

# (2+1) 维色散长波方程的新精确解 及其复合波激发\*

林福忠<sup>1)</sup> 马松华<sup>2)†</sup>

1) (龙岩学院物理系, 龙岩 364012)

2) (丽水学院物理系, 丽水 323000)

(2013年9月27日收到; 2013年11月7日收到修改稿)

利用 Riccati 方程展开法和变量分离法, 得到了 (2+1) 维色散长波方程的变量分离解. 根据得到的孤波解, 构造出该方程新颖的复合波局域结构, 研究了复合波随时间的演化.

**关键词:** Riccati 方程展开法, (2+1) 维色散长波方程, 变量分离解, 复合波结构

**PACS:** 05.45.Yv, 03.65.Ge

**DOI:** 10.7498/aps.63.040508

## 1 引言

非线性科学的研究是自然科学各领域以及社会科学相关领域所关心的问题, 而孤立子理论是非线性科学中最重要的一个方面, 它广泛地应用于物理学、数学、化学、生物学和通信工程等自然科学各领域, 尤其在物理学中的流体力学、非线性光学、等离子体物理、凝聚态物理等领域发挥着十分重要的作用<sup>[1-3]</sup>. 在非线性理论研究中, 开发求解非线性系统的新方法、求解非线性系统的精确解以及研究非线性系统的局域激发结构, 一直是非线性理论研究领域长期研究的课题. 相继提出了许多求解非线性方程的新方法, 如双线性法、齐次平衡法、标准的 Painlevé 截断分析法、波数合并法、椭圆函数法、tanh 函数法、变量分离法、(G'/G) 展开法和 Riccati 方程展开法<sup>[4-18]</sup>等. 自 Boiti 等<sup>[19]</sup>通过 Bäcklund 变换方法发现 Daver-Stewartson 系统的钟状平面相干孤子 (dromion) 以后, (2+1) 维和 (3+1) 维孤子系统的局域结构理论已引起了相关学者的极大关注, 并进行了大量研究, 发现了多种形式的孤子结构, 如线孤子、半线孤子、峰孤子、环孤子、折叠子和内嵌

孤子等<sup>[20-32]</sup>. 在文献 [33] 中, Mei 和 Zhang 利用 Riccati 方程 ( $\phi' = a_0 + a_1\phi + a_2\phi^2$ ) 展开法, 得到了非线性方程的行波解. 本文将 Riccati 方程展开法进一步拓展, 并应用于 (2+1) 维色散长波方程 (DLW)

$$\begin{aligned} U_{ty} + V_{xx} + \frac{1}{2}U_{xy}^2 &= 0, \\ V_t + (UV)_x + U_x + U_{xxy} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

得到包含行波解和两个任意函数解的复合波解, 研究复合波随时间的演化. 方程 (1) 最先由 Boiti 等<sup>[34]</sup>利用弱 Lax 对偶得到, 在文献 [35] 中, Zhang 利用齐次平衡法求解了 DLW 方程, 得到了该方程的 dromion 解和环孤子解, 并研究了 dromion 孤子随时间的演化.

## 2 DLW 方程的精确解

Riccati 方程展开法的基本思想是: 对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \dots) = 0, \quad (2)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11375079)、福建省教育厅科研基金 (批准号: JA13305)、浙江省教育厅科研基金 (批准号: Y201120994) 和浙江省自然科学基金 (批准号: Y6100257, Y6110140) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: msh6209@aliyun.com

设其有如下形式的解

$$u = A(x) + \sum_{i=1}^n B_i(x)\phi^i q(x), \quad (3)$$

其中  $\phi$  满足

$$\phi' = a_0 + a_1\phi + a_2\phi^2, \quad (4)$$

这里  $x = (x_0 = t, x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $A(x)$ ,  $B_i(x)$  和  $q(x)$  为待定的  $x$  的任意函数. 将 (3) 和 (4) 式代入 (2) 式就可以得到一组  $A(x)$ ,  $B_i(x)$  和  $q(x)$  的约束方程. 通过约束方程求得变量  $A(x)$ ,  $B_i(x)$  和  $q(x)$ , 再根据 Riccati 方程解 [33] 就可以确定所求方

程各种形式的解.

为了寻找 DLW 的新精确解, 我们将 Riccati 方程展开法用于 (1) 式, 根据对方程 (1) 的领头项分析, 设解为

$$\begin{aligned} U &= f + g\phi(q), \\ V &= F + G\phi(q) + H\phi^2(q), \end{aligned} \quad (5)$$

这里,  $f, g, F, G, H$  和  $q$  是  $(x, y, t)$  的任意函数, 将 (5) 式和 (4) 式代入 (1) 式, 并按  $\phi$  的同次幂合并, 提取  $\phi^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 前的系数, 令其等于零, 得到一系列方程, 由这些方程可求得:

$$\begin{aligned} f &= -\frac{qt - q_x^2 a_1 - q_{xx}}{q_x}, \quad g = 2q_x a_2, \quad G = -2a_2(q_{xy} + q_x q_y a_1), \quad H = -2q_x q_y a_2^2, \\ F &= -\frac{q_{xy} q_x^2 a_1 - q_{xy} q_{xx} + 2q_x^3 q_y a_0 a_2 + q_x^2 - q_{yt} q_x + q_x q_{xxy} + q_t q_{xy}}{q_x^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$q$  满足

$$q = lx + my + nt + \chi(x, t) + \varphi(y), \quad (7)$$

其中  $l, m, n$  是任意常数,  $\chi \equiv \chi(x, t)$ ,  $\varphi \equiv \varphi(y)$  是关于  $(x, t)$  和  $y$  的任意函数. 根据 Riccati 方程解, 即可求得当  $a_0, a_1, a_2$  取不同值时色散长波方程的如下新精确解.

**情形 1** 当  $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1$  时, 有

$$U_1 = f + g \tanh(q), \quad (8)$$

$$V_1 = F + G \tanh(q) + H \tanh^2(q), \quad (9)$$

$$U_2 = f + g \coth(q), \quad (10)$$

$$V_2 = F + G \coth(q) + H \coth^2(q). \quad (11)$$

**情形 2** 当  $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1$  时, 有

$$U_3 = f + g \tan(q), \quad (12)$$

$$V_3 = F + G \tan(q) + H \tan^2(q). \quad (13)$$

**情形 3** 当  $a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = -1$  时, 有

$$U_4 = f + g \cot(q), \quad (14)$$

$$V_4 = F + G \cot(q) + H \cot^2(q). \quad (15)$$

**情形 4** 当  $a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}$  时, 有

$$U_5 = f + g(\tan(q) + (q)), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} V_5 &= F + G(\tan(q) + \sec(q)) \\ &+ H(\tan(q) + \sec(q))^2, \end{aligned} \quad (17)$$

$$U_6 = f + g(\tan(q) - \sec(q)), \quad (18)$$

$$V_6 = F + G(\tan(q) - \sec(q))$$

$$+ H(\tan(q) - (q))^2, \quad (19)$$

$$U_7 = f + g(\csc(q) - \cot(q)), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} V_7 &= F + G(\csc(q) - \cot(q)) + H(\csc(q) \\ &- \cot(q))^2. \end{aligned} \quad (21)$$

**情形 5** 当  $a_0 = -\frac{1}{2}, a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{2}$  时, 有

$$U_8 = f + g(-\tan(q) + \sec(q)), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} V_8 &= F + G(-\tan(q) + \sec(q)) + H(-\tan(q) \\ &+ \sec(q))^2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$U_9 = f + g(\cot(q) + \csc(q)), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} V_9 &= F + G(\cot(q) + \csc(q)) + H(\cot(q) \\ &+ \csc(q))^2, \end{aligned} \quad (25)$$

$$U_{10} = f + g(\cot(q) - \csc(q)), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} V_{10} &= F + G(\cot(q) - \csc(q)) + H(\cot(q) \\ &- \csc(q))^2, \end{aligned} \quad (27)$$

$$U_{11} = f + g \frac{\cot(q)}{1 + \csc(q)}, \quad (28)$$

$$V_{11} = F + G \frac{\cot(q)}{1 + \csc(q)} + H \left( \frac{\cot(q)}{1 + \csc(q)} \right)^2, \quad (29)$$

$$U_{12} = f + g \frac{\cot(q)}{1 - \csc(q)}, \quad (30)$$

$$V_{12} = F + G \frac{\cot(q)}{1 - \csc(q)} + H \left( \frac{\cot(q)}{1 - \csc(q)} \right)^2. \quad (31)$$

情形6 当  $a_0 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -\frac{1}{2}$  时, 有

$$U_{13} = f + g(\coth(q) + \operatorname{csch}(q)), \quad (32)$$

$$V_{13} = F + G(\coth(q) + \operatorname{csch}(q)) + H(\coth(q) + \operatorname{csch}(q))^2, \quad (33)$$

$$U_{14} = f + g(\coth(q) - \operatorname{csch}(q)), \quad (34)$$

$$V_{14} = F + G(\coth(q) - \operatorname{csch}(q)) + H(\coth(q) - \operatorname{csch}(q))^2, \quad (35)$$

$$U_{15} = f + g(\tanh(q) + \operatorname{Isech}(q)), \quad (36)$$

$$V_{15} = F + G(\tanh(q) + \operatorname{Isech}(q)) + H(\tanh(q) + \operatorname{Isech}(q))^2, \quad (37)$$

$$U_{16} = f + g(\tanh(q) - \operatorname{Isech}(q)), \quad (38)$$

$$V_{16} = F + G(\tanh(q) - \operatorname{Isech}(q)) + H(\tanh(q) - \operatorname{Isech}(q))^2, \quad (39)$$

$$U_{17} = f + g \frac{\tanh(q)}{1 + \operatorname{sech}(q)}, \quad (40)$$

$$V_{17} = F + G \frac{\tanh(q)}{1 + \operatorname{sech}(q)} + H \left( \frac{\tanh(q)}{1 + \operatorname{sech}(q)} \right)^2, \quad (41)$$

$$U_{18} = f + g \frac{\tanh(q)}{1 - \operatorname{sech}(q)}, \quad (42)$$

$$V_{18} = F + G \frac{\tanh(q)}{1 - \operatorname{sech}(q)} + H \left( \frac{\tanh(q)}{1 - \operatorname{sech}(q)} \right)^2, \quad (43)$$

$$U_{19} = f + g \frac{\coth(q)}{1 + \operatorname{Icsch}(q)}, \quad (44)$$

$$V_{19} = F + G \frac{\coth(q)}{1 + \operatorname{Icsch}(q)} + H \left( \frac{\coth(q)}{1 + \operatorname{Icsch}(q)} \right)^2, \quad (45)$$

$$U_{20} = f + g \frac{\coth(q)}{1 - \operatorname{Icsch}(q)}, \quad (46)$$

$$V_{20} = F + G \frac{\coth(q)}{1 - \operatorname{Icsch}(q)} + H \left( \frac{\coth(q)}{1 - \operatorname{Icsch}(q)} \right)^2. \quad (47)$$

情形7 当  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -4$  时, 有

$$U_{21} = f + g \frac{\tanh(q)}{1 + \tanh^2(q)}, \quad (48)$$

$$V_{21} = F + G \frac{\tanh(q)}{1 + \tanh^2(q)}$$

$$+ H \left( \frac{\tanh(q)}{1 + \tanh^2(q)} \right)^2. \quad (49)$$

情形8 当  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 4$  时, 有

$$U_{22} = f + g \frac{\tan(q)}{1 - \tan^2(q)}, \quad (50)$$

$$V_{22} = F + G \frac{\tan(q)}{1 - \tan^2(q)} + H \left( \frac{\tan(q)}{1 - \tan^2(q)} \right)^2. \quad (51)$$

情形9 当  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -4$  时, 有

$$U_{23} = f + g \frac{\cot(q)}{1 - \cot^2(q)}, \quad (52)$$

$$V_{23} = F + G \frac{\cot(q)}{1 - \cot^2(q)} + H \left( \frac{\cot(q)}{1 - \cot^2(q)} \right)^2. \quad (53)$$

情形10 当  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 2$  时, 有

$$U_{24} = f + g \frac{\tan(q)}{1 - \tan(q)}, \quad (54)$$

$$V_{24} = F + G \frac{\tan(q)}{1 - \tan(q)} + H \left( \frac{\tan(q)}{1 - \tan(q)} \right)^2. \quad (55)$$

情形11 当  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -2$ ,  $a_2 = 2$  时, 有

$$U_{25} = f + g \frac{\tan(q)}{1 + \tan(q)}, \quad (56)$$

$$V_{25} = F + G \frac{\tan(q)}{1 + \tan(q)} + H \left( \frac{\tan(q)}{1 + \tan(q)} \right)^2. \quad (57)$$

情形12 当  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = -2$  时, 有

$$U_{26} = f + g \frac{\cot(q)}{1 + \cot(q)}, \quad (58)$$

$$V_{26} = F + G \frac{\cot(q)}{1 + \cot(q)} + H \left( \frac{\cot(q)}{1 + \cot(q)} \right)^2. \quad (59)$$

情形13 当  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = -2$ ,  $a_2 = -2$  时, 有

$$U_{27} = f + g \frac{\cot(q)}{1 - \cot(q)}, \quad (60)$$

$$V_{27} = F + G \frac{\cot(q)}{1 - \cot(q)} + H \left( \frac{\cot(q)}{1 - \cot(q)} \right)^2. \quad (61)$$

情形14 当  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = a$  时, 有

$$U_{28} = f - g \frac{1}{aq + k}, \quad (62)$$

$$V_{28} = F - G \frac{1}{aq+k} + H \left( \frac{1}{aq+k} \right)^2. \quad (63)$$

以上各解中  $f, g, F, G, H$  和  $q$  如 (6) 和 (7) 式所示,  $a$  和  $k$  是任意常数.

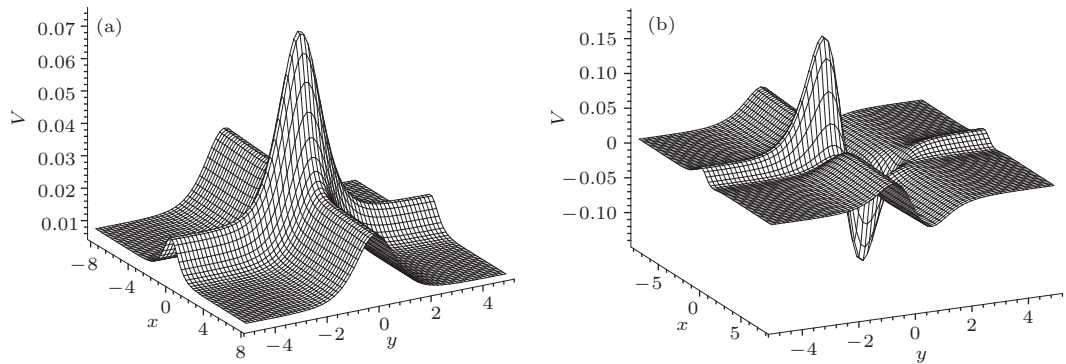


图1 (a) (64) 式利用 (65) 式得到的 dromion 复合波解 ( $t = 0, l = 0.3, m = 0.3, m = 0.5$ ); (b) (64) 式利用 (66) 式得到的亮暗 dromion 复合波解 ( $t = 0, l = 0.3, m = 0.1, m = 0.5$ )

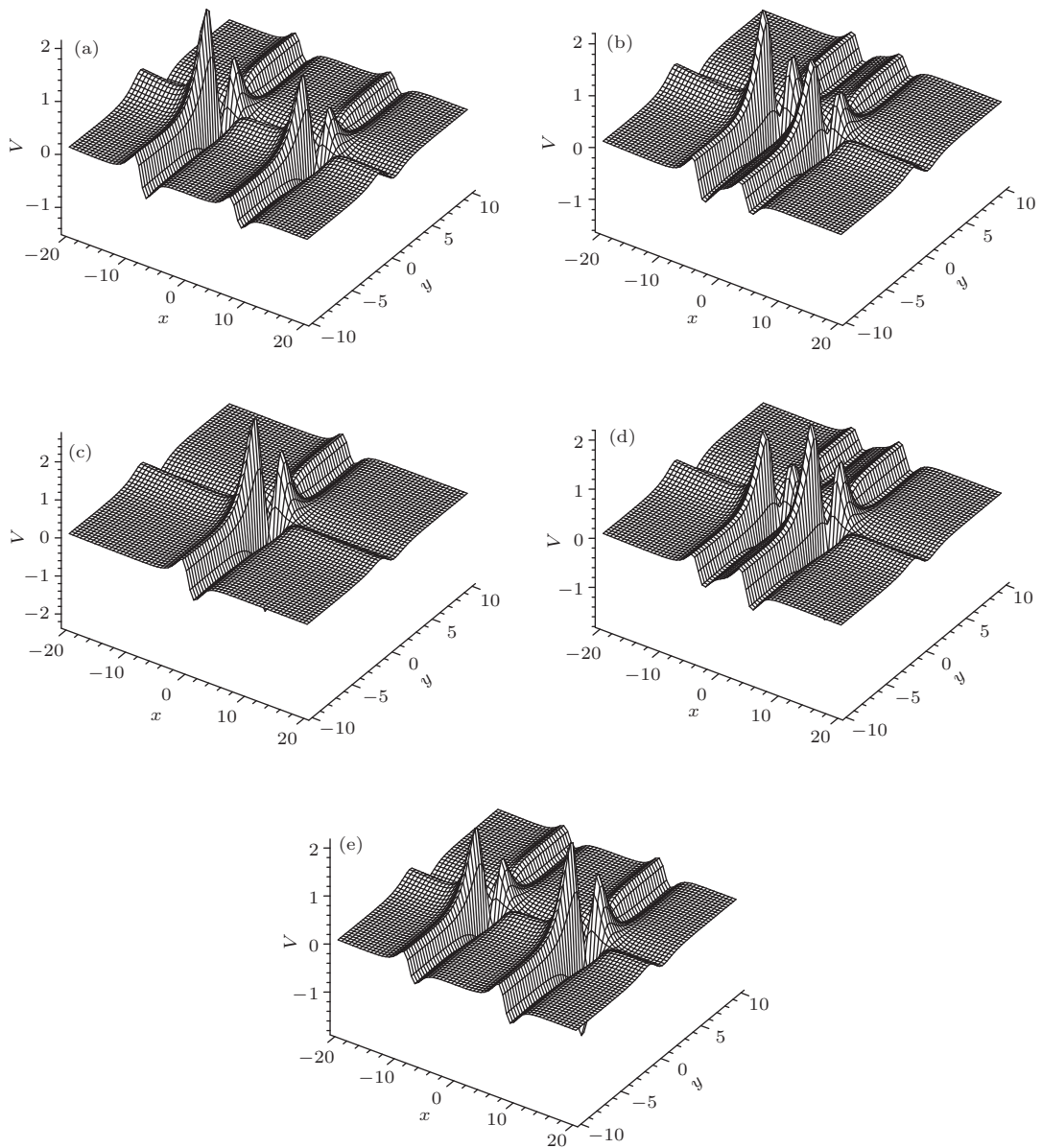


图2 (64) 式利用 (67) 式得到的两个亮暗 dromion 复合波随时间的演化 ( $l = 0.8, m = 0.8, n = 0.8$ ) (a)  $t = -8$ ; (b)  $t = -4$ ; (c)  $t = 0$ ; (d)  $t = 4$ ; (e)  $t = 8$

### 3 DLW 方程的复合波激发

由于(9)–(63)式中都包含有任意函数  $q = lx = my = nt = x = \varphi$ , 只要适当选取任意函数  $\chi$  和  $\varphi$  就能得到由行波解和 dromion 解叠加而成的复合波解. 本文的这一部分是以(9)式为例, 讨论 DLW 方程的复合波局域结构及其两个复合波之间的相互作用. 为清楚起见, (9) 式写成

$$V = V_1 = F + G \tanh(q) + H \tanh^2(q), \quad (64)$$

$$q = lx + my + nt + \chi(x, t) + \varphi(y), \quad (65)$$

其中  $F, G, H$  满足(6)式.

由于(65)式中的  $\chi(x, t)$  和  $\varphi(y)$  的任意性, 不

妨取  $\chi(x, t)$  和  $\varphi(y)$  为如下形式:

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= 1 + 0.5 \tanh(x - t), \\ \varphi(y) &= 1 + \tanh(y), \end{aligned} \quad (66)$$

于是可以得到一个 dromion 复合波解, 如图 1(a) 所示.

如果取  $\chi(x, t)$  和  $\varphi(y)$  为如下形式:

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= 1 + \tanh(x + t) + \operatorname{sech}^2(x - t), \\ \varphi(y) &= 1 + \operatorname{sech}^2(y), \end{aligned} \quad (67)$$

于是可以得到一个亮暗 dromion 复合波解, 如图 1(b) 所示.

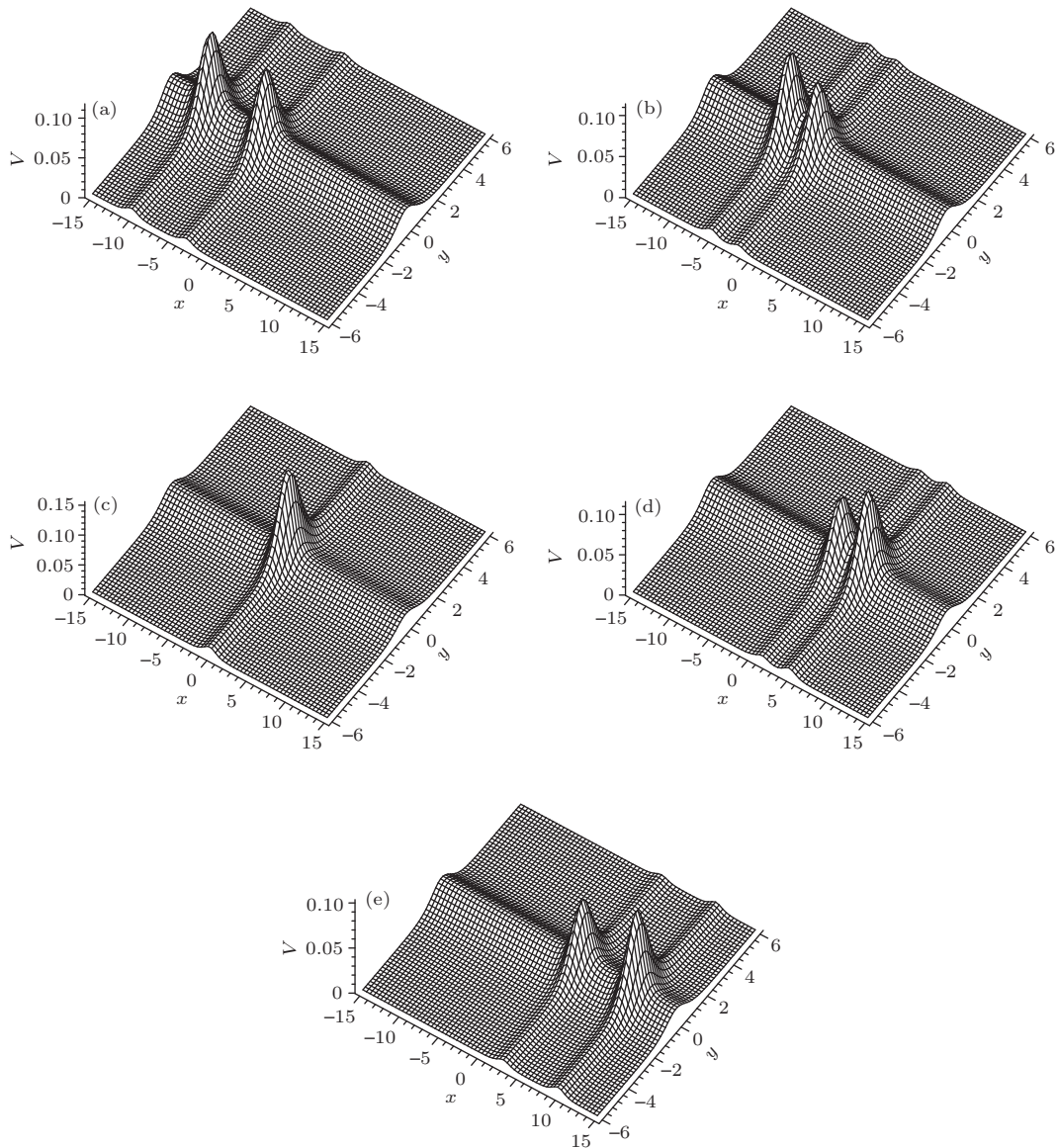


图3 (64) 式利用(68)式得到的两个 dromion 复合波随时间的演化 ( $l = 0.2, m = 0.1, n = 0.5$ ) (a)  $t = -10$ ; (b)  $t = -5$ ; (c)  $t = 0$ ; (d)  $t = 5$ ; (e)  $t = 10$

另外, 如果取  $\chi(x, t)$  和  $\varphi(y)$  为如下形式:

$$\begin{aligned}\chi(x, t) &= 1 + \operatorname{sech}(x + t) + 1.2 \operatorname{sech}(x - t), \\ \varphi(y) &= 1 + \operatorname{sech}(y),\end{aligned}\quad (68)$$

可以得到两个亮暗 dromion 复合波随时间的演化情况, 如图 2 所示. 从图 2 可以清楚看到, 两个亮暗 dromion 复合波发生弹性作用, 作用前后的波幅、形状和传播速度都没有发生改变.

如果取  $\chi(x, t)$  和  $\varphi(y)$  为如下形式:

$$\begin{aligned}\chi(x, t) &= 1 + 0.6 \tanh(x - t) + 0.5 \tanh(x - 0.3t), \\ \varphi(y) &= 1 + \tanh(y),\end{aligned}\quad (69)$$

可以得到两个 dromion 复合波随时间的演化情况, 如图 3 所示. 从图 3 可以看到, 两个 dromion 复合波运动方向相同, 但是运动速度不同, 后面的 dromion 复合波追赶上前面的 dromion 复合波, 然后发生弹性相互作用, 作用前后各自的波幅、形状和传播速度都没有发生改变. 碰撞后, 两个 dromion 复合波之间的距离变得越来越大.

## 4 结 论

Riccati 方程展开法是求解非线性方程最简便、最有效的方法之一. Mei 和 Zhang<sup>[33]</sup> 利用 Riccati 方程展开法, 得到了非线性方程的行波解. 本文将该方法进一步拓展, 以 (2+1) 维色散长波方程的为例, 得到了包含  $q = lx + my + nt + \chi(x, t) + \varphi(y)$  的复合波解, 其中  $\chi(x, t)$  和  $\varphi(y)$  是关于  $(x, t)$  和  $y$  的两个任意函数. 然后以孤波解 (9) 式为例, 构造出色散长波方程的亮 dromion 复合波结构和亮暗 dromion 复合波结构. 两个孤子之间的相互作用大多是弹性的, 即孤子相互碰撞后“各自分开, 互不改变”, 本文还是以 (9) 式为例, 研究了两个 dromion 复合波的弹性相互作用, 从图 2 和图 3 清楚看到, 两个 dromion 复合波作用前后的波幅、形状和传播速度都没有发生改变. 拓展的 Riccati 方程展开法在这里得到了应用, 该方法对其他高维非线性物理模型的应用值得进一步研究.

作者对楼森岳教授的建议和指导表示感谢.

## 参考文献

- [1] Camassa R, Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
- [2] Tang X Y, Lou S Y, Zhang Y 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046601
- [3] Lou S Y 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5027
- [4] Hietarinta J 1990 *Phys. Lett. A* **149** 113
- [5] Fokas A S 1998 *Phys. Lett. A* **132** 432
- [6] Ruan H Y, Chen Y X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 586 (in Chinese)[阮航宇, 陈一新 2001 物理学报 **50** 586]
- [7] Zhang J F, Meng J P 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 655
- [8] Lou S Y 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 3877
- [9] Zhang S L, Zhu X N, Wang Y M, Lou S Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 829
- [10] Zhang S L, Lou S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 385
- [11] Dai C Q, Ni Y Z 2006 *Phys. Scripta* **74** 584
- [12] Zhang J F, Huang W H, Zheng C L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2676 (in Chinese)[张解放, 黄文华, 郑春龙 2002 物理学报 **51** 2676]
- [13] Zhu J M, Ma Z Y, Zheng C L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3248 (in Chinese)[朱加民, 马正义, 郑春龙 2004 物理学报 **53** 3248]
- [14] Lou S Y, Tang X Y, Li J 2001 *Eur. Phys. J. B* **22** 473
- [15] Lou S Y 1995 *J. Phys. Math. Gen. A* **28** 7227
- [16] Ruan H Y, Lou S Y 1997 *J. Math. Phys.* **38** 3123
- [17] Lou S Y 1996 *Commun. Theor.* **26** 487
- [18] Fang J P, Zheng C L, Chen L Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 175
- [19] Boiti M, Leon J J, Manna M, Pempinelli F 1989 *Phys. Rev. Lett. A* **63** 1329
- [20] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 (in Chinese)[方建平, 郑春龙, 朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]
- [21] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 11 (in Chinese)[马松华, 吴小红, 方建平, 郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]
- [22] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese)[马松华, 强继业, 方建平 2007 物理学报 **56** 620]
- [23] Ma S H, Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese)[马松华, 方建平 2006 物理学报 **55** 5611]
- [24] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys. B* **4** 670
- [25] Ma S H, Fang J P, Ren Q B, Yang Z 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050511
- [26] Lei Y, Ma S H, Fang J P 2013 *Chin. Phys. B* **22** 010506
- [27] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **40** 210
- [28] Ma S H, Fang J P, Ren Q B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4420 (in Chinese)[马松华, 方建平, 任清寰 2010 物理学报 **59** 4420]
- [29] Ma S H, Fang J P, Wu H Y 2013 *Z. Naturforsch* **68a** 350
- [30] Dai C Q, Zhou G Q 2007 *Chin. Phys.* **16** 1201
- [31] Ma Z Y, Ma S H 2012 *Chin. Phys. B* **21** 030507
- [32] Chen Y M, Ma S H, Ma Z Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050510
- [33] Mei J Q, Zhang H Q 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 209
- [34] Boiti M, Leon J J, Manna M, Pempinelli F 1986 *Inverse Problem* **2** 271
- [35] Zhang J F 2002 *Commun. Theor. Phys.* **37** 277

# New exact solutions and complex wave excitations for the (2+1)-dimensional dispersive long wave equation\*

Lin Fu-Zhong<sup>1)</sup> Ma Song-Hua<sup>2)†</sup>

1) (*Department of Physics, Longyan University, Longyan 364012, China*)

2) (*Department of Physics, Lishui University, Lishui 323000, China*)

( Received 27 September 2013; revised manuscript received 7 November 2013 )

## Abstract

By the Riccati equation expansion method and a variable separation method, a series of variable separation solutions of the (2+1)-dimensional dispersive long wave equation is derived. According to the derived solitary wave solution, we obtain some novel complex wave localized structures and study the time evolutions of complex waves.

**Keywords:** Riccati equation expansion method, (2+1)-dimensional dispersive long wave equation, variable separation solutions, complex wave structures

**PACS:** 05.45.Yv, 03.65.Ge

**DOI:** [10.7498/aps.63.040508](https://doi.org/10.7498/aps.63.040508)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11375079), the Scientific Research Fund of Fujian Provincial Education Department of China (Grant No. JA13305), the Scientific Research Fund of Zhejiang Provincial Education Department of China (Grant No. Y201120994), and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant Nos. Y6100257, Y6110140).

† Corresponding author. E-mail: [msh6209@aliyun.com](mailto:msh6209@aliyun.com)