

核磁共振水分子扩散张量成像中基于广义 Fibonacci 数列的扩散敏感梯度磁场方向分布方案*

高嵩^{1)2)†} 朱艳春¹⁾ 李硕¹⁾²⁾ 包尚联¹⁾

1) (北京大学物理学院, 医学物理和工程北京市重点实验室, 北京 100871)

2) (北京大学医学部, 医学影像物理实验室, 北京 100191)

(2013年12月8日收到; 2013年12月25日收到修改稿)

为了准确得到人体内水分子各向异性扩散信息, 在核磁共振扩散张量成像及高角分辨率扩散成像实验中, 需要在众多空间均匀分布的方向上依次施加扩散敏感梯度磁场, 测量水分子在不同方向上的扩散系数. 目前方向分布方案的缺点有方向数目不连续、均匀性有待提高及部分方向数据的损坏会影响整个数据集等. 本文以广义 Fibonacci 数列为基础, 提出新的可以产生连续方向数目的扩散敏感梯度磁场方向分布方案, 整个方案的方向均匀性较好, 数据集内的部分数据仍然具有很好的空间均匀性, 而且本方案中相邻两个扩散敏感梯度磁场方向接近相反, 可以减小快速变化的高强度梯度磁场产生的涡流对结果的影响.

关键词: 扩散敏感梯度, Fibonacci 数列, 扩散张量成像

PACS: 87.61.-c, 87.57.-s, 83.85.Fg

DOI: 10.7498/aps.63.048704

1 引言

纯水中水分子的扩散属于各向同性扩散, 其扩散程度可用扩散系数 D 表示. 人体组织中水分子的扩散过程会受到多种障碍物的影响, 表现为各向异性扩散, 扩散程度需使用扩散张量 \hat{D} 表示. 通过 \hat{D} 可获得大量的生理及病理信息, 在临床及研究领域有重要应用价值^[1,2]. 核磁共振水分子扩散张量成像 (diffusion tensor imaging, DTI) 实验中, 理论上只需在 6 个线性无关方向施加扩散敏感梯度磁场 (diffusion sensitive gradient, DSG) 测量对应的扩散系数, 便可得到扩散张量 \hat{D} . 但为了得到更准确的结果, 常需要在数十个方向上施加 DSG 进行测量, 通过求解超定线性方程组得到 \hat{D} , 在高角分辨率扩散成像 (high angular resolution diffusion imaging, HARDI) 中常需要在数百个方向上施加

DSG 并测量对应的扩散系数^[3].

指定数目的 DSG 方向应在空间中均匀分布, 这样不仅可以得到更真实的水分子扩散信息, 而且可以提高结果的信噪比^[4]. 最早的方向分布方案是由化学屏蔽张量波谱测量实验移植而来的, 包括锥体法 (6 个方向)^[5]、倾斜双梯度法 (6 个方向)^[6]、十面体法 (10 个方向)^[7] 等, 缺点是方向数太少. 数学优化方法和多面体几何法是现在常用的两类方法, 其中 Johns 等^[8] 在 Conturo 等^[9] 的基础上, 根据化学中 sp^3 轨道杂化模型提出的最小作用力法得到较广泛的应用, 这两类方法的优点是可以得到众多均匀分布的方向, 缺点是方向数不连续. Wong 等^[10] 提出的方案可以得到连续的方向数, 但方向分布均匀性不好, 且在球面两极容易产生空洞.

DTI 及 HARDI 实验中需要在众多方向上依次施加 DSG 并采集数据, 扫描时间很长, 其间人体难

* 国家自然科学基金 (批准号: 81171330) 和国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2011CB707701) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: gaoss@hsc.pku.edu.cn

免出现自主性及非自主性运动. 每一个DSG中的扩散时间长度是微秒量级, 水分子热运动引起的位移远小于身体轻微运动导致的体内水分子整体位移, 所以DTI实验中常会出现某些方向对应的图像数据损坏, 特别是在扫描方向很多的情况下. 如果采用现行的DSG分布方案, 删除损坏数据会破坏其他方向整体的空间分布均匀性, 从而导致整个数据集作废.

为了解决以上问题, 本文根据广义Fibonacci数列, 提出一种新颖的DSG方向分布方案.

2 Fibonacci数列

第 k 阶 Fibonacci 数列中第 n 项 $F_n^{(k)}$ 为 [11]

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + F_{n-2}^{(k)} + \dots + F_{n-k}^{(k)} \quad (n = 2, 3, 4, \dots), \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} F_{-k+1}^{(k)} = F_{-k+2}^{(k)} = \dots = F_{-2}^{(k)} = 0, \\ F_{-1}^{(k)} = F_0^{(k)} = 1. \end{cases} \quad (2)$$

当 $k=2$ 时得到常见的 2 阶 Fibonacci 数列, 前两项分别是 0 和 1, 第三项之后的每一项等于之前的两项和, 表示为

$$F_n^{(2)} = F_{n-1}^{(2)} + F_{n-2}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \quad (3)$$

对于 2 阶 Fibonacci 数列, 相邻两项的比值可用一矢量表示为

$$\mathbf{u}_n = [F_{n-1}^{(2)}, F_n^{(2)}], \quad (4)$$

相邻的两个比值满足 Fibonacci 变换关系

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &= M_{\text{Fib}} \cdot \mathbf{u}_{n-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} F_{n-1}^{(2)} \\ F_n^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-2}^{(2)} \\ F_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 M_{Fib} 为 Fibonacci 变换. 由 M_{Fib} 特征值 $\lambda_1 = 0.618$ 及 $\lambda_2 = -1.618$, 可得一维空间的黄金分割比率 $\gamma = 0.618$, γ 与正整数乘积的小数部分为

$$p_m = \text{mod}(m\gamma, 1) \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (6)$$

以 p_m 为坐标可在 $[0,1]$ 一维空间组成近似均匀分布的点, 稍加修改可以得到圆周上较均匀分布的 m 个点 (图 1). 随机方法得到的方向分布方案不确定, 在方向数较小的情况下均匀性较差. 所以基于 Fibonacci 数列方法对于不同方向数均可得到较均匀的结果, 而随机分布得到的结果均匀性较差.

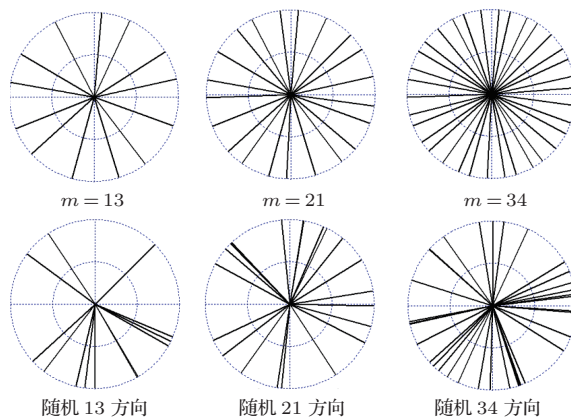


图 1 基于 Fibonacci 数列方法 (上排) 和随机方法 (下排) 得到的 3 个不同方向数的结果

3 广义 Fibonacci 数列

为了得到高维空间均匀分布的点, 需要定义广义 Fibonacci 数列:

$$\begin{aligned} G_0 &= 0, \\ G_1 &= G_2 = \dots = G_d = 1 \quad (d = 2, 3, 4, \dots), \\ G_i &= G_{i-1} + G_{i-(d+1)} \quad (i > d), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 d 为维数, 则 (5) 式可写为以下形式:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{i-(d+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ G_{i-2} \\ G_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{i-d} \\ \vdots \\ \vdots \\ G_{i-1} \\ G_i \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中最左侧矩阵为广义 Fibonacci 变换 $M_{\text{Fib}}^{(d)}$.

球面上的点只有两个自由度, 所以可令 $d=2$, 则

$$M_{\text{Fib}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

可得 $M_{\text{Fib}}^{(2)}$ 的特征值为 1.4656, 对应的特征矢量为 $[0.4656, 0.6823, 1]$. 则 (6) 式可扩展到二维空间分

布的点:

$$p_m(x, y) = (\text{mod}(m\gamma_1, 1), \text{mod}(m\gamma_2, 1))$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots), \quad (10)$$

其中二维空间黄金分割比例 γ_1, γ_2 分别为 0.4565 及 0.6823.

4 DSG 方向分布方案

半径固定的球面上的点有方位角 φ 和仰角 θ 两个自由度. 对 (10) 式进行修改, 可得到 $\varphi \in [0, 2\pi]$ 及 $\theta \in [0, \pi]$ 范围内的点, 即分布于整个球面的点. 但在 m 较大的情况下可以发现这些点的分布是不均匀的, 越靠近两极点的密度越高(图 2(a)). 为此可假设半径为 1 的球面被沿着 z 方向上的平行平板均匀分割, 平板之间的距离为 dz . 球面被分割为众多表面积为 $dA = 2\pi dz$ 的圆环, 表面积与圆环的位置无关. 因此点沿着 z 方向均匀分布便可以在球面上均匀分布 [12,13].

具体方法是将二维空间黄金比例 $\gamma_1 = 0.4565$ 及 $\gamma_2 = 0.6823$ 应用在球面上, 方位角 φ 随着黄金

比例 γ_1 的变化规律为: $\varphi = \text{mod}(2\pi m\gamma_1, 2\pi)$. 在 Z 坐标轴上的点 z_p 根据黄金比例 γ_2 均匀分布, 在半径为 1 的球面上 $z_p = \cos \theta, z_p \in [-1, 1]$. 引入黄金比例 γ_2 后, z_p 及仰角 θ 的变化满足

$$z_p = \cos \theta = 1 - 2\text{mod}(2\pi m\gamma_2, 2\pi),$$

$$\theta = \arccos(1 - 2\text{mod}(2\pi m\gamma_2, 2\pi))$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots). \quad (11)$$

根据上式中 z_p 和 θ 角度的变化, 可以得到在球面上均匀分布的点.

如图 2 所示, 将 200 个点分别使用本文介绍方法和随机方法分布在球面上, 可以明显看出基于广义 Fibonacci 数列方法得到的结果较理想, 而采用随机分布得到的结果明显不均匀. 将整个球面分成 72 个区域, 每个区域对应的方位角 φ 和仰角 θ 均为 $\pi/6$. 由于这些区域面积不等, 所以可计算各个区域落点相对概率密度. 频数直方图结果如图 3 所示. 本文所述方法得到的结果中大多数区域的相对概率密度相近, 而随机分布结果各个区域相对概率密度较分散.

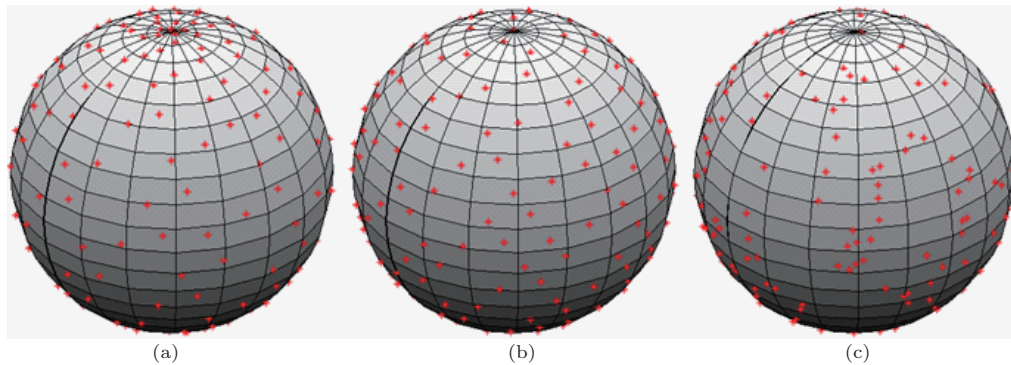


图 2 三种球面方向分布方案的结果 (200 个方向) (a) 未修正的基于 Fibonacci 数列方法结果, 两极的点密度较高; (b) 修正的基于 Fibonacci 数列方法结果, 在整个球面分布较均匀; (c) 随机分布结果, 球面上的点明显不均匀

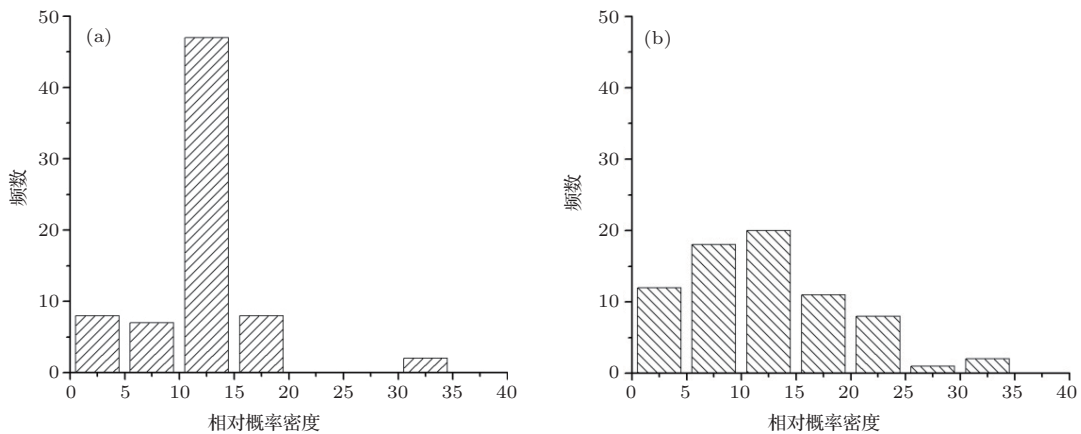


图 3 广义 Fibonacci 数列方法 (a) 及随机方法 (b) 得到结果对应的各外区域相对概率分布密度频数直方图, 球面被分为 72 个区域, 每个区域对应的方位角 φ 和仰角 θ 均为 $\pi/6$

通过以上方法不仅可以得到数目连续、空间分布均匀的DSG方向分布方案,而且由Fibonacci数列的性质可知,这一类方案还有其他优点.首先,为了提高结果的信噪比,DTI实验要求在尽量短的回波时间内实现设定的扩散权重,所以DSG会使用系统的最强梯度磁场强度及切换率.连续快速切换的同方向强梯度磁场会引起较强的涡流,严重影响结果质量.本方案中相邻两个DSG方向自然接近相反,这样可减小涡流对结果的影响^[14];其次,本方案得到DTI数据集中包含 m 个DSG方向得到的数据,其中的某一子集或某几个子集的合集集中的DSG方向集合同样接近空间均匀分布^[15].所以即使某些DSG方向对应的数据损坏,剩余的其他数据仍然可以利用.另外,本文所述方法也可用于研究人体内水分子的非高斯扩散及频率空间(k 空间)非笛卡尔采集和图像重建^[16-19].

5 结 论

以广义Fibonacci数列为基础可得到连续方向数目的扩散敏感梯度磁场方向分布方案,整个方案的方向均匀性较好,数据集内的部分数据仍然具有很好的空间均匀性,而且以广义Fibonacci数列为基础的方向分布方案中,相邻两个DSG方向自然接近相反,可减小涡流对结果的影响.

参考文献

[1] Wedeen V J, Rosene D L, Wang R, Dai G, Mortazavi F, Hagmann P, Kaas J H, Tseng W Y 2012 *Science* **335**

- 1628
- [2] Gao S, Wang X Y, Bao S L 2006 *Prog. Nat. Sci.* **16** 706
- [3] Zhang S Y, Bao S L, Kang X J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 208703 (in Chinese)[张首誉, 包尚联, 亢孝俭 2013 物理学报 **62** 208703]
- [4] Hasan K M, Parker D L, Alexander A L 2001 *J. Magn. Reson. Imaging* **13** 769
- [5] Alderman D, Sherwood M H, Grant D M 1990 *J. Magn. Reson.* **86** 60
- [6] Basser P J, Pierpaoli C 1998 *Magn. Reson. Med.* **39** 928
- [7] Skare S, Nordell B 1999 *Proceedings of the 7th Annual Meeting of ISMRM Philadelphia, United States of America, May 22-28, 1999* p322
- [8] Jones D K, Horsfield M A, Simmons A 1999 *Magn. Reson. Med.* **42** 515
- [9] Conturo T E, McKinstry R C, Akbudak E, Robinson B H 1996 *Magn. Reson. Med.* **35** 399
- [10] Wong S T, Roos M S 1994 *Magn. Reson. Med.* **32** 778
- [11] Anderson P G 1993 *Applications of Fibonacci numbers* (Berlin: Springer-Verlag) p1
- [12] Chan R W, Ramsay E A, Cunningham C H, Plewes D B 2009 *Magn. Reson. Med.* **61** 354
- [13] Chan R W, Ramsay E A, Cheung E Y, Plewes D B 2012 *Magn. Reson. Med.* **67** 363
- [14] Gao S, Zu Z L, Bao S L 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 325
- [15] Winkelmann S, Schaeffter T, Koehler T, Eggers H, Doesel O 2007 *IEEE Trans. Med. Imag.* **26** 68
- [16] Qin L, Li Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 038701
- [17] Bao S L, Du J, Gao S 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 088701 (in Chinese)[包尚联, 杜江, 高嵩 2013 物理学报 **62** 088701]
- [18] Du J, Diaz E, Carl M, Bae W, Chung C B, Bydder G M 2012 *Magn. Reson. Med.* **67** 645
- [19] Fang S, Wu W C, Ying K, Guo H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 048702 (in Chinese)[方晟, 吴文川, 应葵, 郭华 2013 物理学报 **62** 048702]

An optimal direction strategy of diffusion sensitive gradient magnetic fields in magnetic resonance diffusion tensor imaging based on generalized Fibonacci sequence*

Gao Song^{1)2)†} Zhu Yan-Chun¹⁾ Li Shuo¹⁾²⁾ Bao Shang-Lian¹⁾

1) (*Beijing Key Laboratory of Medical Physics and Engineering, School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China*)

2) (*Medical Imaging Physics Laboratory, Health Science Center of Peking University, Beijing 100191, China*)

(Received 8 December 2013; revised manuscript received 25 December 2013)

Abstract

In order to accurately investigate the directionally anisotropic diffusion information of water molecule in tissue, the diffusion sensitive gradient fields need to be applied along many directions in order to obtain corresponding diffusion coefficients in diffusion tensor imaging (DTI) and high angular resolution diffusion imaging (HARDI) experiments. The problems facing to current diffusion sensitive gradient magnetic fields encoding schemes include the spatial uniformity of directions needs to be improved, there is no general direction design for arbitrary number of directions, flaw in any directions will cause failure or defect of the whole dataset. In this paper, we provide a generalized Fibonacci number based direction encoding scheme. This scheme can generate nearly uniform distribution for arbitrary number of directions and satisfy the spatial uniformity using partial directions from one raw data set. Besides, the diffusion sensitive gradients of neighboring directions are nearly opposite, which will reduce eddy current induced by rapid varying gradient magnetic fields.

Keywords: diffusion sensitive gradient, Fibonacci sequence, diffusion tensor imaging

PACS: 87.61.-c, 87.57.-s, 83.85.Fg

DOI: [10.7498/aps.63.048704](https://doi.org/10.7498/aps.63.048704)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 81171330) and the National Basic Research Program of China (Grant No. 2011CB707701).

† Corresponding author. E-mail: gaoss@hsc.pku.edu.cn