

综 述

CT不完全投影数据重建算法综述*

杨富强[†] 张定华 黄魁东 王鹄 徐哲

(西北工业大学现代设计与集成制造技术教育部重点实验室, 西安 710072)

(2013年10月4日收到; 2013年11月5日收到修改稿)

本文主要针对计算机断层成像(computed tomography, CT)不完全投影数据重建中探测器全覆盖稀疏角度重建和探测器部分覆盖截断数据重建问题, 综述了其在研究方法上国内外的进展. 在探测器对被检测物体可以完全覆盖的情况下, 针对稀疏均匀采样和视角受限采样, 探讨了离散模型迭代重建算法和压缩感知采样重建算法. 在探测器对被检测物体不能完全覆盖的情况下, 探讨了锥束螺旋BPF重建算法、加型迭代重建算法和锥束FDK改进算法. 论文可以为CT重建领域的研究工作者提供全面的方法梳理和总结, 并指出了当前研究的重点和未来研究的方向.

关键词: 不完全投影数据, 压缩感知, 有限角度, 截断数据

PACS: 87.59.-e, 87.57.Q-, 42.30.Wb

DOI: 10.7498/aps.63.058701

1 引 言

计算机断层成像(computed tomography, CT)技术是通过物体进行不同角度下的射线投影测量而获取物体横截面信息的成像技术^[1]. 传统的CT重建算法是以检测目标为中心, 通过旋转扫描, 采集目标在不同视角下的投射数据, 利用图形重建算法还原出检测目标的断层图像^[2]. 1985年, Tuy^[3]和Smith^[4]给出了精确重建的充分必要条件; 1991年Grangeat^[5]利用射线变换和三维Radon变换的关系, 实现了由短物体的锥束扫描数据重建图像的精确算法^[6]. 已经证明, 由完全投影数据可以惟一重建图像^[7]. 然而对于不满足数据完备性条件的不完全投影数据, 即投影数据不满足Tuy-Smith数据完备性条件^[3,4]时, 现有经典滤波反投影类重建算法不能精确重建断层图像. 2004年Zou等^[8]提出了螺旋锥束CT的精确重建算法, 被称为反投影滤波(back-projection filtration, BPF)重建算法. 该算法揭示了待重建图像和投影数据间的某种局

部依赖关系, 当投影数据在水平方向有某种截断或投影线只覆盖部分区域时可以精确重建感兴趣区域图像^[9-11]. Ye等^[12,13]将该算法推广到更一般的扫描轨迹中. Guo等^[14]对滤波反投影(filtered back-projection, FBP)算法中的滤波函数进行了改进, 可依据几何对称性将截断投影数据补齐. Li等^[15]提出的基于反投影滤波算法的半覆盖重建算法可以处理投影数据的横向截断问题, 但反投影积分区间与PI线的位置关系使得积分区间不一致, 重建效率低. 张峰等^[16]针对半覆盖成像中扁平形状物体的不完全重建问题, 提出一种改进的反投影滤波型算法, 将角度循环移至PI线外, 实现了投影数据求导、反投影和沿PI线滤波三个步骤的并行计算.

针对不完备投影数据重建的问题, 总体来说主要有两种思路: 一是基于投影数据恢复的方法, 即通过插值或空间变换迭代等补全投影数据. 另一种是迭代过程中对重建的图像加以限制, 如先验条件, TV约束等^[17]. 后一种方法对问题的解决更具有实用性, 它可将待重建图像的先知信息转化为约

* 国家科技重大专项(批准号: 2012ZX04007021)、国家自然科学基金青年科学基金(批准号: 51105315)和陕西省自然科学基金基础研究计划(批准号: 2013JM7003)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: yangfuqiang029@163.com

ART算法的基本思想在图3中可以表示: 将所得方程组看成是 N 个超平面, 在给定初始图像估计值 $f(0)$ 条件下, 将其投影到第一个方程所代表的超平面得到 $f(1)$, 再将 $f(1)$ 投影到第二个超平面得到 $f(2)$, 以此类推则将 $f(i-1)$ 投影到第 i 个方程所表示的超平面时得到 $f(i)$, 当投影进行到最后得到 $f(M)$, 该过程为一次迭代. 第二次迭代时, 以 $f(M)$ 为初值再次向各超平面投影得 $f(2M)$, 直到满足收敛条件.

$$f_j^{(i)} = f_j^{(i-1)} + \frac{\left(p_i - \sum_{k=1}^N f_k^{(i-1)} w_{ik}\right)}{\sum_{k=1}^N w_{ik}^2} w_{ij},$$

$$(j = 1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

ART算法虽然适合投影数据不完全、投影角度缺失以及投影间隔不均匀等场合的图像重建, 但其计算量大, 重建速度慢, 因此从投影数据访问方式出发, Herman等^[22]提出了质数分解法, Guan等^[23]提出了多层访问方式, Mueller等^[24]提出了

加权距离访问方式, 王宏钧等^[25]提出了加权距离正交投影排序方法等. 然而无论是从投影数据访问方式^[22-26], 还是松弛因子选择^[22,27], 或是权因子计算^[28-30], 该类方法并不能减少单次迭代时间, 以至加速效果不是很明显. 至此, 郭威^[31]从迭代过程中投影次序角度出发, 提出了一种基于初始猜测解估计超平面误差进而选择投影次序的改进算法. 该算法结合CT成像系统病态问题模型中超平面偏离固有位置这一特征, 将投影按照从误差较大平面向误差较小平面的顺序进行, 如图4所示. 然而该方法在计算初始猜测解时有一定的局限性, 它要求方程组所包含的矩阵必须是方阵, 进而限制了该方法的使用范围. 于是在此基础上, 另一种确定投影次序的方法被提出^[32], 以暂时迭代解与实际测量值进行比较从而估计超平面的误差. 但是每一轮迭代前都要重新确定投影次序, 先选择偏离程度较大超平面进行正交投影, 再投影偏离程度较小的超平面, 大量时间花费在搜索超平面误差计算上, 所以该方法也有自己的局限性.

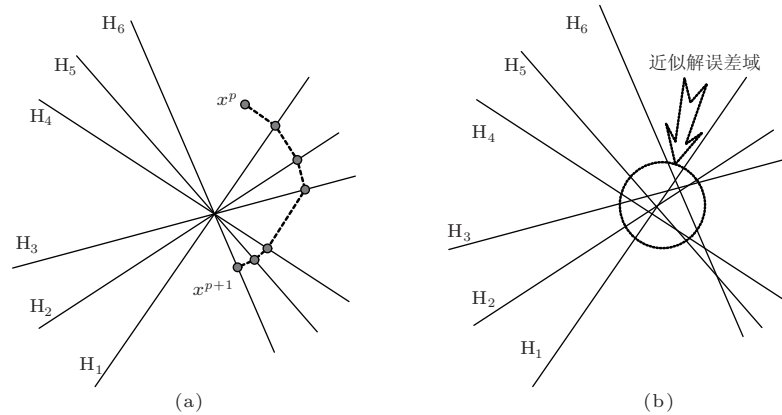


图4 ART算法 (a) ART算法投影次序示意图; (b) 含误差的超平面示意图

相比之下, Andersen等^[33]提出的联合代数重建算法(simultaneous algebra reconstruction technique, SART)发挥了自己的优势. 该算法是将相同投影角度下通过本像素的所有射线误差值进行累加, 实际上是对ART中噪声进行了平滑处理. 和ART算法相比, SART算法具有好的稳定性, 但其最大缺点是收敛速度慢. 于是, 李春芳等^[34]对该算法作了适当改进, 将穿过体素的射线长度和灰度值综合考虑对误差进行修改, 有效抑制了SART产生的边缘效应, 提高了重建精度. Fang等^[35]采用基于PC的GPU硬件并行加速技术来提高SART

算法的重建速度. 孔慧华等^[36]把有序子集算法(ordered subsets, OS)应用到SART算法中, 提出了序列子集联合代数重建技术. 高欣^[37]提出了模糊向量优化法, 进而解决不完全投影数据的成像问题, 取得了较好重建效果.

对于有限角度重建问题, 王浩^[38]在正则化方法上提出了一种基于改进正则化方法的有限角度CT图像重建算法, 针对正则化参数, 将其与同伦方法的理论思想相结合, 引入一种下降速率可调的连续参数修混合模型修正方法, 即将待求信息与数据保真项通过权衡系数来平衡, 进而获得近似解:

$$\begin{aligned} H(\lambda, x) &= (1 - \lambda) f(x) + \lambda g(x) \\ &= (1 - \lambda) \|Rx - p\|^2 + \lambda \|x\|^2. \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式的改进正则解可表示成

$$x = [(1 - \lambda) R^* R + \lambda I]^{-1} (1 - \lambda) R^* p. \quad (4)$$

实际上, 上述算法也可以看作是基于光滑凸函数和非光滑凸函数的拉格朗日乘子算法, 但本质又和基于压缩感知原理的凸优化问题有所区别, 这里对系数矩阵 R 要求必须为满秩, 然而有限角度 CT 重建过程中的线性方程未知量个数均大于方程个数, 即为非满秩矩阵, 所以系数矩阵必须进行处理以达到满秩要求, 这样就会给近似解带来二次误差. 虽然该方法有效避免了传统试探正则化参数而带来的不便, 但是重建速度基本相当. 而且 (3) 式中正则参数 λ 被限制在 $(0, 1)$ 之间, 参数的下降速率以下式的形式进行调整:

$$\lambda(n) = \frac{1}{1 + e^{-\beta(n_0 - n)}}. \quad (5)$$

对于简单结构物体可能适应, 但是对于复杂异性结构物体来说还有待探讨.

随后, 作者又给出了一种基于二步迭代法的重建算法. 该算法是建立在 ART 算法之上的混合算法. 首先将 ART 迭代结果进行非负性约束, 之后以此作为二步迭代的初值代入下式:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (1 - \alpha) x_{t-1} + (\alpha - \beta) x_t \\ &\quad + \beta C^{-1} [x_t + R^* (p - Rx_t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

从 (6) 式可以看出解 x_{t+1} 的值由 x_t 和 x_{t-1} 共同决定, 有效利用了前面的两次信息, 收敛速度提高. 但是从实验结果来看, 由于近似解是前两次近似解的函数, 必然出现误差累计, 所以图像边缘出现严重的锯齿状结果.

3.1.2 压缩感知采样算法

2006 年 Candes 等 [39]、Donoho 等 [40] 对 Kashin [41] 提出的信号稀疏和逼近理论进行了深入研究, 提出了一种新的信息获取理论-压缩感知 (compressed sensing, CS): 只要信号在某一个正交空间具有稀疏性, 就可以较低的频率采样信号高概率重构原始信号. 根据 CS 理论, 在迭代重建中增加关于稀疏变换后图像的稀疏性约束, 可以解决内部问题、少视角问题等不完备投影数据的精确重建问题 [42]. 图 5 展示了压缩感知理论框架, 表达式为

$$\min \|X\|_0, \quad \text{s.t. } Y = \Phi X = \Phi \Psi s = \Theta s. \quad (7)$$

CS 理论 [43-48] 为 CT 图像重建提供了新的思路, 基于同种材料的衰减在 CT 图像灰度上表现为近似分段常数这一特点 (梯度图像稀疏), 近年来, 关于图像全变差最小化 (total variation minimization, TVM) 的迭代算法 [39, 49-51] 取得了令人欣喜的成果. 2006 年, Sidky 等 [52] 首次利用梯度稀疏性先验知识, 结合凸集投影 (projection onto convex sets, POCS) 和小波阈值重建出稀疏角度均匀采样信号, 提出一种 TVM-POCS (total variation minimization-projection onto convex sets) 重建方法, 该方法是一种基于加型的迭代算法. TVM-POCS 算法虽然给出了求解有限投影数据的重建方法, 但是在图像的边缘部分频域上表现为高频分量, 相当于高频噪声对图像有污染, 于是重建轮廓附近存在灰度渐变的伪影. 2008 年, Sidky 和 Pan 等 [53] 对上述算法进行了改进, 提出一种 ASD-POCS (adaptive steepest descent projection onto convex sets) 求解算法. 应用正则化方法将目标函数 Φ 定义为优化准则 L 和惩罚项 R 和的形式, 以罚函数的形式增强解的稳定性.

$$\min_{f \in H(f)} \text{TV}(f), \quad \text{s.t. } \|Wf - p\| \leq \varepsilon, \quad f \geq 0, \quad (8)$$

$$\hat{X} = \arg \min \|WX - P\|^2 + \alpha \|X\|_{\text{TV}}. \quad (9)$$

但是 ASD-POCS 算法需要多组实验人工选取参数用以保持约束条件和目标函数之间的平衡, 而且该算法将目标函数和约束条件分别迭代优化, 所以所得解更容易陷入局部极值, 影响问题解的鲁棒性. 并且 ASD-POCS 算法迭代过程采用 ART 算法. 这样对投影角度序列有一定依赖性, 那么必然会出现收敛速度减慢和重建质量下降等问题. 实验表明, ASD-POCS 算法同样存在重建过程耗时等缺点.

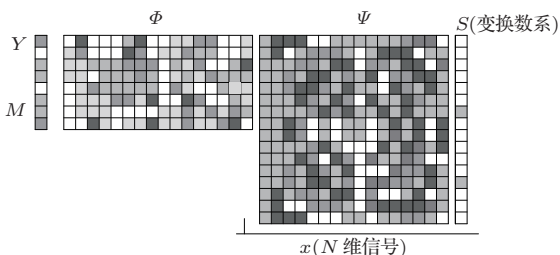


图 5 压缩感知采样原理

于是, 2012 年, Niu 等 [54] 针对 TV 正则化算法中存在的计算效率低和重建过程非一致参数调和两大问题, 在 ASD-POCS 算法基础上对数据的保

真项进行修正, 提出一种ABOCS(accelerated barrier optimization compressed sensing) 优化算法, 以数据保真度建立模型:

$$\bar{f}^* = \arg \min \left[\|\bar{f}\|_{\text{TV}} + \frac{1}{t} \left(-\log \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \|M\bar{f} - \bar{b}\|_2^2 \right) \right) \right], \quad \text{s.t. } \bar{f} \geq 0. \quad (10)$$

首次给出了梯度投影算子:

$$\mathbf{g} = \nabla \|\mathbf{f}\|_{\text{TV}} + \frac{M^T (M\mathbf{f} - \mathbf{b})}{\max \left[\beta, t \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \|M\mathbf{f} - \mathbf{b}\|_2^2 \right) \right]}. \quad (11)$$

ASD-POCS通过最小化总变差和投影到凸集数据保真误差来获取信息, 而Niu提出的ABOCS算法特点在于不同数据重建其参数固定, 避免了正则化迭代过程中冗余的参数调整和复杂程序. 该算法的优点在于较其他算法有更快的重建速度, 但是相比之下, 该算法的收敛性略微有些不足. 图6和表1给出了算法比较.

国内学者在压缩感知方面也做了不少的工作. 2009年, 练秋生等^[55]将压缩感知理论用于CT图像重建中, 利用ART算法得到满足约束条件的原始图像, 然后进行全变差调整, 循环迭代得到最终图像. 该方法是压缩感知在CT重建应用领域的一个尝试, 有很多方面考虑不是很全面, 重结果也不算精确. 2011年, 李毅^[42]结合CS理论将CT图像梯度稀疏性先验知识加入SART算法, 提出一种改进的TV-SATR算法. 该算法较Sidky等^[52]的梯度稀疏总变差不同的是, 以范数 $p = 1/2$ 替代 $p = 1$:

$$\begin{aligned} \text{TV}_{1/2}(f) &= \left(\sum_{s,t} |\text{grad}(f_{s,t})|^{1/2} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{s,t} \left[(f_{s,t} - f_{s-1,t})^2 + (f_{s,t} - f_{s,t-1})^2 \right]^{1/4} \right)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

然后对其求梯度.

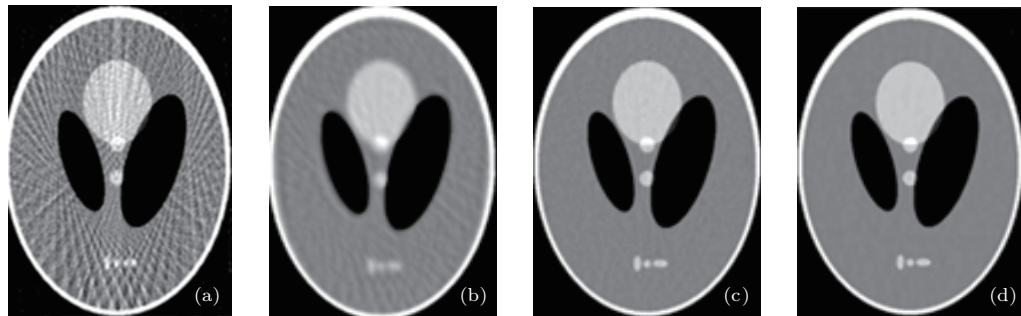


图6 三种算法重建结果比较 (a) FBP; (b) ASD-POCS (1800 s); (c) ASD-POCS(23000 s); (d) ABOCS(1800 s)

表1 三种重建算法比较

算法名称	算法描述	主要特点	存在问题
FBP	通过傅里叶逆变换和重新确定积分限来实现	计算简单, 重建速度快	不完全投影数据重建图像出现严重条状伪影
TVM-POCS	利用TV等约束条件的代数迭代方法	迭代过程中的参数因子是任意的	重建轮廓附近存在灰度渐变的伪影
ASD-POCS	目标优化的环节上, 使用最速下降方法	考虑了噪声、误差对投影数据的不一致影响, 人工选取迭代因子	收敛速度慢, 约束项引起的算法鲁棒性差, 数据序列依赖性强
ABOCS	利用数据保真度作为约束限制	针对不同数据重建其参数固定	收敛性略微有些不足

相比之下, $\text{TV}_{1/2}$ 梯度较 TV_1 梯度稀疏性更强, 并且 $\text{TV}_{1/2}$ 梯度具有无偏性^[56], 从图7可以看出两种不同的TV梯度稀疏性态, 跟 TV_1 相比较, $\text{TV}_{1/2}$ 梯度的约束区域更易于和等高线坐标轴相

交, 其解更稀疏. 虽然 $\text{TV}_{1/2}$ 梯度较 TV_1 梯度更具有稀疏性, 且有效的加快了收敛速度, 但是整体重建时间长, 且由于稀疏性高, 对于图像细节信息往往会丢失掉, 从而降低图像重建的精度, 所以某些

情况下, 尤其是对于图像局部等一些感兴趣区域要求较高的部分, 要获得高的重建效果, 算法上还需要进一步的改进.

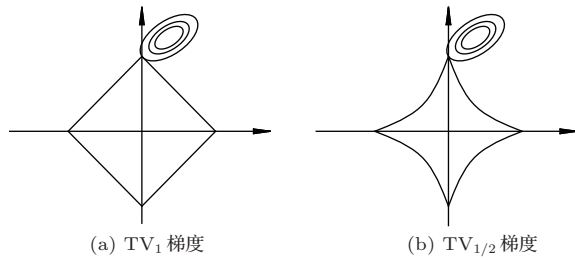


图7 TV₁ 梯度和TV_{1/2} 梯度产生解的可能性 (a) $p = 1$ 时的TV 梯度; (b) $p = 1/2$ 时的TV 梯度

3.2 截断数据重建问题(探测器部分覆盖)

如图8所示, 截断型数据重建问题往往是由于探测器相对较短使得射线束不全包容被测物而引起的.

3.2.1 锥束螺旋BPF重建算法

1997年, Danielsson等^[57]首次提出了PI线的概念: 在如下定义的螺旋线 $\mathbf{r}_0(\lambda) = (R \cos \lambda,$

$R \sin \lambda, h\lambda/2\pi)$ 上取任意两点 $\mathbf{r}_0(\lambda_1)$ 和 $\mathbf{r}_0(\lambda_2)$, 满足条件 $|\lambda_1 - \lambda_2| < 2\pi$ 的两点连线即为PI线, 如图9所示.

BPF算法^[8,58-60]的思想建立在PI线基础上, 是2004年以Pan为首的课题组提出的一种重要重建算法, 该算法将Katsevich算法^[61,62]的积分顺序进行交换, 反投影后再滤波, 是继Katsevich算法以后的另一个重要的锥束CT精确重建算法. 已经证明, 螺旋线扫描方式下, 螺旋线组成的圆柱体积内任意点均有一条PI线经过^[57]. 因此, 只要能够重建出圆柱内的所有PI线, 也就得到了螺旋线扫描范围内的所有物体图像. BPF算法虽然针对螺旋锥束CT提出, 该算法也被应用到扇束、平行束CT精确重建中^[60]:

1) 将各角度下投影数据进行求导:

$$G(\mathbf{r}_0(q), \hat{\beta}(\mathbf{r}', \lambda)) = \frac{\partial}{\partial q} P(\mathbf{r}_0(q), \hat{\beta}(\mathbf{r}'\lambda)), \quad (13)$$

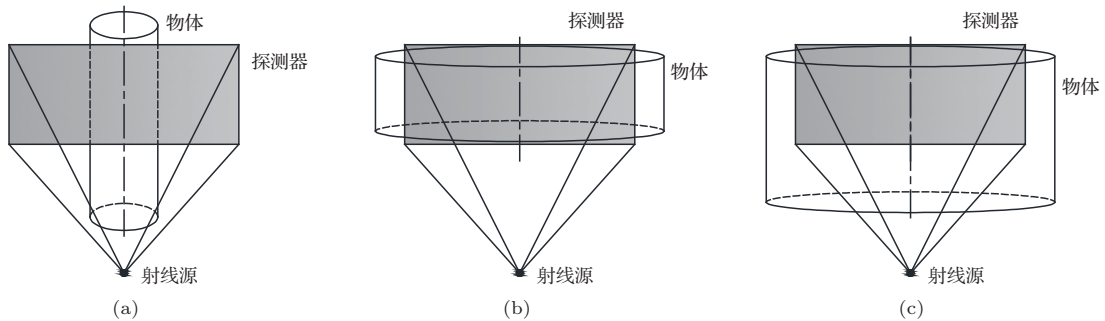


图8 超出探测器范围物体 (a) 长物体-垂直方向数据截断; (b) 宽物体-水平方向数据截断; (c) 大物体-双视野数据截断

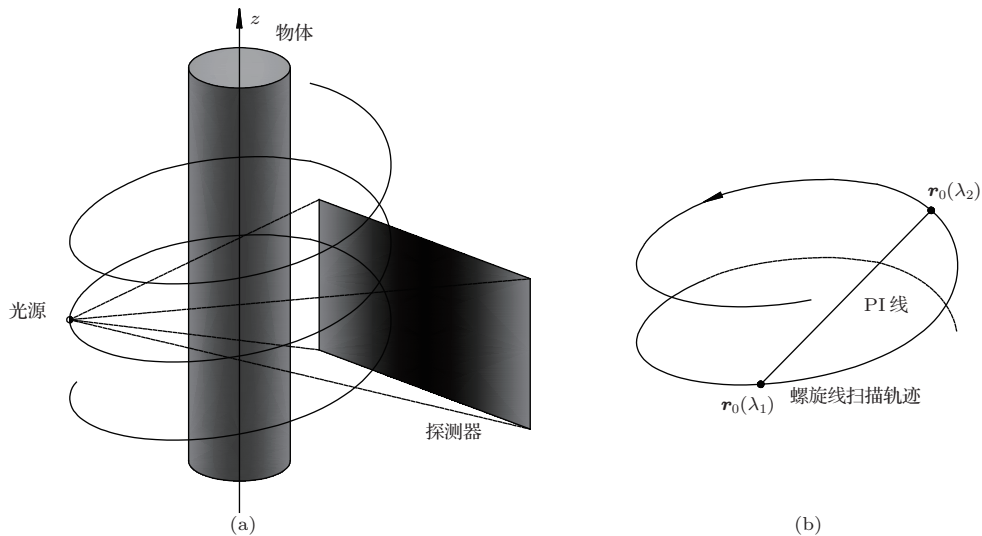


图9 PI线螺旋扫描重建 (a) 长管状物体垂直方向截断扫描; (b) PI线示意图

式中 $\mathbf{r}_0(q)$ 为源点, q, λ 表示该源点角度坐标; $\mathbf{r}'$ 表示 PI 线上从角坐标 λ_1 到 λ_2 的任意点, $P(\mathbf{r}_0(q), \hat{\beta}(\mathbf{r}', \lambda))$ 表示从源点 $\mathbf{r}_0(q)$ 沿 $\hat{\beta}(\mathbf{r}', \lambda)$ 方向射线的投影.

2) 对 PI 线上物体图像点加权反投影:

$$g(\mathbf{r}') = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\lambda)|} G(\mathbf{r}_0(q), \hat{\beta}(\mathbf{r}', \lambda)), \quad (14)$$

投影数据角度范围在 $\lambda_1 - \lambda_2$ 内.

3) 求取 PI 线上 Hilbert 变换, 获取重建结果:

$$\begin{aligned} & f(x_\pi, \lambda_1, \lambda_2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_\pi)(x_\pi - x_1)}} \\ & \times \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'_\pi \sqrt{(x_2 - x'_\pi)(x'_\pi - x_1)}}{\pi(x_\pi - x'_\pi)} \right. \\ & \left. \times g(x'_\pi, \lambda_1, \lambda_2) + C \right], \quad (15) \end{aligned}$$

式中 C 为 PI 方向投影值, x_1, x_2 为 PI 的两个端点.

BPF 算法的最大优点在于它第一次在数学上解决了横向截断的投影数据的 CT 精确重建问题, 能够利用较少的投影数据精确重建出物体图像. 但该算法同样存在不足, 可以看出, BPF 重建是在 PI 线上完成的, 要得到最终的物体图像需要进行三维重采样; 如果反投影过程出现问题将会产生重建结果扭曲, 且三维空间重采样需要大量计算, 从而降低了工作效率、图像分辨率. 随后, Pan 等对 BPF 算法进行改进提出了最小数据滤波反投影 (min-

imum data filtered-back projection, MD-FBP) 算法, 即先对投影数据滤波处理, 再进行反投影获得物体沿 PI 线的采样图像. MD-FBP 较 BPF 算法的优势在于它避免了 BPF 算法中反投影过程可能产生的奇异点通过滤波处理把误差传递给其他的图像点 [63]. 但是, MD-FBP 算法反投影计算对应的投影角度积分区间是变化的, 重建过程的反投影计算量繁重, 且不适合并行计算.

为了解决该问题, 2013 年, 张峰 [64], 对于 PI 线段上无数据截断的截断投影数据的三维图像重建, 提出了基于数据重排方法的 T-BPF (Tent-BPF) 算法. 其将投影数据映射到一个虚拟矩形探测器上, 重排后虚拟矩形探测器的上下边界与光源的连线成帐篷状, 然后应用推导的 BPF 型算法重建重排后的平行投影数据. 图 10 可以看出, $P_1(\beta, m, n)$ 可以被重排成平行数据 $P(\theta, t, s)$, 关系如下:

$$\begin{aligned} & P(\theta, t, s) \\ &= P_1\left(\beta - \arcsin\left(\frac{t}{R}\right), \frac{tR}{\sqrt{R^2 - t^2}}, \frac{sR^2}{R^2 - t^2}\right), \quad (16) \end{aligned}$$

其中 $\theta = \beta - \arcsin\left(\frac{t}{R}\right)$; $m = \frac{tR}{\sqrt{R^2 - t^2}}$; $n = \frac{sR^2}{R^2 - t^2}$, $P_1(\beta, m, n)$ 表示虚拟探测器上的数据, t 表示重建物体的半径. 与原 BPF 算法相比, T-BPF 算法的重建效率和并行性质有很大提高, 具有和 FDK 算法相当的并行性质.

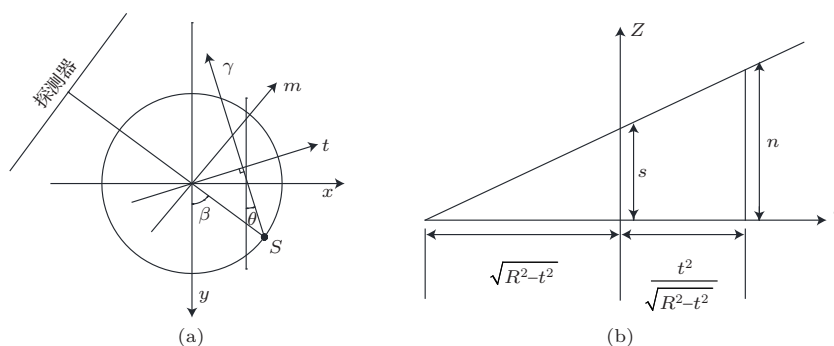


图 10 $P_1(\beta, m, n)$ 和 $P(\theta, t, s)$ 坐标重排投影关系示意图 (a) z 轴方向俯视图; (b) t 轴方向俯视图

3.2.2 加型迭代重建算法

针对小面阵平板探测器测量长管道 CT 检测等截断数据重建问题, 2008 年, 曾理等 [65] 提出不同于王浩 [38] 的另外一种基于二步迭代的 CT 重建算法. 首先利用 SART 计算出初值后, 再引入非

负性约束, 得到体数据校正值, 最后使得总变差最小. 该算法是一种基于 SART 的多进程并行重建算法, 如图 11 所示, 对于长管道采用分段扫描方式. 当一个分段的投影数据完整时, 继续扫描的同时进行该分段的多进程并行重建, 其中投影

数据沿扫描的方向均匀分成与运算进程数目相同的块 R_i . 将个进程 i ($i = 0, 1, \dots, Q-1$) 的重建区域 R_i 的体数据离散化后得到 N 维图像向量 $F = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T$, 经过 R_i 的扫描组成 M 维投影数据 $P = [P_1, P_2, \dots, P_M]^T$.

$$\begin{aligned}
 f_j^{(0)} &= 0, \\
 f_j^{(k)} &= f_j^{(k-1)} + \frac{1}{\sum_{l \in [D_i, D_{i+1})} w_{lj}} \\
 &\quad \times \sum_{l \in [D_i, D_{i+1})} \left(\frac{p_l - \sum_{j=1}^N w_{lj} f_j^{(k-1)}}{\sum_{j=1}^N w_{lj}} \right) w_{lj}, \\
 (j &= 1, 2, \dots, N),
 \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $W = (w_{ij})$ 为 $M \times N$ 维投影系数矩阵, 表示第 j 个像素对第 i 条射线的贡献率, $f^{(0)}$ 是待检测管道的会读数据的初始值, $[D_i, D_{i+1})$ 为进程 i ($i = 0, 1, \dots, Q-1$) 负责重建的区域 R_i 对应的投影数据的范围, K 为迭代次数.

由于采用分段信息采集方式, 必然出现数据部分叠加, 产生冗余数据, 这样会给数据计算带来误差. 再者, 如果射线束不足以覆盖整个管状物的横截面时, 该算法显然已经无能为力.

2011 年, 刘宝东^[66]针对管状物的管壁较厚而射线不足以穿透管壁中弦长较长区域时产生的管壁长弦投影数据截断进而造成的重建图像边缘模糊及伪影问题, 提出了子区域分段常数修正的 PCC-SART (piecewise constant corrected-sart) 算法. 如图 12 所示, 黑色区域表示射线无法穿透管状物, 因此每个扫描角度下, 该部分的投影数据均是缺失的. 投影正弦黑色块表示了数据缺失部分.

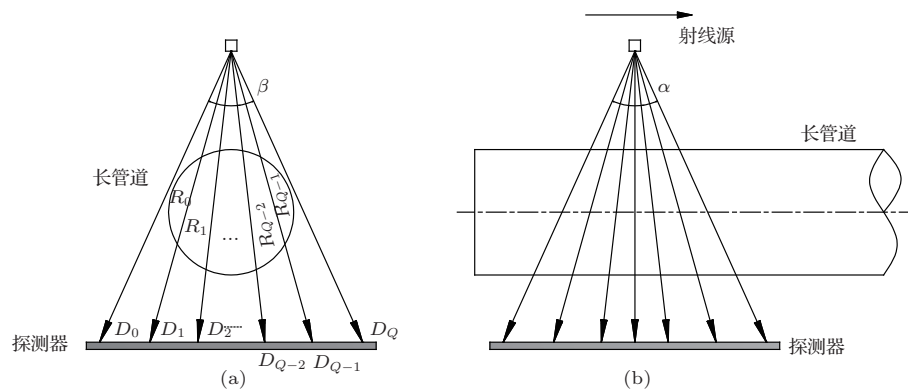


图 11 长管道分段检测装置 (a) 投影数据管道截面示意图; (b) 沿管道径向射线示意图

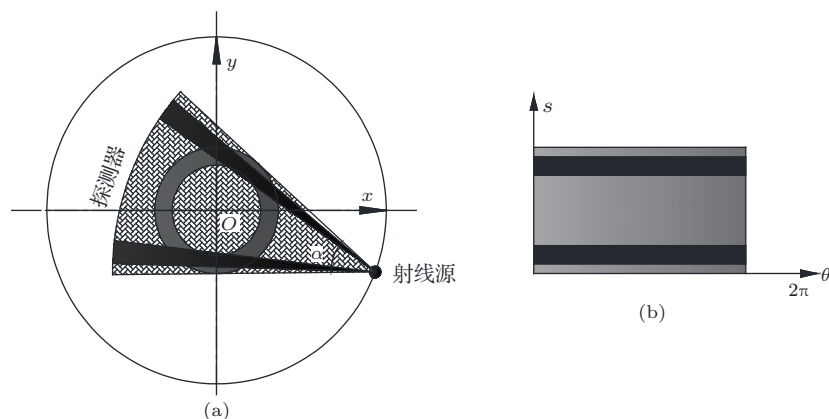


图 12 管道长弦截断问题 (a) CT 扫描示意图; (b) 截断问题的投影正弦图

将 SART 算法用于管壁长弦投影数据截断重建问题能够产生较好的重建结果, 得到比较清晰的物体结构. 但是, 在有些局部区域, 即使经过很多

次迭代仍然无法得到满意的结果. 因此, 如何得到局部最优对于管壁长弦投影来说是迫切解决的问题. 由于 CT 检测的管状物一般都是物质分段均匀

的, 满足密度近似分段常数, 即图像灰度满足近似分段常数, 所以该算法先用 C-V(Chan-Vese) 活动轮廓模型将图像划分成不同的子区域, 再用各个子区域灰度的平均值来代替该子区域内各点的灰度值.

值得注意的是, 与 SART 算法相比, PCC-SART 算法具有收敛速度快、稳定性好等优点. 然而与其他大多数迭代重建算法一样, 该算法存在计算时间长等问题. 如何加速该算法以及如何设定算法中各个参数的值, 还有待于进一步研究.

3.2.3 锥束 FDK 改进算法

1984 年, Feldkamp, Davis 和 Kress 三人针对锥束几何圆形扫描轨迹首次提出了一种经典的近似三维图形重建 FDK 算法. 此后, 基于 FDK 算法也衍生出许多近似算法. 2011 年, 郭吉强^[67]就半覆盖螺旋锥束 CT 的投影数据沿面板探测器的行方向是截断的等大物体检测问题, 研究了一种半覆盖锥束 CT 截断投影数据重建偏心 FDK 改进算法. 然而由于斜坡滤波器的全局性, 使得重建图像受截断误差影响较大. 文章用局部化滤波器代替原来偏心 FDK 算法中的全局斜坡滤波器, 得到改进的偏心 FDK 重建算法. 但是对于截断投影中, 探测器偏置产生的冗余数据, 应该如何高效利用亦是急需解决的问题. 如图 13 所示.

于是 2013 年, Hao 等^[68]针对投影数据横向截断以及偏置产生的数据冗余问题, 提出了一种投影数据加权预处理的重建思路和解决方案. 即在传统的滤波反投影方法中针对数据冗余区域进行加权处理, 保证处理后投影数据的平滑连续及反投影系

数归一化. 但是, 这样就一方面要求每个待重建点加权后累计反投影一次, 另一方面要求保证投影数据加权之后平滑和连续. 于是设计一种加权函数 $w(u)$, 将数据冗余的探测器宽度区域记作 $[\mu_-, \mu_+]$, 宽度为 2Δ .

$$w(u) = \begin{cases} 0, & 0 < u < u_-; \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{u - u_-}{u_+ - u_-}\right), & u_- \leq u \leq u_+; \\ 1, & u_+ < u < L. \end{cases} \quad (18)$$

首先将偏置获取的投影数据 $X(u, v, \lambda)$ 在宽度方向上对冗余数据进行加权计算处理:

$$\tilde{X}(u, v, \lambda) = w(u) X(u, v, \lambda). \quad (19)$$

再结合 FDK 算法进行三维重建:

$$\begin{aligned} f(x, y, \lambda) &= 2 \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{U(x, y, \lambda)^2} X^F(u, v, \lambda) d\lambda, \\ X^F(u, v, \lambda) &= w(u, v) X'(u, v, \lambda) \times g(a), \\ U(x, y, \lambda) &= R + x \cos \lambda + y \sin \lambda. \end{aligned} \quad (20)$$

上述方法就探测器偏置放置产生的冗余投影数据进行了加权处理, 进而保证了数据在反投影时的归一性和加权边界区域的平滑性. 但是, 重建精度与数据冗余区域长度密切相关, Δ 的大小标志着探测器偏置情况和截断区域大小. 如果冗余长度 2Δ 过小, 函数 $w(u)$ 下降速度过快, 加权后所得投影数据不能很好地平滑过渡到数据缺失区域, 滤波反投影重建误差将会加大, 相当于截断伪影, 这也是不允许的, 然而, 文章并没有给 Δ 出的选值方法.

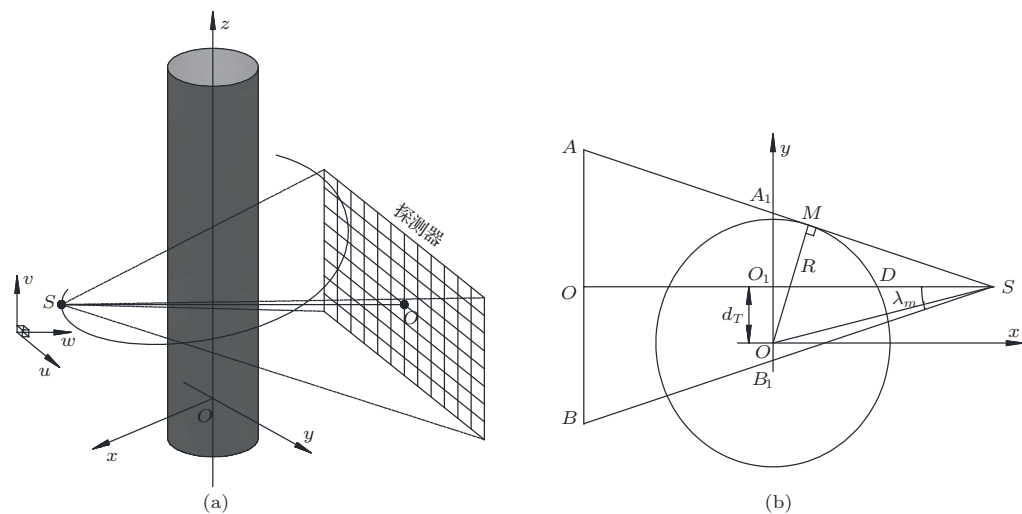


图 13 半覆盖锥束 CT 扫描 (a) 半覆盖螺旋锥束 CT 扫描几何结构; (b) 半覆盖螺旋锥束 CT 扫描俯视图

4 总结和讨论

本文综述的不完全投影重建算法, 不同算法适用场合不尽相同, 具体场合下, 各类算法均有较好的适用性. 现有的不完全投影重建算法虽然在重建时间上、收敛速度上、重建精度上有很大提高, 但是没有一种同时满足速度和精度的高效算法. 而且就半覆盖下不完全投影重建问题, 不同覆盖面积获取的有效信息产生的冗余数据不同, 面积过大必然造成数据冗余量大, 面积过小又不能重建精确图像, 因此, 寻求高效率的冗余数据处理算法也是发展不完全投影数据重建算法的一个核心问题. 如何建立一种基于先验信息知识库的通用算法, 也是值得研究的内容^[69,70].

CS理论的提出, 为不完全投影重建问题的解决提供了新思路. 它是对传统信号处理的极好补充和完善. CS理论实现重点是信号的稀疏性, 因此就信号如何稀疏表示的研究同样重要, 它是CS理论实现的基础^[71]. 一方面, CS理论对采集到的信息位置没有依赖性, 使得重建时只可以使用有限范围内的数据; 另一方面, CS理论对所采集的数据量要求也较低, 适于解决数据不完全问题. 但在压缩感知理论中的测量信号比原始信号的维数少很多, 且大规模的限制条件在实际解决过程中为大系统限制, 解决过程非常繁琐, 因此基于凸优化技术的欠采样稀疏处理的恢复算法计算消耗了大量时间. CS理论最近结合了消息传播(message passing, MP)算法^[72-74], 消息传递算法使局部消息通过图论的边等结构进行传递, 把基本变量(消息)通过图的边线关联在一起, 即将计算困难的问题分解成许多容易计算的子问题, 该算法主要是寻找变量在空间中的概率分布^[73]. 压缩感知恢复信号规模越庞大, 越能够更好的和消息内部标量参数近似, 从而派生出更新内部参数的更新策略^[74]. 通过改变迭代阈值重建机理, 在每次迭代过程中强制性增加信号的稀疏度, 进而可以更快的实现稀疏逼近, 当然消息传递算法在网络推理、系统优化、并行数据挖掘等相关领域也有广泛应用, 本文这里不再阐述.

因此, 能够将信号恢复算法的精确度和速度同时得到解决, 将是恢复算法从理论模拟到实际应用的关键. 这不仅对压缩感知的信号恢复有用, 对压缩感知测量的直接处理也有很大帮助, 所以该领域

还有很多可以研究和探索的地方^[75]: 1) 如何在冗余字典下找到一种有效且快速的稀疏分解算法; 2) 如何解决含噪信号或采样过程中引入噪声情况下的信号重构问题; 3) 对于 p -范数优化也是一个需要研究的问题. 所以寻求与压缩感知理论相结合的新算法无疑是未来发展的重点, 有着广泛的应用前景.

参考文献

- [1] Zhuang T G 1992 *Principle and Algorithm of CT* (Shanghai: Shanghai Jiao Tong University press) p-p77-97 (in Chinese) [庄天戈 1992 CT原理与算法(上海: 上海交通大学出版社) 第77—97页]
- [2] Deng Z Y, Duan Z W, Liu J J, Xie Q G 2011 *Nuclear Electronics & Detection Technology* **31** 53 (in Chinese) [邓贞宙, 段志文, 刘晶晶, 谢庆国 2011 核电子学与探测技术 **31** 53]
- [3] Tuy H K 1983 *SIAM J. Applied Mathematics* **43** 546
- [4] Smith B D 1985 *IEEE Trans. Med. Imaging* **4** 14
- [5] Grangeat P 1991 *Mathematical Framework of Cone Beam 3D Reconstruction Via The First Derivative of The Radon Transform* (Berlin: Springer-Verlag) p-p66-97
- [6] Yu H Y, Wang G 2009 *Phys Med Biol.* **54** 2791
- [7] Li J, Lu X Q, Sun Y 2011 *Aeronautical Manufacturing Tech.* **21** 19 (in Chinese) [李镜, 卢孝强, 孙怡 2011 航空制造技术 **21** 19]
- [8] Zou Y, Pan X C 2004 *Phys. Med. Biol.* **49** 941
- [9] Pack J D, Noo F, Clackdoyle R 2005 *IEEE Trans. Med. Imaging* **24** 70
- [10] Zou Y, Sidky E Y, Pelizzari C A, Munro P, Pan X C 2006 *IEEE Trans. Med. Imaging* **25** 869
- [11] Zhang H T, Chen M, Zhang P 2007 *Progress in Natural Science* **17** 1589 (in Chinese) [张慧滔, 陈明, 张朋 2007 自然科学进展 **17** 1589]
- [12] Ye Y, Wang G 2005 *Med. Phys.* **32** 42
- [13] Zhao S, Yu H, Wang G 2004 *The SPIE 4th Conference on Developments in X-Ray Tomography* Denver, CO, Aug 04-06, 2004 p318
- [14] Guo J Q, Zeng L, Zou X B 2011 *J. X-ray Sci. Technol.* **19** 293
- [15] Li L, Chen Z Q, Zhang L, Xing Y X, Kang K J 2007 *Appl. Radiat. Isot.* **65** 1041
- [16] Zhang F, Yan B, Wang X C, Jiang H, Wei X 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 168702 (in Chinese) [张峰, 闫斌, 汪先超, 江桦, 魏星 2013 物理学报 **62** 168702]
- [17] Grunbaum F A 1980 *Numerical Functional Analysis Opt.* **2** 31
- [18] Tikhonov A N, Arsemin V Y 1979 *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **1** 521
- [19] Rangayyan R, Dhawan A P, Gordon R 1985 *Applied Optics.* **24** 4000

- [20] Kak A C, Slaney M 1999 *Principles of Computerized Tomographic Imaging* (New York: IEEE Press) pp275–294
- [21] Mueller K, Yagel R, Wheller J J 1999 *IEEE Trans. Med. Imaging* **18** 519
- [22] Herman G T, Meyer L B 1993 *IEEE Trans. Med. Image* **12** 600
- [23] Guan H, Gordon R 1994 *Phys. Med. Biol.* **39** 2005
- [24] Mueller K, Yagel R, Cornhill J F 1997 *IEEE Trans. Med. Image* **16** 223
- [25] Wang H J, Lu H N, Fu J 2006 *Optical Technique* **32** 389 (in Chinese) [王宏钧, 路宏年, 傅健 2006 光学技术 **32** 389]
- [26] Schölkopf B, Smola A, Müller K R 1998 *Neural computation* **10** 1299
- [27] Zhai Z, Zou Y G, Shen K, Wang Y, Xu W Z 2005 *J. Computer Research and Development* **42** 1882 (in Chinese) [翟中, 邹永贵, 沈宽, 王珏, 徐问之 2005 计算机研究与发展 **42** 1882]
- [28] Qin Z Y, Mou X Q, Wang P, Cai Y L 2003 *Chinese Journal of Electronics* **33** 1327 (in Chinese) [秦中元, 牟轩沁, 王平, 蔡元龙 2003 电子学报 **33** 1327]
- [29] Wang X, Chen Z Q, Xiong H, Zhang L 2005 *Nuclear Electronics & Detection Technology* **25** 785 (in Chinese) [王旭, 陈志强, 熊华, 张丽 2005 核电子学与探测技术 **25** 785]
- [30] Siddon R 1985 *Med. Phys.* **12** 252
- [31] Guo W 2011 *Ph.D. Dissertation* (Jilin: Jilin University) (in Chinese) [郭威 2011 博士学位论文 (吉林: 吉林大学)]
- [32] Guo W, Chen H X, Geng W J, Lei L Y 2009 *Proceedings of the 2nd International Conference on BioMedical Engineering and Informatics* (China: Tianjin) p29
- [33] Andersen A H, Kak A C 1984 *Ultrason Imaging* **6** 81
- [34] Li C F, Zhang X F, Pan J H, Shi D F 2002 *J. Optoelectronics Laser* **13** 726 (in Chinese) [李春芳, 张新峰, 潘金虎, 是度芳 2002 光电子激光 **13** 726]
- [35] Fang X, Mueller K 2005 *IEEE Trans. Nuclear Science* **52** 654
- [36] Kong H H, Pan J X 2008 *Computerized Tomography Theory and Applications* **17** 40 (in Chinese) [孔慧华, 潘晋孝 2008 CT 理论与应用研究 **17** 40]
- [37] Gao X 2004 *Ph.D. Dissertation* (Zhejiang: Zhejiang University) (in Chinese) [高欣 2004 博士学位论文 (浙江: 浙江大学)]
- [38] Wang H 2008 *MS Thesis* (Liaoning: Dalian University of Technology) (in Chinese) [王浩 2008 硕士学位论文 (辽宁: 大连理工大学)]
- [39] Candes E J, Romberg J, Tao T 2006 *IEEE Trans. Info. Theo.* **52** 489
- [40] Donoho D L 2006 *IEEE Trans. Info. Theo.* **52** 1289
- [41] Kashin B 1977 *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk Seriya Matematicheskaya* **41** 334
- [42] Sidky E Y, Chartrand R, Pan X C 2007 *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record* (New York: IEEE Press) p3526
- [43] Li Y 2011 *MS Thesis* (Taiyuan: North University of China) (in Chinese) [李毅 2011 硕士学位论文 (太原: 中北大学)]
- [44] Wang L Y, Wei Z H, Li X X 2012 *J. Image Graphics* **17** 20 (in Chinese) [王丽艳, 韦志辉, 李星秀 2012 中国图象图形学报 **17** 20]
- [45] Gong Z P 2012 *MS Thesis* (Guangzhou: South China University of Technology) (in Chinese) [龚紫平 2012 硕士学位论文 (广东: 华南理工大学)]
- [46] Yi X N 2011 *Ph. D. Dissertation* (Hubei: Huazhong University of Science and Technology) (in Chinese) [易学能 2011 博士学位论文 (湖北: 华中科技大学)]
- [47] Choi K, Wang J, Zhu L, Suk T, Boyd S, Xing L 2010 *Med. Phys.* **37** 5113
- [48] Fan J, Peng H 2004 *The Annals of Statistics* **32** 928
- [49] Candes E J, Tao T 2005 *IEEE Trans. Info. Theo.* **51** 4203
- [50] Zou Y, Pan X C, Sidky E Y 2005 *Phys. Med. Biol.* **50** 13
- [51] Sidky E Y, Pan X 2006 *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record* (New York: IEEE Press) p2904
- [52] Sidky E Y, Kao C M, Pan X C 2006 *J. X-ray Sci. Tech.* **14** 119
- [53] Sidky E Y, Pan X C 2008 *Phys. Med. Biol.* **53** 4777
- [54] Niu T, Zhu L 2012 *Med. Phys.* **39** 4588
- [55] Lian Q S, Hao P P 2009 *Opt. Tech.* **35** 422 (in Chinese) [练秋生, 郝鹏鹏 2009 光学技术 **35** 422]
- [56] Donoho D L, Maleki A, Montanari A 2009 *Proceedings of the National Academy of Sciences* **106** 18914
- [57] Danielsson P E, Edholm P, Eriksson J, Magnusso M 1997 *Proceedings of the 1997 International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine* (Pittsburgh, PA) p141
- [58] Zou Y, Pan X C 2004 *Phys. Med. Biol.* **49** 941
- [59] Zou Y, Pan X C 2004 *Phys. Med. Biol.* **49** 2717
- [60] Pan X C, Xia D, Zou Y, Yu L 2004 *Phys. Med. Biol.* **49** 4349 058701
- [61] Katsevich A 2002 *SIAM J. Applied Math.* **62** 2012
- [62] Katsevich A 2003 *Int. J. Math. Sci.* **21** 1305
- [63] Sidky E Y, Zou Y, Pan X C 2005 *Phys. Med. Biol.* **50** 1643
- [64] Zhang F 2013 *Ph. D. Dissertation* (Zhengzhou: The PLA Information Engineering University) (in Chinese) [张峰 2013 博士学位论文 (郑州: 中国人民解放军信息工程大学)]
- [65] Zeng L, Liu B D, Ji D J 2011 *CN Patent* 101387611 B [曾里, 刘宝东, 冀东江 2011 CN 101387611 B]
- [66] Liu B D 2010 *Ph. D. Dissertation* (Chongqing: Chongqing University) (in Chinese) [刘宝东 2010 博士学位论文 (重庆: 重庆大学)]
- [67] Guo J Q 2011 *Ph. D. Dissertation* (Chongqing: Chongqing University) (in Chinese) [郭吉强 2011 博士学位论文 (重庆: 重庆大学)]
- [68] Hao J, Li L, Zhang L, Kang K J 2013 *J. Tsinghua Univ.: Sci. & Tech.* **53** 145 (in Chinese) [郝佳, 李亮, 张丽, 康克军 2013 清华大学学报: **53** 145]
- [69] Wang G, Ye Y, Yu H 2007 *Phys. Med. Biol.* **52** R1
- [70] Pan X C, Siewerdsen J L, Riviere P J, Kalender W A 2008 *Med. Phys.* **35** 3728
- [71] Liu D H 2009 *Ph.D. Dissertation* (Xi'an: Xidian University) (in Chinese) [刘丹华 2009 博士学位论文 (西安: 西安电子科技大学)]

- [72] Donoho D L, Maleki A, Montanari A 2009 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **106** 18914
- [73] Yonina E, Gitta K 2012 *Compressed Sensing: Theory and Applications* (Oxford: Cambridge University Press) pp405–447
- [74] Kamilov U S, Goyal V K, Rangan S 2012 *IEEE Transactions On Signal Processing* **60** 6270
- [75] Zhou W 2012 *MS Thesis* (Shanghai: Shanghai Jiao Tong University) (in Chinese) [邹伟 2012 硕士学位论文 (上海: 上海交通大学)]

REVIEW

Review of reconstruction algorithms with incomplete projection data of computed tomography*

Yang Fu-Qiang[†] Zhang Ding-Hua Huang Kui-Dong Wang Kun Xu Zhe

(Key Laboratory of Contemporary Design and Integrated Manufacturing Technology, Ministry of Education, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 4 October 2013; revised manuscript received 5 November 2013)

Abstract

This paper mainly reviews the progress of methods, and research development in the field of computed tomography(CT) with incomplete projection data, at home and abroad, on limited angle projection data reconstruction with the detector fully covered, and truncated data reconstruction with the detector partially covered. Firstly, the discrete model iterative reconstruction algorithm and the compressed sensing(CS) sampling reconstruction algorithm are discussed for the sparsely uniform and limited-view angle sampling in the case that the detector fully covers the detected object. Secondly, the reconstruction algorithm of back-projection filtration(BPF) for helical cone beam and improved ones for cone beam FDK are discussed in the case that the detector could not fully cover the detected object. This paper could provide the researchers in CT reconstruction field the criticism of methods and summaries. Furthermore, it also points out current focus of the study and the research direction in the future.

Keywords: incomplete projection data, compressed sensing, limited angle, truncated data

PACS: 87.59.-e, 87.57.Q-, 42.30.Wb

DOI: 10.7498/aps.63.058701

* Project supported by the National Science and Technology Major Project of the Ministry of Industry and Information Technology of China (Grant No. 2012ZX04007021), the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51105315), and the Natural Science Basic Research Program of Shaanxi Province, China (Grant No. 2013JM7003).

[†] Corresponding author. E-mail: yangfuqiang029@163.com