0.1$; (b) $\beta = 0.5$;

 图 12 频率 ω 对导纳的影响分析 (a) $RC = L/R = 0.1$; (b) $\beta = 0.5$

 图 13 参数 ω 对 β 影响的分析 (a) $RC = L/R = 0.1$; (b) $\alpha = 0.5$, $0 < \omega < 10$; (c) $\alpha = 0.5$, $\omega > 10$


 图 14 频率 ω 对导纳电阻之积的影响分析图 (a) $RC = L/R = 0.1$; (b) $\alpha = 0.5$

由图 13(a) 知, 曲线最高点不随分数阶阶次 α 的变化而变化, 但过了最大值后, 曲线随 ω 的增大而减小, 且随 α 增大而下移. 图 13(b) 中显示, 随 $RC = L/R$ 增大, 曲线最高点先减小后增大, 过了最大值点后, 各条曲线随 $RC = L/R$ 增大而减小. 图 13(c) 则展示了分数阶阶次 β 随频率 ω 增大一直减小, 并趋于同一值, 且在几乎相同频率 ω 处有一个明显骤降. 分析 (13) 式易知, 因为公式中 $\ln \omega$ 在那时趋近最大值.

由图 14(a) 可知, 导纳最小值随频率 ω 增大而增大; 在高频率时随分数阶阶次 α 增大而增大; 在低频率时, 分数阶阶次 α 对导纳最小值影响不大. 整体分析图 14, 导纳最小值随分数阶阶次 β 减小而增大.

6.2 相 位

(4) 式对分数阶阶次 α 求偏导可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) + \frac{L}{R}\omega^\beta + LC\omega^{\alpha+\beta} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right)^2} \\ & \times \left[\frac{1}{2} \times LC\omega^{\alpha+\beta} \times \left(2 \ln \omega \sin\left(\frac{\pi(\alpha+\beta)}{2}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \pi \cos\left(\frac{\pi(\alpha+\beta)}{2}\right) + \pi LC\omega^{\alpha+\beta} \right) + \frac{1}{2} LC\omega^{\alpha+2\beta} \right. \\ & \left. \times \left(2 \frac{L}{R} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \ln \omega + \pi \frac{L}{R} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

由 (14) 式可得图 15.

观察图 15(a) 可知, α 的较大值随 ω 增大先增大后减小, 较小值则随 ω 增大单调增大, 且曲线最高点随 β 增大而下移, ω 的范围随 β 增大而减小.

图 15(b) 中, 当 $\beta = 0.5$ 时, 对相位求得 α 和 ω 关系图. α 的较大值随 ω 增加先增大后减小,

较小值则随 ω 增大单调增大. 曲线最大值点随 $RC = L/R$ 增大而下移, ω 的范围随 $RC = L/R$ 增大而减小.

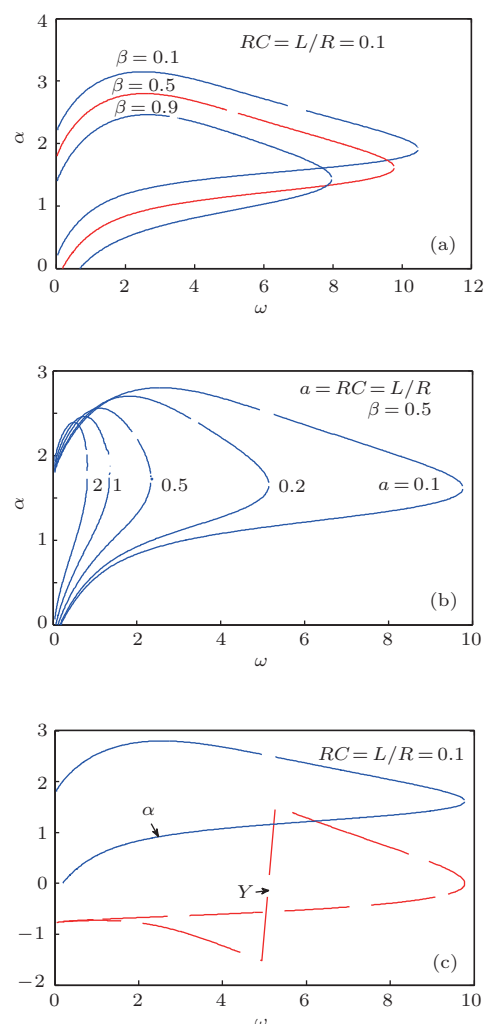

 图 15 参数 ω 对 α 和相位影响分析图 (a) $RC = L/R = 0.1$; (b) $\beta = 0.5$; (c) α 与导纳变化的对比

图 16(c) 红线为当 $\beta = 0.5$, $RC = L/R = 0.1$, 导纳随 ω 变化. 蓝线由上图 16(b) 得到. 可观察到

在蓝线缺口处红线有一突变.

(4) 式对分数阶阶次 β 求偏导得

$$\frac{1}{\left(\frac{L}{R} + \frac{1}{\omega^\beta} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) + \omega^\alpha LC \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)^2} \times \left[-\left(\frac{1}{2\omega^\beta} \times \left(\frac{\pi}{\omega^\beta} - 2\frac{L}{R} \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \ln \omega\right) + \pi \frac{L}{R} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\right) - \frac{1}{2\omega^\beta} \omega^\alpha RC \left(2\frac{L}{R} \ln \omega + \sin\left(\frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}\right) - \pi \frac{L}{R} \cos\left(\frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}\right)\right) \right] = 0. \quad (15)$$

由 (15) 式可以得到图 16.

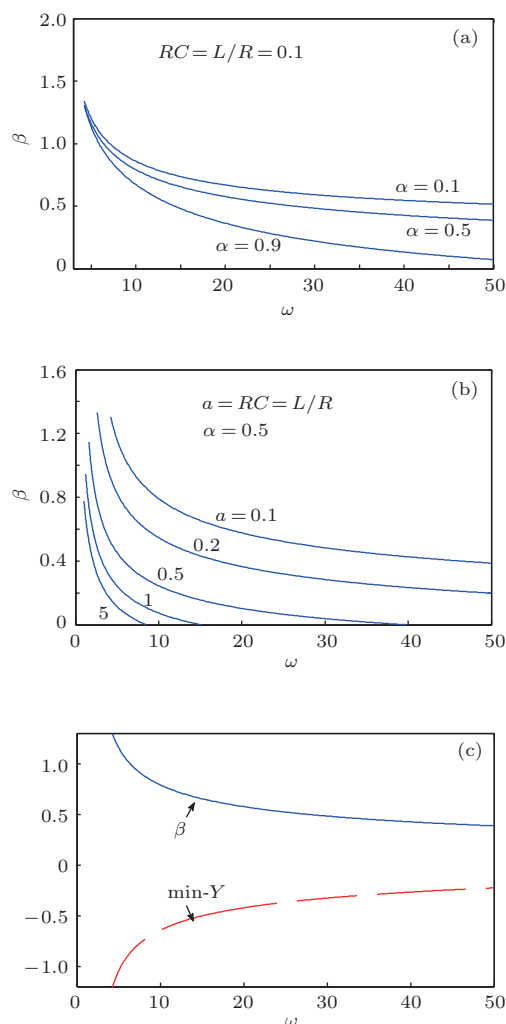


图 16 参数 ω 对 β 和相位影响分析 (a) $RC = L/R = 0.1$; (b) $\alpha = 0.5$; (c) β 与导纳变化的对比

图 16(a) 中, 当 $RC = L/R = 0.1$ 时, 相位对 β 求导, 得 β 与 ω 关系图. β 随 ω 增加而减小, 且曲线随 α 增大而下移.

图 16(b) 为当 $\alpha = 0.5$ 时, 相位对 β 求导得 β 与 ω 关系图. β 随 ω 增加而减小, 且曲线随 RC 和 L/R 增大而下移.

图 16(c) 蓝线由图 16(b) 得到, 红线是当 $\alpha = 0.5$ 和 $RC = L/R = 0.1$ 时, 最小导纳随 ω 变化曲线. 可观察相位最小值随 β 减小而增大, 且有相同拐点.

7 结 论

作为非线性电路一个典型单元电路的并联 RLC 电路, 本文尝试将其拓展到分数阶领域, 即系统地研究分数阶 $RL_\alpha C_\beta$ 并联电路的基本特性和规律, 丰富非线性电路理论, 也为推进分数阶 $RL_\alpha C_\beta$ 并联电路的工业应用奠定坚实的理论基础. 具体的研究内容包括:

1. 研究了导纳随着频率、电路参数和分数阶阶次的变化规律;
2. 研究了相位随着频率、电路参数和分数阶阶次的变化规律;
3. 分析了纯虚导纳的现象, 分别将分数阶 $RL_\alpha C_\beta$ 并联电路等效为电容和电感两种情况;
4. 分析了电路参数和分数阶阶次对谐振频率的影响;
5. 分析了分数阶阶次与其他电路参数和频率之间的参数敏感性分析.

参考文献

- [1] Pang X, Liu C X 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 150504 (in Chinese)[庞霞, 刘崇新 2013 物理学报 **62** 150504]
- [2] Jia H Y, Chen Z Q, Xue W 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 140503 (in Chinese)[贾红艳, 陈增强, 薛薇 2013 物理学报 **62** 140503]
- [3] Li X, Zhang Z D, Bi Q S 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 220502 (in Chinese)[李旭, 张正娣, 毕勤胜 2013 物理学报 **62** 220502]
- [4] Chen D Y, Wu C, Iu H H C, Ma X Y 2013 *Nonlinear Dynam.* **73** 1671
- [5] Wang F Q, Ma X K 2013 *Chin Phys. B* **22** 030506
- [6] Zhang X, Bao B C, Wang J P, Ma Z H, Xu J P 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160503 (in Chinese)[张希, 包伯成, 王金平, 马正华, 许建平 2012 物理学报 **61** 160503]
- [7] Wu X L, Xiao G C, Lei B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 050503 (in Chinese)[吴旋律, 肖国春, 雷博 2013 物理学报 **62** 050503]
- [8] Liang Y, Yu D S, Chen H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 158501 (in Chinese)[梁燕, 于东升, 陈昊 2013 物理学报 **62** 158501]

- [9] Wen S P, Zeng Z G, Huang T W, Chen Y R 2013 *Phys. Lett. A* **377** 34
- [10] Ahamed A I, Lakshmanan M 2013 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **23** 1350098
- [11] Sheng Y J, Yang S P, Xing H J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 150503 (in Chinese)[申永军, 杨绍普, 邢海军 2012 物理学报 **61** 150503]
- [12] Li C P, Chen Y Q, Kurths J 2013 *Philos. T. Roy. Soc. A* **371** 20130037
- [13] Chen W, Zhang J J, Zhang J Y 2013 *Fract. Calc. Appl. Anal.* **16** 76
- [14] Li L X, Peng H P, Luo Q, Yang Y X, Liu Z 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 020502 (in Chinese)[李丽香, 彭海朋, 罗群, 杨义先, 刘喆 2013 物理学报 **62** 020502]
- [15] Chen D Y, Zhang R F, Sprott J C, Chen H T, Ma X Y 2012 *Chaos* **22** 023130
- [16] Sakthivel R, Ganesh R, Ren Y, Anthoni S M 2013 *Commun. Nonlinear Sci.* **18** 3498
- [17] Huang J F, Liu R Y, Lai W C, Shin C W, Hsu C M 2012 *Chin. Phys. B* **21** 084210
- [18] Wang Z, Huang X, Li Y X, Song X N 2013 *Chin. Phys. B* **22** 010504
- [19] Nagahara M, Yamamoto Y 2013 *IEEE T. Signal Proces.* **61** 4473
- [20] Radwan A G, Salama K N 2012 *Circ. Syst. Signal Pr.* **31** 1901
- [21] Galvao R K H, Hadjiloucas S, Kienitz K H, Paiva H M 2013 *IEEE T. Circuits-I* **60** 624

Fractional-order multiple $RL_{\alpha}C_{\beta}$ circuit^{*}

Diao Li-Jie Zhang Xiao-Fei Chen Di-Yi[†]

(Department of Electrical Engineering, Northwest A & F University University, Yangling 712100, China)

(Received 14 October 2013; revised manuscript received 21 October 2013)

Abstract

Since the RLC circuit is a basic circuit, attention is directed to the generalization of the fundamentals of fractional multiple $RL_{\alpha}C_{\beta}$ circuit. Compared with the conventional multiple RLC circuit, the effects of fractional orders, α and β , is the key factor for extra freedom, more flexibility and novelty. First, we study the basic features including the admittance and phase. Then, the conditions for fractional-order multiple $RL_{\alpha}C_{\beta}$ circuit to act as pure imaginary impedances are derived, which are unrealizable in the conventional case. As a peculiar phenomenon—resonance, the relationships among resonance frequency, fractional order and LC are studied in detail. In addition, sensitivity analysis including some interesting rules is illustrated. Finally, numerical simulations are carried out to validate the above studies.

Keywords: fractional circuit, multiple RLC circuit, pure imaginary impedances, sensitivity analysis

PACS: 84.30.Bv, 45.10.Hj

DOI: 10.7498/aps.63.038401

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50879072), the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2011BAD29B08), the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant No. Z109021310), and the National Innovative Experimental Project for College Students.

† Corresponding author. E-mail: diyichen@nwsuaf.edu.cn