

对称分类在非线性偏微分方程组边值问题中的应用*

苏道毕力格[†] 王晓民 乌云莫日根

(内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特 010051)

(2013年8月31日收到; 2013年11月3日收到修改稿)

研究了微分方程对称分类在非线性偏微分方程组边值问题中的应用. 首先, 利用偏微分方程(组)完全对称分类微分特征列集算法确定了给定非线性偏微分方程组边值问题的完全对称分类; 其次, 利用一个扩充对称将非线性偏微分方程组边值问题约化为常微分方程组初值问题; 最后, 利用龙格-库塔法求解了常微分方程组初值问题的数值解.

关键词: 对称分类, 微分特征列集算法, 偏微分方程组边值问题

PACS: 02.30.Jr, 02.20.-a, 11.30.-j, 02.60.Lj

DOI: 10.7498/aps.63.040201

1 引言

1873年, 挪威数学家Lie^[1]为了统一和扩充求解常微分方程的各类方法, 首次提出了(偏)微分方程(组)(PDEs)的对称理论. 所谓对称是指作用于自变量和因变量空间上使PDEs不变的单参数连续变换群. 20世纪初, Lie群理论开始受到重视, 国内外研究者研究发展了对称理论, 提出了Lie-Bäcklund变换、条件对称、强对称、Lie代数结构、Clarkson-Kruskal直接法、条件相似约化及同伦近似对称约化法^[2-9]等. 研究者还提出微分方程有对称相应的可积性和Hamilton结构, 而且, 对称与Bäcklund变换, Darboux变换, Painlevé分析也有密切联系^[10-13]. 特别地, 文献^[12, 13]中给出了用对称方法产生具有刘维尔可积性、双哈密顿结构的方程族及各类精确解的方法. 目前PDEs对称理论和方法的研究在现代数学、物理和力学等学科中有重要的理论和实际意义, 并且已有了广泛的应用^[14, 15]. 但是除了在文献^[14, 16, 17]中研究者做了一些对称群在边值问题上的应用研究以外, 这方

面的研究还很少, 所以用对称群研究PDEs边值问题是对称理论应用的新研究领域.

Lie算法是确定对称的主要方法, 该算法将确定对称的问题转化为确定对应无穷小向量的问题, 而该无穷小向量是由满足所谓确定方程组(DTEs)的无穷小生成函数确定. 完成这个过程将涉及大量、复杂的机械化计算, 并且传统的Lie算法中未能考虑未知量的序关系, 导致计算机上的无穷循环及工作量大等许多困难. 研究发现, 微分形式的吴方法是有效克服Lie算法缺陷的方法之一. 所以特木尔朝鲁^[18]推广建立的吴-微分特征列集算法部分解决了上述Lie算法存在的困难. 该算法主要考虑控制计算过程中符号堆积及易于在机器上实现的问题, 并已成功地在PDEs的古典对称、非古典对称、高阶对称、近似对称、势对称和守恒律等问题上, 促进了PDEs对称理论的研究^[18-27]. 最近我们基于吴-微分特征列集算法研究了对称方法在非线性的PDEs边值问题中的应用^[28], 并且将对称方法和同伦分析方法进行结合解决了边值问题^[29]. 也有研究者基于吴-微分特征列集算法, 将对称方法与变分迭代法和同伦摄动法结合, 求解了PDEs

* 国家自然科学基金(批准号: 11071159, 11261034)和内蒙古自治区高等学校科学技术研究项目(批准号: NJZY12056)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: inmathematica@126.com

边值问题 [30–32].

对称分类问题是对称方法中具有挑战性的问题之一. 作为吴方法在微分领域中一个新的应用, 特木尔朝鲁 [33–35] 提出了偏微分方程完全对称分类微分特征列集算法, 用该理论克服了在传统 Lie 算法中存在的缺陷, 使确定和分类对称更系统和直接, 从而扩大了对称方法的应用范围 [33–36]. 本文中, 我们首次将该算法应用于非线性 PDEs 边值问题, 确定其完全对称分类, 并将其约化为常微分方程组 (ODEs) 初值问题, 再求解初值问题的数值解. 这也是基于吴-微分特征列集算法, 有效结合对称方法与数值方法求解边值问题的一项新研究.

2 基本公式、概念和计算步骤

2.1 PDEs 边值问题的不变性公式

考虑具有 $N(N > 1)$ 个 $k(k \geq 2)$ 阶偏微分方程组成的边值问题

$$F^\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 个自变量, $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$ 是 m 个因变量, 且可以写为以下可解形式

$$F^\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) = u_{i_1, i_2, \dots, i_l} - f^\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) = 0, \quad (2)$$

其中 $f^\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u)$ 不显式地依赖于 u_{i_1, i_2, \dots, i_l} , 其定义在 x 空间 ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$) 上的领域 Ω_x 内, 且边界条件为

$$B_\alpha^\nu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^{k-1} u) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, m), \quad (3)$$

规定在边界曲面

$$\omega_\alpha(x) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (4)$$

假设边值问题 (2)–(4) 具有惟一解. 考虑 (2)–(4) 式的对称对应的无穷小向量为

$$X = \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\nu(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\nu} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, m). \quad (5)$$

定理 1 边值问题 (2)–(4) 拥有 (5) 形式的点对称 X , 当且仅当

$$I) X^{(k)} F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) = 0,$$

$$\text{当 } F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) = 0; \quad (6)$$

$$\text{II) } X\omega_\alpha(x) = 0,$$

$$\text{当 } \omega_\alpha(x) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s); \quad (7)$$

$$\text{III) } X^{(k-1)} B_\alpha^\nu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^{k-1} u) = 0,$$

$$\text{当 } B_\alpha^\nu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^{k-1} u) = 0,$$

$$\omega_\alpha(x) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (8)$$

其中 $X^{(k)}$ 是对称 (5) 的 $k(k \geq 1)$ 阶延拓的无穷小向量, 并且

$$X^{(k)} = \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\nu(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\nu} + \eta_i^{(1)\nu}(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u_i^\nu} + \dots + \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\nu}(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) \times \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\nu}, \quad (9)$$

$$u_i^\nu = \frac{\partial u^\nu}{\partial x_i}, \quad \eta_i^{(1)\nu} = D_i \eta^\nu - (D_i \xi_j) u_j^\nu,$$

$$\eta_{i_1 i_2 \dots i_t}^{(t)\nu} = D_{i_t} \eta_{i_1 i_2 \dots i_{t-1}}^{(t-1)\nu} - (D_{i_t} \xi_j)_{i_1 i_2 \dots i_{t-1} j}^\nu, \quad (10)$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu} + u_{ij}^\nu \frac{\partial}{\partial u_j^\nu} + \dots$$

$$+ u_{i_1 i_2 \dots i_n}^\nu \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_n}^\nu} + \dots, \quad (11)$$

且 $i = 1, 2, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, m; i_\ell = 1, 2, \dots, n; \ell = 1, 2, \dots, t, t \geq 2$.

2.2 对称分类

考虑一个含参数 θ 的 PDEs:

$$\Delta(\theta; x, u) = 0, \quad (12)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n (n \geq 1)$ 是自变量, $u = u(x) \in \mathbb{R}^m (m \geq 1)$ 为因变量. 设 G_θ 为当 θ 取遍其定义域时方程 (12) 所允许的全部对称, 称为方程 (12) 的整体对称. 确定所有参数 θ 和其对应的整体对称 G_θ 的问题称为该含参数 PDEs 的对称分类问题. 如果分类是穷尽的, 则称之为完全对称分类问题. 对所有的参数 θ , 方程 (12) 拥有的对称称为方程 (12) 的主对称, 记为 G_0 . 这样对某参数值 $\tilde{\theta}$, 作为对称变换集合有 $G_0 \subseteq G_{\tilde{\theta}}$. 当对某一个参数值 $\theta = \tilde{\theta}$ 有 $G_{\tilde{\theta}} \neq G_0$ 时, 称 $G_{\tilde{\theta}}$ 为 G_0 的一个扩充对称 [33].

对称分类问题不仅有其理论意义, 而且也有很强的实际意义. 许多描述数学物理问题的 PDEs 都含有实验和经验不易确定的参数, 而实际问题要求在一定条件 (如对称存在) 下确定这些参数和方程的解. 一般这些参数都以表格和图形形式出现. 在

描述问题的连续方程中它们扮演着任意参数的角色, 所以利用对称分类解决非线性 PDEs 边值问题时, 我们可以根据不同的参数, 确定不同的对称, 并利用这些对称对所研究的边值问题进行不同的约化.

2.3 计算步骤

下面简单描述一下利用对称分类求解边值问题的计算步骤.

第一步, 确定 PDEs 边值问题 (2)—(4) 的完全对称分类.

1) 产生含参数 θ 的确定方程组; 2) 确定主对称; 3) 确定扩充对称.

第二步, 约化边值问题.

利用第一步得到的对称求 PDEs 边值问题 (2)—(4) 式的不变量, 并且将其约化为 ODEs 初值问题. 这一步的计算使用不变量法或直接代入法, 并且在进行第三步计算之前, 可选择适当的对称参数简化 ODEs 初值问题.

第三步, 计算初值问题的数值解或精确解.

利用数值方法或精确解方法求解 ODEs 初值问题.

3 对称分类在非线性 PDEs 边值问题中的应用

我们考虑的边值问题的控制方程^[16]为

$$u_x + v_y = 0, \tag{13}$$

$$uu_x + vv_y = u_{yy} + S(x)w, \tag{14}$$

$$u \left[w_x + w \frac{d \ln(S(x))}{dx} \right] + vw_y = \frac{1}{Pr} w_{yy}, \tag{15}$$

边界条件为

$$v(x, 0) = B_1(x), u(x, 0) = B_2(x), u_y(x, 0)$$

$$= B_3(x), u(x, \infty) = 0, \tag{16}$$

$$w(x, 0) = B_4(x), w_y(x, 0) = B_5(x), w(x, \infty) = 0, \tag{17}$$

其中函数 $B_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), 在后面根据边界条件在对称作用下的不变性来确定.

首先我们定义一个流函数 ψ :

$$u = \psi_y, v = -\psi_x, \tag{18}$$

那么方程 (13) 自然满足, 故控制方程可写成

$$\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = \psi_{yyy} + S(x)w, \tag{19}$$

$$\psi_y \left[w_x + w \frac{d \ln(S(x))}{dx} \right] - \psi_x w_y = \frac{1}{Pr} w_{yy}, \tag{20}$$

相应的边界条件成为

$$\begin{aligned} \psi_x(x, 0) &= -B_1(x), \psi_y(x, 0) = B_2(x), \psi_{yy}(x, 0) \\ &= B_3(x); \psi_y(x, \infty) = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= B_4(x), w_y(x, 0) = B_5(x), \\ w(x, \infty) &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

第一步, 确定 PDEs 边值问题 (19)—(22) 的完全对称分类.

假设非线性 PDEs (19), (20) 的对称对应的无穷小向量为

$$\begin{aligned} X &= \xi(x, y, \psi, w) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, y, \psi, w) \frac{\partial}{\partial y} \\ &+ \eta(x, y, \psi, w) \frac{\partial}{\partial \psi} + \varphi(x, y, \psi, w) \frac{\partial}{\partial w}, \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $\xi(x, y, \psi, w), \tau(x, y, \psi, w), \eta(x, y, \psi, w), \varphi(x, y, \psi, w)$ 称为该对称的无穷小生成函数.

1) 产生含参数 $S(x)$ 的确定方程组

根据 Lie 算法, 利用产生 DTEs 的算法^[35] 可得到方程组 (19), (20) 的对称的 DTEs, 即由微分多项式系统 DPS 组成的方程组 $DPS = 0$:

$$DPS = \left\{ \begin{aligned} &\xi_y, \xi_\psi, \xi_w, \tau_{yy}, \tau_{xy}, \tau_\psi, \tau_w, \eta_x, \eta_y, \eta_{\psi\psi}, \eta_w, \varphi_y, \varphi_\psi, \varphi_{ww}, \\ &\eta_\psi - \xi_x + \tau_y, \varphi_w - 2\tau_y, (w\eta_\psi - \varphi - 3w\tau_y)S(x) - w\xi S'(x), \\ &\varphi_x S^2(x) + (\varphi + w\eta_\psi - w\tau_y)S(x)S'(x) - w\xi S^2(x) + w\xi S(x)S''(x) \end{aligned} \right\} = 0. \tag{24}$$

2) 确定主对称

若令 $S(x)$ 为任意函数, 则把确定方程组 $DPS = 0$ 进一步分解, 得 $DCS_0 = 0$, 其中

$$DCS_0 = \left\{ \begin{aligned} &\xi, \tau_{yy}, \tau_{xy}, \tau_\psi, \tau_w, \eta_x, \eta_y, \eta_{\psi\psi}, \eta_w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_\psi, \varphi_{ww}, \\ &\eta_\psi + \tau_y, \varphi_w - 2\tau_y, w\eta_\psi - \varphi - 3w\tau_y, \varphi + w\eta_\psi - w\tau_y \end{aligned} \right\} = 0. \tag{25}$$

求解方程组 (25), 可得到其零点集 zero(DCS₀), 也就是得到了主对称的无穷小生成函数

$$\xi = 0, \tau = \tau(x), \eta = c, \varphi = 0, \quad (26)$$

其中 c 为任意常数, $\tau(x)$ 为 x 的任意函数. 将 (26) 式代入 (23) 式, 得到主对称

$$X_0 = \tau(x) \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial \psi}. \quad (27)$$

3) 确定扩充对称

在基本序 $x \prec y \prec \psi \prec w$ 下, 根据确定含参数 PDEs 的完全对称分类微分特征列集算法 [33-35], 获得如下零点分解

$$\text{zero(DPS)} = \text{zero(DCS}_1/I) \cup \text{zero(DCS}_2, I),$$

其中

$$\text{DCS}_1 = \{\eta_w, \eta_\psi, \eta_y, \eta_x, \varphi, \xi, \tau_w, \tau_\psi, \tau_y\},$$

$$\text{DCS}_2 = \{\eta_w, \eta_y, \eta_x, \xi_w, \xi_\psi, \xi_y, \tau_w, \tau_\psi, 6\tau_y S'(x)$$

$$+ \xi S''(x), \xi_x S(x) S'(x)$$

$$- \xi S'^2(x) + \xi S(x) S''(x),$$

$$6\eta_\psi S(x) S'(x) - 6\xi S'^2(x)$$

$$+ 5\xi S(x) S''(x), 3\varphi S'(x) + w\xi S''(x)\},$$

$$I = S'^2(x) S''(x) - 2S(x) S''^2(x)$$

$$+ S(x) S'(x) S^{(3)}(x).$$

我们很容易得到 zero(DCS₀) = zero(DCS₁/I). 而求解分类方程 $I = 0$, 可得到

$$\text{zero}(I) = \{S(x) = e^x, x^n (n \neq 0)\}.$$

参数 $S(x)$ 对应的特征列集如表 1 所示.

表 1 特征列集

$S(x)$	特征列集
e^x	DCS ₂
x^n	DCS ₂

所以根据参数 $S(x)$ 的不同, 求解 zero(DCS₂, I), 得到如下分类结果.

1) 当 $S(x) = e^x$ 时, 有

$$X_1 = a \frac{\partial}{\partial x} + \left[f(x) - \frac{ay}{6} \right] \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{a\psi}{6} + b \right) \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{aw}{3} \frac{\partial}{\partial w}. \quad (28)$$

2) 当 $S(x) = x^n, n \neq 0$ 时, 有

$$X_2 = ax \frac{\partial}{\partial x} + \left[f(x) + \frac{ay}{6}(1-n) \right] \frac{\partial}{\partial y} + \left[\frac{a\psi}{6}(5+n) + b \right] \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{aw}{3}(1-n) \frac{\partial}{\partial w}, \quad (29)$$

其中 a, b 为任意常数, $f(x)$ 为任意函数. 最终分类结果如表 2 所示.

表 2 无穷小向量

$S(x)$	无穷小向量
\forall	$\tau(x) \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial \psi}$
e^x	$a \frac{\partial}{\partial x} + \left[f(x) - \frac{ay}{6} \right] \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{a\psi}{6} + b \right) \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{aw}{3} \frac{\partial}{\partial w}$
x^n	$ax \frac{\partial}{\partial x} + \left[f(x) + \frac{ay}{6}(1-n) \right] \frac{\partial}{\partial y} + \left[\frac{a\psi}{6}(5+n) + b \right] \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{aw}{3}(1-n) \frac{\partial}{\partial w}, (n \neq 0)$

第二步, 约化边值问题.

下面我们利用第一个扩充对称 (28) 式来约化边值问题 (19)–(22). 对称 (28) 式的特征方程为

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{f(x) - \frac{ay}{6}} = \frac{d\psi}{\frac{a\psi}{6} + b} = \frac{dw}{-\frac{aw}{3}}. \quad (30)$$

由式子 $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{f(x) - \frac{ay}{6}}$, 可以得到不变量

$$\zeta = ye^{\frac{x}{6}} + F(x), \quad (31)$$

其中 $F(x)$ 为由 $f(x)$ 表示的函数. 同理可以从特征

方程得到

$$\psi = -\frac{6b}{a} + e^{\frac{x}{6}} s(\zeta), \quad w = e^{-\frac{x}{3}} g(\zeta), \quad (32)$$

将 (32) 式代入方程组 (19), (20), 便可得到 ODEs

$$\begin{cases} 6g - 2s'^2 + ss'' + 6s''' = 0, \\ 4gs' - sg' - \frac{6}{Pr}g'' = 0. \end{cases} \quad (33)$$

根据定理 1 知, 边界条件 (21), (22) 在对称 (28) 的延拓作用下不变, 故有

$$X_1^{(1)}[\psi_x(x, y) + B_1(x)]$$

$$=0, \text{ 当 } \psi_x(x, 0) = -B_1(x);$$

$$X_1^{(1)}[\psi_y(x, y) - B_2(x)]$$

$$=0, \text{ 当 } \psi_y(x, 0) = B_2(x), \quad (34)$$

$$X_1^{(2)}[\psi_{yy}(x, y) - B_3(x)]$$

$$=0, \text{ 当 } \psi_{yy}(x, 0) = B_3(x);$$

$$X_1[w(x, y) - B_4(x)]$$

$$=0, \text{ 当 } w(x, 0) = B_4(x), \quad (35)$$

$$X_1^{(1)}[w_y(x, y) - B_5(x)]$$

$$=0, \text{ 当 } w_y(x, 0) = B_5(x), \quad (36)$$

$$X_1^{(1)}[\psi_y(x, y)] = 0, \text{ 当 } \psi_y(x, \infty) = 0;$$

$$X_1[w(x, y)] = 0, \text{ 当 } w(x, \infty) = 0, \quad (37)$$

其中 $X_1^{(1)}, X_1^{(2)}$ 分别为对称 X_1 的一阶和二阶延拓的无穷小向量, 并且由(9)–(11)式可以推出

$$X_1^{(1)} = X_1 + \frac{a}{6}\psi_x \frac{\partial}{\partial \psi_x} + \frac{a}{3}\psi_y \frac{\partial}{\partial \psi_y}$$

$$- \frac{a}{3}w_x \frac{\partial}{\partial w_x} - \frac{a}{6}w_y \frac{\partial}{\partial w_y},$$

$$X_1^{(2)} = X_1^{(1)} + \frac{a}{6}\psi_{xx} \frac{\partial}{\partial \psi_{xx}} + \frac{a}{3}\psi_{xy} \frac{\partial}{\partial \psi_{xy}}$$

$$+ \frac{a}{3}\psi_{xy} \frac{\partial}{\partial \psi_{yx}} + \frac{a}{2}\psi_{yy} \frac{\partial}{\partial \psi_{yy}}$$

$$- \frac{a}{3}w_{xx} \frac{\partial}{\partial w_{xx}} - \frac{a}{6}w_{xy} \frac{\partial}{\partial w_{xy}} - \frac{a}{6}w_{xy} \frac{\partial}{\partial w_{yx}}.$$

在二阶延拓 $X_1^{(2)}$ 的表达式中 $\eta_{22}^{(2)w} = 0$, 所以不出
现 $\frac{\partial}{\partial w_{yy}}$.

从而由关系式(34)–(36)可以确定函数 $B_1(x), B_2(x), B_3(x), B_4(x), B_5(x)$, 即

$$B_1(x) = b_1 e^{\frac{x}{6}}, \quad B_2(x) = b_2 e^{\frac{x}{3}}, \quad B_3(x) = b_3 e^{\frac{x}{2}},$$

$$B_4(x) = b_4 e^{-\frac{x}{3}}, \quad B_5(x) = b_5 e^{-\frac{x}{6}}, \quad (38)$$

其中 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 为任意常数.

为了对应边界条件(21), (22), 取 $F(x) = 0$, 故有:

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } \zeta = 0; \text{ 当 } y \rightarrow \infty \text{ 时, } \zeta \rightarrow \infty. \quad (39)$$

根据边界条件(21), (22)和关系式(32), 得到初值条件:

$$s(0) = -6b_1, \quad s'(0) = b_2, \quad s''(0) = b_3,$$

$$g(0) = b_4, \quad g'(0) = b_5,$$

$$s'(\infty) = 0, \quad g(\infty) = 0. \quad (40)$$

第三步, 计算初值问题的数值解.

常微分方程组初值问题(33), (40)可以利用数值解方法进行求解. 下面我们利用四阶龙格-库塔法求解ODEs初值问题(33), (40)的数值解.

为了使用龙格-库塔法, 首先将(33), (40)化为一阶ODEs初值问题. 令

$$y_1 = s, \quad y_2 = s', \quad y_3 = s'', \quad y_4 = g, \quad y_5 = g'. \quad (41)$$

则(33), (40)可以化为

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad y_3' = -\frac{1}{6}(6y_4 - 2y_2^2 + y_1y_3),$$

$$y_4' = y_5, \quad y_5' = \frac{Pr}{6}(4y_4y_2 - y_1y_5). \quad (42)$$

相应的有初值条件

$$y_1(0) = -6b_1, \quad y_2(0) = b_2, \quad y_3(0) = b_3,$$

$$y_4(0) = b_4, \quad y_5(0) = b_5. \quad (43)$$

令

$$f_1 = y_2, \quad f_2 = y_3, \quad f_3 = -\frac{1}{6}(6y_4 - 2y_2^2 + y_1y_3),$$

$$f_4 = y_5, \quad f_5 = \frac{Pr}{6}(4y_4y_2 - y_1y_5), \quad (44)$$

其中 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 都是 $\zeta, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ 的函数. 那么可以建立龙格-库塔公式

$$y_{i,n+1} = y_{in} + \frac{h}{6}(K_{i1} + 2K_{i2}$$

$$+ 2K_{i3} + K_{i4}) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

$$K_{i1} = f_i(\zeta_n, y_{1n}, y_{2n}, y_{3n}, y_{4n}, y_{5n}),$$

$$K_{i2} = f_i(\zeta_n + \frac{h}{2}, y_{1n} + \frac{h}{2}K_{11}, y_{2n} + \frac{h}{2}K_{21}, y_{3n}$$

$$+ \frac{h}{2}K_{31}, y_{4n} + \frac{h}{2}K_{41}, y_{5n} + \frac{h}{2}K_{51}),$$

$$K_{i3} = f_i(\zeta_n + \frac{h}{2}, y_{1n} + \frac{h}{2}K_{12}, y_{2n} + \frac{h}{2}K_{22}, y_{3n}$$

$$+ \frac{h}{2}K_{32}, y_{4n} + \frac{h}{2}K_{42}, y_{5n} + \frac{h}{2}K_{52}),$$

$$K_{i4} = f_i(\zeta_n + h, y_{1n} + hK_{13}, y_{2n} + hK_{23}, y_{3n}$$

$$+ hK_{33}, y_{4n} + hK_{43}, y_{5n} + hK_{53}),$$

其中 $\zeta_0 = 0, \zeta_n = \zeta_0 + nh, h$ 为步长.

在初值条件(43)中, 取 $b_1 = 1, b_2 = 0.1, b_3 = 1, b_4 = 1, b_5 = 1$, 并且 $Pr = 1, h = 0.1$ 时, 借助于 Mathematica 符号系统可以得到函数 $s(\zeta), g(\zeta)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的数值解, 如图1和图2所示.

初值条件(43)中的 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 和方程中的 Pr 取其他不同值时, 我们也可以得到相应的数值解.

利用第二个扩充对称(29)式, 参考文献[12, 13]的方法可得到原方程组的精确解. 如在(29)式

中, 取 $n = 1, f(x) = x$ 时, 利用文献 [12] 中的方法可以得到方程组 (13)—(15) 的如下精确解:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= Cx e^{\frac{x}{a}-y}, \\ v(x, y) &= C e^{\frac{x}{a}-y} \left(1 + \frac{x}{a} \right) - \frac{1}{Pr}, \\ w(x, y) &= \left(\frac{1}{Pr} - 1 \right) C e^{\frac{x}{a}-y}, \end{aligned} \quad (45)$$

其中 C 为任意常数. 这说明了文献 [12, 13] 中给出方法的有效性. 用该方法也能探究原方程组的多孤子解的问题, 因篇幅所限我们将另文讨论该问题.

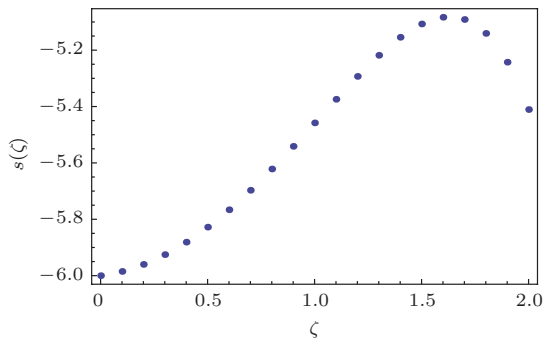


图1 $s(\zeta)$ 在 $[0, 2]$ 上的数值解

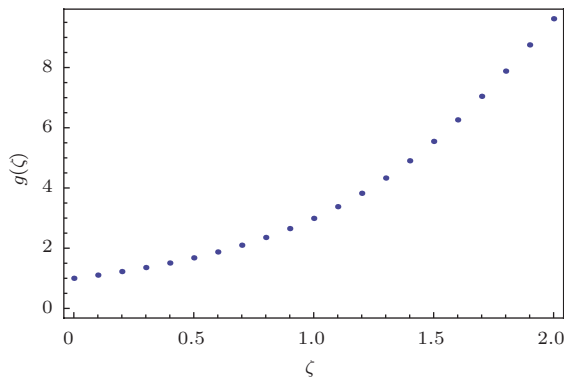


图2 $g(\zeta)$ 在 $[0, 2]$ 上的数值解

4 结 论

本文研究了微分方程对称分类在非线性 PDEs 边值问题中的应用, 也探索了对称分类在 PDEs 应用中的新途径. 首先, 利用偏微分方程 (组) 完全对称分类微分特征列集算法分析确定了一个含参数非线性 PDEs 边值问题的完全对称分类, 并根据方程参数 $S(x)$ 的不同取值, 分类确定了方程的主对称和扩充对称; 其次, 利用确定的第一个扩充对称将所研究的非线性 PDEs 边值问题约化为 ODEs 初值问题. 最后, 借助于 Mathematica 符号系统, 利用四阶龙格-库塔法求解了 ODEs 初值问题的数

值解. 同理, 将第二个扩充对称和精确解方法 [12] 相结合, 获得了原方程组的一个精确解. 研究结果充分体现了对称分类在偏微分方程应用中的优越性, 也反映了偏微分方程 (组) 完全对称分类微分特征列集算法是非常有效的. 并且本文有效结合对称方法和数值方法求解了边值问题, 这项研究也推广了对称方法的应用范围.

感谢上海海事大学文理学院特木尔朝鲁教授给予的有价值的意见和建议.

参考文献

- [1] Lie S 1881 *Areh. Math.* **6** 328
- [2] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss Göttingen Math. Phys.* KI **2** 235
- [3] Bluman G W, Cole J D 1969 *J. Math. Mech.* **18** 1025
- [4] Lian Z J, Lou S Y 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 219
- [5] Ma W X 1990 *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** 2707
- [6] Clarkson P A, Kruskal M D 1989 *J. Math. Phys.* **30** 2201
- [7] Lou S Y, Tang X Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 897
- [8] Jiao X Y, Lou S Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3611
- [9] Jiao X Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120201
- [10] Li X S 1988 *Sci. Sin. Math. A* **3** 1
- [11] Cheng Y, Wang Q C 1991 *Acta Math. Appl. Sin.* **14** 180
- [12] Ma W X, Chen M 2009 *Appl. Math. Comput.* **215** 2835
- [13] Ma W X 2013 *Appl. Math. Comput.* **220** 117
- [14] Bluman G W, Kumei S 1989 *Symmetries and Differential Equations* (New York, Berlin: Springer-Verlag)
- [15] Bluman G W, Cheviakov A F, Anco S C 2009 *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential* (New York: Springer-Verlag)
- [16] Seshadri R, Na T Y 1985 *Group Invariance in Engineering Boundary Value Problems* (New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag)
- [17] Yürüsoy M, Pakdemirli M, Noyan Ö F 2001 *Int. J. Nonlin. Mech.* **36** 955
- [18] Chao L 1999 *Acta Math. Sci.* **19** 326 (in Chinese) [朝鲁 1999 数学物理学报 **19** 326]
- [19] Temuer C, Gao X S 2002 *Acta Math. Sin.* **45** 1041 (in Chinese) [特木尔朝鲁, 高小山 2002 数学学报 **45** 1041]
- [20] Temuer C 2003 *Adv. Math.* **32** 208
- [21] Bluman G W, Temuer C 2005 *J. Math. Phys.* **46** 023505
- [22] Bluman G W, Temuer C 2006 *J. Math. Anal. Appl.* **322** 233
- [23] Sudao B, Chao L 2006 *J. Inner Mongolia Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **37** 366 (in Chinese) [苏道毕力格, 朝鲁 2006 内蒙古大学学报 (自然科学版) **37** 366]
- [24] Temuer C, Yin S 2007 *Acta Math. Sin.* **50** 1017 (in Chinese) [特木尔朝鲁, 银山 2007 数学学报 **50** 1017]
- [25] Temuer C, EerDun B, Zheng L X 2007 *Acta Math. Appl. Sin.* **30** 910 (in Chinese) [特木尔朝鲁, 额尔敦布和, 郑丽霞 2007 应用数学学报 **30** 910]

- [26] Temuer C, Bai Y S 2011 *Chin. J. Eng. Math.* **28** 617
- [27] Temuer C, Yin S 2012 *J. Sys. Sci. Math. Sci.* **32** 976 (in Chinese) [特木尔朝鲁, 银山 2012 系统科学与数学 **32** 976]
- [28] Wang X M, Sudaο B, Temuer C 2013 *J. Inner Mongolia Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **44** 129 (in Chinese) [王晓民, 苏道毕力格, 特木尔朝鲁 2013 内蒙古大学学报 (自然科学版) **44** 129]
- [29] Sudaο B 2011 *Ph. D. Dissertation* (Hohhot: Inner Mongolia University of Technology) (in Chinese) [苏道毕力格 2011 博士学位论文 (呼和浩特: 内蒙古工业大学)]
- [30] Lu L, Temuer C 2011 *Comput. Math. Appl.* **61** 2164
- [31] Lu L, Temuer C 2011 *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **11** 967
- [32] EerDun B, Temuer C 2012 *Chin. Phys. B* **21** 035201
- [33] Temuer C, Bai Y S 2009 *Appl. Math. Mech. Engl. Ed.* **30** 595
- [34] Temuer C, Pang J 2010 *J. Eng. Math.* **66** 181
- [35] Temuer C, Bai Y S 2010 *Sci. Sin. Math. A* **40** 1 (in Chinese) [特木尔朝鲁, 白玉山 2010 中国科学 A **40** 1]
- [36] Temuer C, Zhang Z Y 2009 *J. Sys. Sci. Math. Sci.* **29** 389 (in Chinese) [特木尔朝鲁, 张智勇 2009 系统科学与数学 **29** 389]

Application of the symmetry classification to the boundary value problem of nonlinear partial differential equations*

Sudaο Bilige[†] Wang Xiao-Min Wuyun Morigen

(College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China)

(Received 31 August 2013; revised manuscript received 3 November 2013)

Abstract

In this paper, we study the application of the symmetry classification to the boundary value problem of nonlinear partial differential equations. Firstly, by using differential characteristic set algorithm for the complete symmetry classification of partial differential equations, the complete symmetry classification of a given boundary value problem of nonlinear partial differential equations is proposed. Secondly, by using an extended symmetry, the boundary value problem of nonlinear partial differential equations is reduced to an initial value problem of the original differential equations. Finally, we numerically solve the initial value problem of the original differential equations by using Runge-Kutta method.

Keywords: symmetry classification, differential characteristic set algorithm, the boundary value problem of partial differential equations

PACS: 02.30.Jr, 02.20.-a, 11.30.-j, 02.60.Lj

DOI: 10.7498/aps.63.040201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11071159, 11261034) and the High Education Science Research Program of Inner Mongolia, China (Grant No. NJZY12056).

† Corresponding author. E-mail: inmathematica@126.com