

## 空间交替 Julia 集的反馈控制与线性广义同步

王培<sup>†</sup> 刘树堂

(山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061)

(2013年7月10日收到; 2013年12月5日收到修改稿)

讨论了由空间交替系统迭代产生的空间交替 Julia 集. 空间交替 Julia 集是由交替的复动力系统  $z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = (1+a)^2 z_{mn}^2 + c_i, i = 1, 2$  迭代产生的, 且通过辅助反馈控制方法实现了对空间交替 Julia 集的控制. 同时利用线性反馈的方法, 实现了不同空间交替 Julia 集之间的线性广义同步. 仿真结果验证了控制和同步方法的有效性.

**关键词:** 空间交替 Julia 集, 辅助反馈控制, 同步, 线性广义同步

**PACS:** 05.45.Df, 47.53.+n, 61.43.Hv

**DOI:** 10.7498/aps.63.060503

## 1 引言

分形现象在自然界中是普遍存在的. 1918年, Gaston Julia 通过研究复平面上的迭代映射  $z_{n+1} \leftarrow z_n^2 + c$ , 得到了一系列令人眼花缭乱的精美图形. 文献[1]研究复平面上的交替迭代  $z_{n+1} \leftarrow z_n^2 + c_i, i = 1, 2$ , 得到了平面交替 Julia 集, 并且讨论了其连通性. Alan Norton 首先采用边界检测法构造出四元数 Julia 集. 而后, 空间分形 Julia 集的研究引起学者们的注意. 隋首钢[2]讨论了复动力系统生成的空间分形 Julia 集的构成及其性质. 近年来, 对空间分形 Julia 集的控制成为分形理论研究的焦点. 刘树堂和张永平[3]利用一种非线性耦合的方法实现了同一系统不同参数的 Julia 集的同步. 秦卫阳等[4]证明了当线性耦合实现同步后, 函数在满足一定的条件下, 可以通过函数耦合实现系统的混沌同步. Liu 和 Liu[5]利用梯度控制和最优控制等方法实现了对耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制与同步. Liu 和 Liu[6]实现了空间 Julia 集的线性广义同步. 刘树堂等[7,8]通过辅助控制方法实现了 Julia 集的控制. Blanchard 等[9-17]讨论了混沌系统的控制方法, 为我们实现

Julia 集的控制提供了理论基础.

对空间 Julia 集的控制等的研究已经得到发展. 为了完善空间分形理论, 对作为新的空间分形集之一的空间交替 Julia 集的控制的讨论就显得尤为重要. 本文首先给出空间交替系统的定义, 并引出空间交替分形 Julia 集的定义. 空间交替分形 Julia 集的提出为自然界中四季交替现象, 经济学中的股票走势和生物学中的肿瘤模型等的研究提供了理论依据. 本文用线性反馈控制方法实现了对空间交替 Julia 集的控制与线性广义同步.

首先给出如下交替系统的定义

$$F(z_{mn}, z_{m+1,n}, z_{m,n+1}) = \begin{cases} F_1(z_{mn}, z_{m+1,n}, z_{m,n+1}) & (m, n) \in D_1 \\ F_2(z_{mn}, z_{m+1,n}, z_{m,n+1}) & (m, n) \in D_2 \end{cases},$$

其中  $D_i, i = 1, 2$  为  $(m, n)$  的定义域.

本文中, 我们研究如下交替系统

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = \begin{cases} (1+a)^2 z_{mn}^2 + c_1 & m+n \text{ 是偶数} \\ (1+a)^2 z_{mn}^2 + c_2 & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}, \quad (1)$$

其中  $a$  是实参数且  $a \neq -1$ ,  $c_1 \neq c_2$  是复变量, 同

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: wppink@126.com

时记

$$f((1+a)z_{mn}) = (1+a)^2 z_{mn}^2 + c_i, i = 1, 2.$$

## 2 空间交替 Julia 集的定义及基本性质

为了实现对空间交替 Julia 集的控制, 引入下面的概念及结论<sup>[2]</sup>.

**定义 1<sup>[2]</sup>** 空间交替系统 (1) 中如果状态变量  $z_{mn}$  在迭代过程中呈现出周期的和斥性的特点, 那么  $z_{mn}$  称为空间交替斥性周期点.

**定义 2<sup>[2]</sup>** 空间交替斥性周期点集的闭包称为空间交替 Julia 集.

**引理 1<sup>[2]</sup>** 对任意正整数  $m, n$ , 空间交替系统 (1) 的不动平面为

$$z_{mn} = z^* = \begin{cases} \frac{1 \pm \sqrt{1-4c_1}}{2(1+a)} & m+n \text{ 是偶数} \\ \frac{1 \pm \sqrt{1-4c_2}}{2(1+a)} & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}.$$

**引理 2<sup>[2]</sup>** 交替迭代系统中  $z^* = z_{mn}$  时, 若有

$$|f'((1+a)z_{mn})| \leq \frac{1+|a|}{|1+a|},$$

则不动平面  $z^*$  是稳定的.

**引理 3<sup>[2]</sup>** 如果  $s$  是一个稳定的不动平面, 则有

$$\partial A(s) = J(f),$$

其中  $\partial A$  是稳定空间  $A(s)$  的边界,  $J$  表示空间交替 Julia 集. 并且  $s$  可以是  $\infty$ , 那么有  $\partial A(s) = J(f) = \partial A(\infty)$  也是成立的.

由空间交替 Julia 集的基本概念及性质可知, 通过控制系统吸引不动平面或  $\infty$  的稳定空间的边界可以实现对空间交替 Julia 集的控制. 因此, 本文通过控制稳定空间的边界实现对空间交替 Julia 集的控制.

## 3 空间交替 Julia 集的反馈控制

这一部分中, 引入辅助反馈控制项

$$u_{mn} = g_{mn}[(1+a)z_{mn} - z_{refi}] \quad i = 1, 2,$$

同时我们希望系统 (1) 的不动平面  $z^*$  在如下控制系统 (2) 中仍然是稳定的.

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = \begin{cases} (1+a)^2 z_{mn}^2 + c_1 + g_{mn}[(1+a)z_{mn} - z_{ref1}] & m+n \text{ 是偶数} \\ (1+a)^2 z_{mn}^2 + c_2 + g_{mn}[(1+a)z_{mn} - z_{ref2}] & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}, \quad (2)$$

其中  $g_{mn}$  是反馈控制项,  $z_{ref1}, z_{ref2}$  是辅助参考项, 取

$$g_{mn} = \begin{cases} kz_{ref1} + \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\nu} w_{ij} z_{m-i,n-j} & m+n \text{ 是偶数} \\ kz_{ref2} + \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\nu} w_{ij} z_{m-i,n-j}, & m+n \text{ 是奇数} \end{cases},$$

其中  $k$  是控制参数,  $w_{ij}$  是与控制系统 (2) 的稳定性相关的参数. 简单地, 取  $\mu = \nu = 0$ , 新的控制系统可化简为

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = \begin{cases} ((1+a)^2 + (1+a)w_{00})z_{mn}^2 + ((1+a)k - w_{00})z_{mn}z_{ref1} - kz_{ref1}^2 + c_1 & m+n \text{ 是偶数} \\ ((1+a)^2 + (1+a)w_{00})z_{mn}^2 + ((1+a)k - w_{00})z_{mn}z_{ref2} - kz_{ref2}^2 + c_2 & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}.$$

为了叙述方便, 我们讨论  $m+n$  是偶数的情况,  $m+n$  为奇数时可做类似的讨论. 当  $m+n$  是偶数时, 系统(2)简化为如下形式

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = \alpha z_{mn}^2 + \beta z_{mn} + \gamma, \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = (1+a)^2 + (1+a)w_{00} \\ \beta = ((1+a)k - w_{00})z_{\text{ref1}} \\ \gamma = -kz_{\text{ref1}}^2 + c_1 \end{cases} .$$

有  $z_1^* = \frac{1+a-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ , 其中  $\Delta = (\beta - (1+a))^2 - 4\alpha\gamma$ , 取正号进行讨论, 令  $\sqrt{\Delta} = s + ti$ , 其中  $s, t$  是实数, 此时有

$$\begin{aligned} & |f'((1+a)z_1^*)| \\ &= |1+a+s+ti| = \sqrt{(1+a+s)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

若  $z_1^*$  是稳定的不动平面, 由引理 2<sup>[2]</sup> 知  $|f'((1+a)z_1^*)| \leq \frac{1+|a|}{|1+a|}$ , 可知

$$|f'((1+a)z_1^*)| \leq \begin{cases} \frac{a-1}{1+a} : & a < -1 \\ \frac{1+a}{1+a} : & -1 < a < 0. \\ 1 : & a \geq 0 \end{cases} .$$

为了叙述方便, 只讨论  $a > 0, w_{00} = k(1+a)$  的情

况. 若  $z_1^*$  是吸引的, 则有

$$\begin{cases} -2-a < s < -a \\ -1 < t < 1 \end{cases} .$$

根据

$$\begin{aligned} s^2 - t^2 + 2sti = \Delta &= 4k(1+k)(1+a)^2 z_{\text{ref1}}^2 \\ &+ (1+a)^2 - 4c_1(1+k)(1+a)^2, \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} & |4k(1+k)(1+a)^2 z_{\text{ref1}}^2| \\ &= |s^2 - t^2 + 2sti - (1+a)^2(1-4c_1(1+k))|. \end{aligned}$$

因此

$$|z_{\text{ref1}}^2| < \frac{(2+a)^2 + 1 + |(1+a)^2(1-4c_1(1+k))|}{|4k(1+k)(1+a)^2|} .$$

类似地, 当  $m+n$  是奇数时, 有

$$|z_{\text{ref2}}^2| < \frac{(2+a)^2 + 1 + |(1+a)^2(1-4c_2(1+k))|}{|4k(1+k)(1+a)^2|} ,$$

显然  $z_{\text{ref}i}, i = 1, 2$  的取值范围依赖于  $k, a, c_i$ . 以

$$\begin{aligned} k &= 0.1, \quad a = 0.5, \\ c_1 &= -0.765 + 0.105i, \quad c_2 = -0.76 + 0.1i \end{aligned}$$

为例, 则有  $|z_{\text{ref1}}| < 4.1595, |z_{\text{ref2}}| < 4.1529$ .

当  $w_{00} = k(1+a)$  时, 有

$$\begin{cases} (1+a)^2(1+k)z_{mn}^2 - (1+a)z_{mn} + c_1 - kz_{\text{ref1}}^2 = 0 & m+n \text{ 是偶数} \\ (1+a)^2(1+k)z_{mn}^2 - (1+a)z_{mn} + c_2 - kz_{\text{ref2}}^2 = 0 & m+n \text{ 是奇数} \end{cases} .$$

当  $m+n$  是偶数时, 考虑方程

$$|(1+a)^2(1+k)z^2 - (1+a)z - |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2|| = 0, \quad (4)$$

显然方程(4)有正根

$$T_1 = \frac{1+a + \sqrt{(1+a)^2 + 4(1+a)^2|1+k||c_1 - kz_{\text{ref1}}^2|}}{2|(1+a)^2(1+k)|},$$

有

$$|f((1+a)z)| > \left[ \frac{|z|}{T_1} (1+a)^{1/2} \right]^2 T_1.$$

当  $m+n$  是奇数时, 考虑方程

$$|(1+a)^2(1+k)z^2 - (1+a)z - |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2|| = 0, \quad (5)$$

显然方程(5)有正根

$$T_2 = \frac{1+a + \sqrt{(1+a)^2 + 4(1+a)^2|1+k||c_2 - kz_{\text{ref}2}^2|}}{2|(1+a)^2(1+k)},$$

有(推导详见附录A1)

$$|f((1+a)z)| > \left[ \frac{|z|}{T_2} (1+a)^{1/2} \right]^2 T_2.$$

令  $T = \max\{T_1, T_2\}$ , 则有

$$f^n((1+a)z) > \left[ \frac{(1+a)^{1/2}|z|}{T} \right]^{2^n} T \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty),$$

即交替系统(2)的空间交替 Julia 集应包含在空间  $\{z : |z| \leq T\}$  内.

由于吸引不动平面  $z_1^*, z_2^*$  或  $\infty$  的吸引域的边界即为 Julia 集(由引理3<sup>[2]</sup>), 用  $C_0$  表示曲面  $|z| = T$ , 显然  $C_0$  包含稳定的不动平面  $z_1^*, z_2^*$ . 由于

$$|f^{-1}((1+a)C_0)|^2 = \left\{ \left\{ \left| \frac{(1+a)T_1 e^{i\theta} - |c_1 - kz_{\text{ref}1}^2|}{|1+k|(1+a)^2} \right| : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} \right. \\ \left. \left\{ \left| \frac{(1+a)T_2 e^{i\theta} - |c_2 - kz_{\text{ref}2}^2|}{|1+k|(1+a)^2} \right| : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} \right\}.$$

根据方程(4), 有

$$\left| \frac{(1+a)T_1 e^{i\theta} - |c_1 - kz_{\text{ref}1}^2|}{|1+k|(1+a)^2} \right| \\ \leq \frac{|(1+a)T_1 e^{i\theta}| + |c_1 - kz_{\text{ref}1}^2|}{|1+k|(1+a)^2} \\ = |T_1 e^{i\theta}|^2 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

则有

$$|f^{-1}((1+a)C_0)|^2 \\ \leq \max \left\{ \left| \frac{(1+a)T_1 e^{i\theta} - |c_1 - kz_{\text{ref}1}^2|}{|1+k|(1+a)^2} \right|, \right. \\ \left. \left| \frac{(1+a)T_2 e^{i\theta} - |c_2 - kz_{\text{ref}2}^2|}{|1+k|(1+a)^2} \right| \right\} \\ \leq \max\{|T_1 e^{i\theta}|^2, |T_2 e^{i\theta}|^2\} \\ \leq |T e^{i\theta}|^2 = T^2 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

即  $|f^{-1}((1+a)C_0)| \leq T$ , 因此  $f^{-1}((1+a)C_0)$  包含在曲面  $C_0$  所围成的空间内. 令  $C_1 = f^{-1}((1+a)C_0)$ , 则有  $C_1 \subset C_0$ . 用类似的方法继续下去, 我们可以得到一个系列  $C_s, s = 0, 1, 2, 3, \dots$ , 满足  $C_{s+1} \subset C_s$ , 且当  $s \rightarrow \infty$  时,  $C_s$  逼近吸引不动平面  $z_1^*, z_2^*$  的稳定空间的边界, 即空间交替 Julia 集.

由于  $m+n$  为偶数时, 有

$$|f^{-1}((1+a)z)|^2 \\ = \left| \frac{(1+a)T_1 e^{i\theta} - |c_1 - kz_{\text{ref}1}^2|}{|1+k|(1+a)^2} \right| \\ \leq \frac{|(1+a)T_1 e^{i\theta}| + |c_1 - kz_{\text{ref}1}^2|}{|1+k|(1+a)^2} \\ = \frac{z_{\text{ref}1}^2}{(1+a)^2} + \frac{(1+a)T_1 + |c_1 + z_{\text{ref}1}^2|}{|1+k|(1+a)^2}. \quad (6)$$

同样地, 当  $m+n$  为奇数时, 有

$$|f^{-1}((1+a)z)|^2 \\ \leq \frac{z_{\text{ref}2}^2}{(1+a)^2} + \frac{(1+a)T_2 + |c_2 + z_{\text{ref}2}^2|}{|1+k|(1+a)^2}. \quad (7)$$

结合不等式(6)和(7)式, 对于给定的  $a, c_i, i = 1, 2$ ,  $f^{-1}((1+a)z)$  随  $|1+k|$  的增加而变小. 根据空间交替 Julia 集的构成, 则交替系统(2)的空间交替 Julia 集随  $|1+k|$  的增加而减小. 当  $a = 0.5$ ,  $c_1 = -0.765 + 0.105i$ ,  $c_2 = -0.76 + 0.1i$  时, 控制系统(2)的空间交替 Julia 集随控制参数  $k > 0$  的变化如图1所示, 其中  $k = 0$  是无控制时的空间交替 Julia 集, 控制系统(2)的空间交替 Julia 集随控制参数  $k < 0$  的变化如图2所示.

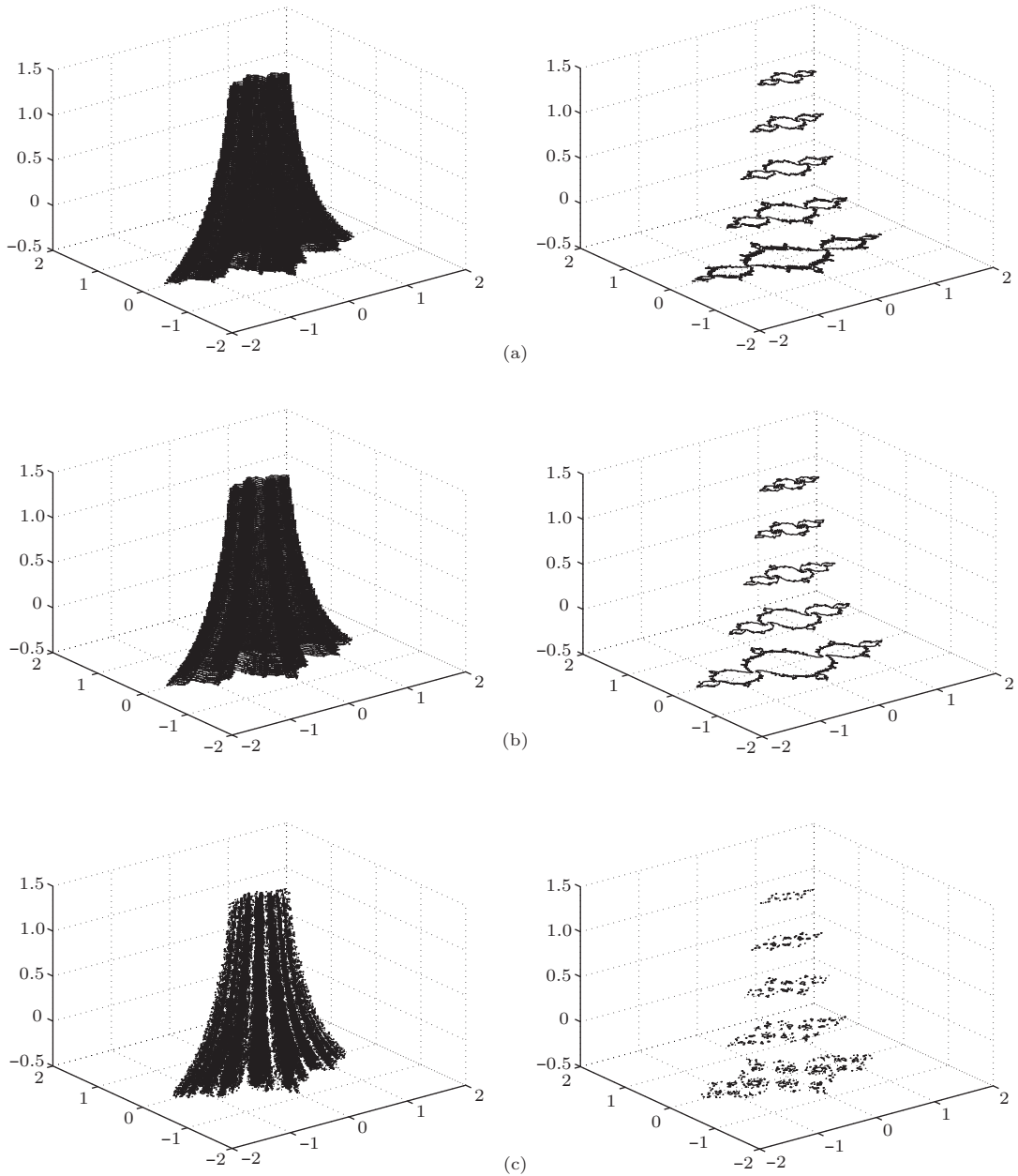


图1 交替系统(2)的空间交替 Julia 集在反馈控制下随正的参数  $k$  的变化 (a)  $k = 0.1$  时的 Julia 集及其切面图; (b)  $k = 0.05$  时的 Julia 集及其切面图; (c)  $k = 0$  时的 Julia 集及其切面图

#### 4 空间交替 Julia 集的线性广义同步

这部分中, 考虑两个不同的空间交替系统

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = \begin{cases} (1+a)^2 z_{mn}^2 + c_1 & m+n \text{ 是偶数} \\ (1+a)^2 z_{mn}^2 + c_2 & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}, \quad (8)$$

$$w_{m+1,n} + aw_{m,n+1} = \begin{cases} (1+a)^2 w_{mn}^2 + c_3 & m+n \text{ 是偶数} \\ (1+a)^2 w_{mn}^2 + c_4 & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}, \quad (9)$$

其中  $c_i, i = 1-4$  是复变量且互不相等, 并且  $a \neq -1$ .

且由于  $c_i, i = 1-4$  互不相等, 系统(8)和(9)的空间交替 Julia 集是两个不同的独立的集合. 为了实现这两个空间交替系统的 Julia 集的同步, 耦合控制项

$$\begin{cases} p[z_{mn}, w_{mn}, c_j, a; \varepsilon_i] & i = 1, 2, j = 3, 4 \\ q[z_{mn}, w_{mn}, c_i, a; \varepsilon_j] & i = 1, 2, j = 3, 4 \end{cases},$$

分别被加到系统(8)和(9)中, 其中  $\varepsilon_i, i = 1-4$  互

不相同, 则有

$$i = 1, 2, \quad j = 3, 4, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & z_{m+1,n} + az_{m,n+1} \\ &= (1+a)^2 z_{mn}^2 + c_i + p(z_{mn}, w_{mn}, c_j, a; \varepsilon_i) \\ & \quad i = 1, 2, \quad j = 3, 4, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & w_{m+1,n} + aw_{m,n+1} \\ &= (1+a)^2 w_{mn}^2 + c_j + q(z_{mn}, w_{mn}, c_i, a; \varepsilon_j) \end{aligned}$$

其中  $p(\cdot), q(\cdot)$  是关于  $z_{mn}, w_{mn}, c_i, c_j, \varepsilon_i, \varepsilon_j$  的函数,  $\varepsilon_i, \varepsilon_j$  是耦合强度.

取  $q[z_{mn}, w_{mn}, c_i, a; \varepsilon_j] = 0$ , 则系统(11)即为系统(9). 分别记  $J_9, J_{10}$  是系统(9)和(10)的空间交替 Julia 集.

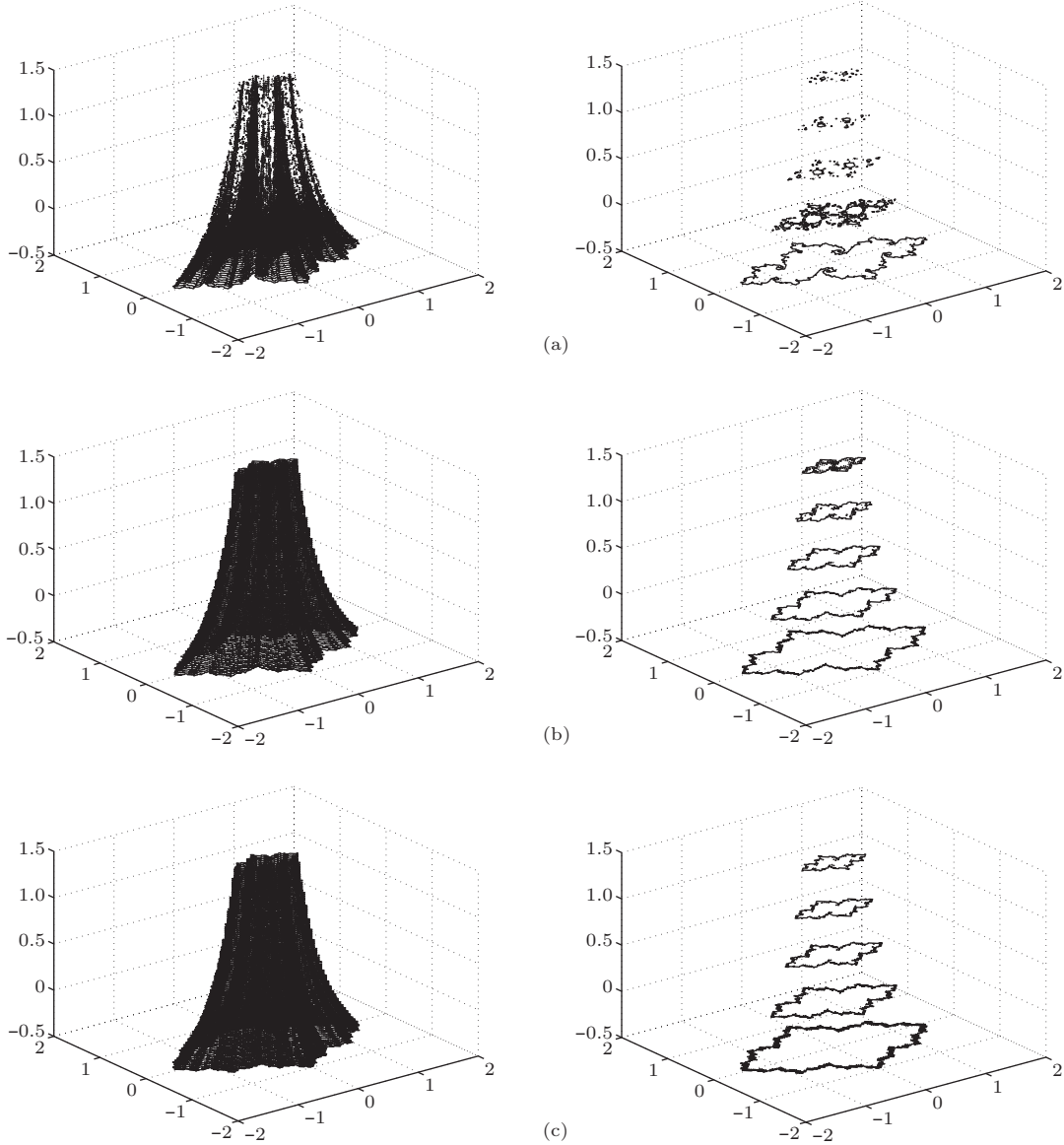


图2 交替系统(2)的空间交替 Julia 集在反馈控制下随负的参数  $k$  的变化 (a)  $k = -0.01$  时的 Julia 集及其切面图; (b)  $k = -0.05$  时的 Julia 集及其切面图; (c)  $k = -0.08$  时的 Julia 集及其切面图

**定义 3<sup>[3]</sup>** 如果存在函数  $\varphi$ , 当  $k$  趋于  $k_0$ , 使得空间交替 Julia 集  $J_9, \varphi(J_{10})$  变得相同, 即

$$\lim_{k \rightarrow k_0} (\varphi(J_{10}) \cup J_9 - \varphi(J_{10}) \cap J_9) = \emptyset,$$

则称系统(9)和(10)的空间交替 Julia 集实现广义同步.

取耦合项

$$p[z_{mn}, w_{mn}, c_j, a; \varepsilon_i] = \varepsilon_i [g(z_{mn}, w_{mn})]^2,$$

代入系统(10)有

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = (1+a)^2 z_{mn}^2 + c_i + \varepsilon_i [g(z_{mn}, w_{mn})]^2 \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

为了实现线性广义同步, 取线性反馈项  $g(z_{mn}, w_{mn}) = a_1 z_{mn} - a_2 w_{mn}$ , 同时, 令

$$e_{mn} = h(z_{mn}, w_{mn}),$$

如果可以找到函数  $h(z_{mn}, w_{mn})$ , 满足

$$e_{m+1,n} + ae_{m,n+1} = \begin{cases} (1+a)^2 e_{mn}^2 + s & m+n \text{ 是偶数} \\ (1+a)^2 e_{mn}^2 + t & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}, \quad (13)$$

则系统(8)和(9)的空间交替 Julia 集实现广义同步, 通常  $s, t$  与  $c_i, c_j, a, \varepsilon_i$  存在函数关系, 有

$$\begin{cases} s = \varphi(c_1, c_3, a, \varepsilon_1) \\ t = \psi(c_2, c_4, a, \varepsilon_2) \end{cases}.$$

若找到合适的  $\varepsilon_i, i = 1, 2$ , 使得  $e_{mn}$  趋于稳定不动平面  $e^*$ , 有  $h(z_{mn}, w_{mn}) = \text{常数}$ , 那么系统(8)和(9)的空间交替 Julia 集实现广义同步.

为了叙述方便, 我们讨论  $a \geq 0$  的情况下不同交替系统的空间交替 Julia 集的线性广义同步, 而  $a$  的其他取值可做类似的讨论.

取线性反馈项  $g(z_{mn}, w_{mn}) = z_{mn} - w_{mn}$ , 为了简化计算, 令  $a_1 = a_2 = 1$ , 我们得到控制系统如下:

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = \begin{cases} (1+a)^2 z_{mn}^2 + c_1 + \varepsilon_1 (z_{mn} - w_{mn})^2 & m+n \text{ 是偶数} \\ (1+a)^2 z_{mn}^2 + c_2 + \varepsilon_2 (z_{mn} - w_{mn})^2 & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}. \quad (14)$$

取  $h(z_{mn}, w_{mn}) = \alpha_i z_{mn} + \beta_i w_{mn}, i = 1, 2$ , 并选

$$e_{mn} = \begin{cases} \alpha_1 z_{mn} + \beta_1 w_{mn} & m+n \text{ 是偶数} \\ \alpha_2 z_{mn} + \beta_2 w_{mn} & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}, \quad (15)$$

则有

$$e_{m+1,n} + ae_{m,n+1} = \alpha_i (z_{m+1,n} + az_{m,n+1}) + \beta_i (w_{m+1,n} + aw_{m,n+1}). \quad (16)$$

将(14)式代入(16)式, 有

$$e_{m+1,n} + ae_{m,n+1} = \begin{cases} \alpha_1 [(1+a)^2 z_{mn}^2 + c_1 + \varepsilon_1 (z_{mn} - w_{mn})^2] + \beta_1 [(1+a)^2 w_{mn}^2 + c_3] & m+n \text{ 是偶数} \\ \alpha_2 [(1+a)^2 z_{mn}^2 + c_2 + \varepsilon_2 (z_{mn} - w_{mn})^2] + \beta_2 [(1+a)^2 w_{mn}^2 + c_4] & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}, \quad (17)$$

又

$$e_{m+1,n} + ae_{m,n+1} = \begin{cases} (1+a)^2 (\alpha_1 z_{mn} + \beta_1 w_{mn})^2 + s & m+n \text{ 是偶数} \\ (1+a)^2 (\alpha_2 z_{mn} + \beta_2 w_{mn})^2 + t & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}, \quad (18)$$

根据(17)式和(18)式的对应系数相等, 我们得到

$$\begin{cases} \alpha_i = 1 + \frac{\varepsilon_i}{(1+a)^2} \\ \beta_i = -\frac{\varepsilon_i}{(1+a)^2} \\ s = \frac{\varepsilon_1}{(1+a)^2} (c_1 - c_3) + c_1 \\ t = \frac{\varepsilon_2}{(1+a)^2} (c_2 - c_4) + c_2 \end{cases}. \quad (19)$$

由(19)式可知

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{(1+a)^2}{c_1 - c_3}(s - c_1) \\ \varepsilon_2 = \frac{(1+a)^2}{c_2 - c_4}(t - c_2) \end{cases}.$$

令  $M_i = \frac{\varepsilon_i}{(1+a)^2}$ ,  $W_{mn} = z_{mn} - \frac{1}{1+M_i}e_{mn}$ ,  $i = 1, 2$ , 化简后可得 (详见附录 A2)

$$W_{m+1,n} + aW_{m,n+1} = \begin{cases} \frac{1+M_1}{M_1}(1+a)^2W_{mn}^2 + \frac{c_3}{(1+M_1)/M_1} & m+n \text{ 是偶数} \\ \frac{1+M_2}{M_2}(1+a)^2W_{mn}^2 + \frac{c_4}{(1+M_2)/M_2} & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}. \quad (20)$$

如果  $e_{mn}$  有稳定的不动平面  $e^*$ , 当  $m, n$  足够大时, 有

$$W_{mn} \rightarrow \begin{cases} z_{mn} - \frac{1}{1+M_1}e^* & m+n \text{ 是偶数} \\ z_{mn} - \frac{1}{1+M_2}e^* & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}. \quad (21)$$

系统(20)中的复系数是  $\frac{M_1}{1+M_1}, \frac{M_2}{1+M_2}$ , 取

$$\theta_i = \arctan \frac{\text{Im}\left(\frac{M_i}{1+M_i}\right)}{\text{Re}\left(\frac{M_i}{1+M_i}\right)}, \quad i = 1, 2,$$

从而有

$$\begin{cases} \frac{M_1}{1+M_1} = \left| \frac{M_1}{1+M_1} \right| (\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) \\ \frac{M_2}{1+M_2} = \left| \frac{M_2}{1+M_2} \right| (\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) \end{cases}.$$

显然  $\left| \frac{1+M_i}{M_i} \right| (1+a)^2, \left| \frac{M_i}{1+M_i} \right|, i = 1, 2$  是耦合系统(20)的伸缩倍数, 使其空间交替 Julia 集发生伸缩变化, 而  $\cos(\theta_j) + i \sin(\theta_j), j = 1, 2$  表示系统旋转  $\theta_j$  度, 即使其空间交替 Julia 集旋转  $\theta_j$  度, 变换(21)式使得耦合系统(20)式的空间交替 Julia 集发生位置上的变化.

由于

$$\begin{cases} s = \frac{\varepsilon_1}{(1+a)^2}(c_1 - c_3) + c_1 \\ t = \frac{\varepsilon_2}{(1+a)^2}(c_2 - c_4) + c_2 \end{cases},$$

根据  $s, t$  的稳定条件 (在文献 [4] 中有详细介绍, 不赘述), 对  $a > 0$  有

$$\begin{cases} \left| \frac{\varepsilon_1}{(1+a)^2}(c_1 - c_3) + c_1 \right| < \frac{1}{1+a} \\ \left| \frac{\varepsilon_2}{(1+a)^2}(c_2 - c_4) + c_2 \right| < \frac{1}{1+a} \end{cases}. \quad (22)$$

若取  $a = 0.5$ , 则有

$$\begin{cases} \left| \frac{\varepsilon_1}{(1+0.5)^2}(c_1 - c_3) + c_1 \right| < 0.67 \\ \left| \frac{\varepsilon_2}{(1+0.5)^2}(c_2 - c_4) + c_2 \right| < 0.67 \end{cases}.$$

以  $a = 0.5, s = t = 0.4$  和  $c_1 = -0.765 + 0.105i, c_2 = -0.76 + 0.1i, c_3 = -1, c_4 = -0.5 + i$  为例有

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 8.9236 - 4.9925i \\ \varepsilon_2 = -0.5425 + 2.7433i \end{cases}.$$

由于  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  可以取复数值, 得到的广义同步的空间交替 Julia 集可能会出现旋转伸缩等刚性变化. 由于  $M_i = \frac{\varepsilon_i}{(1+a)^2}$  可知, 对于给定的参数  $a, M_i, i = 1, 2$  随耦合强度  $\varepsilon_i, i = 1, 2$  的变化而变化. 调控参数  $\varepsilon_i$  决定了空间交替 Julia 集的广义同步的实现. 图 3 给出了无控制时交替系统(8)和(9)的空间交替 Julia 集和线性广义同步的情形.

## 5 平面交替 Julia 集的反馈控制

特别地, 当  $a = 0, n = n_0$  时, 我们得到的交替迭代函数系为

$$z_{m+1, n_0} = z_{m, n_0}^2 + c_i \quad i = 1, 2,$$

即文献 [1] 所研究的平面交替系统.

下面讨论复平面上的如下交替迭代系统

$$z_{m+1} = \begin{cases} z_m^2 + c_1 & m \text{ 是偶数} \\ z_m^2 + c_2 & m \text{ 是奇数} \end{cases}, \quad (23)$$

其中  $c_1, c_2$  是复变量, 且  $c_1 \neq c_2$ .

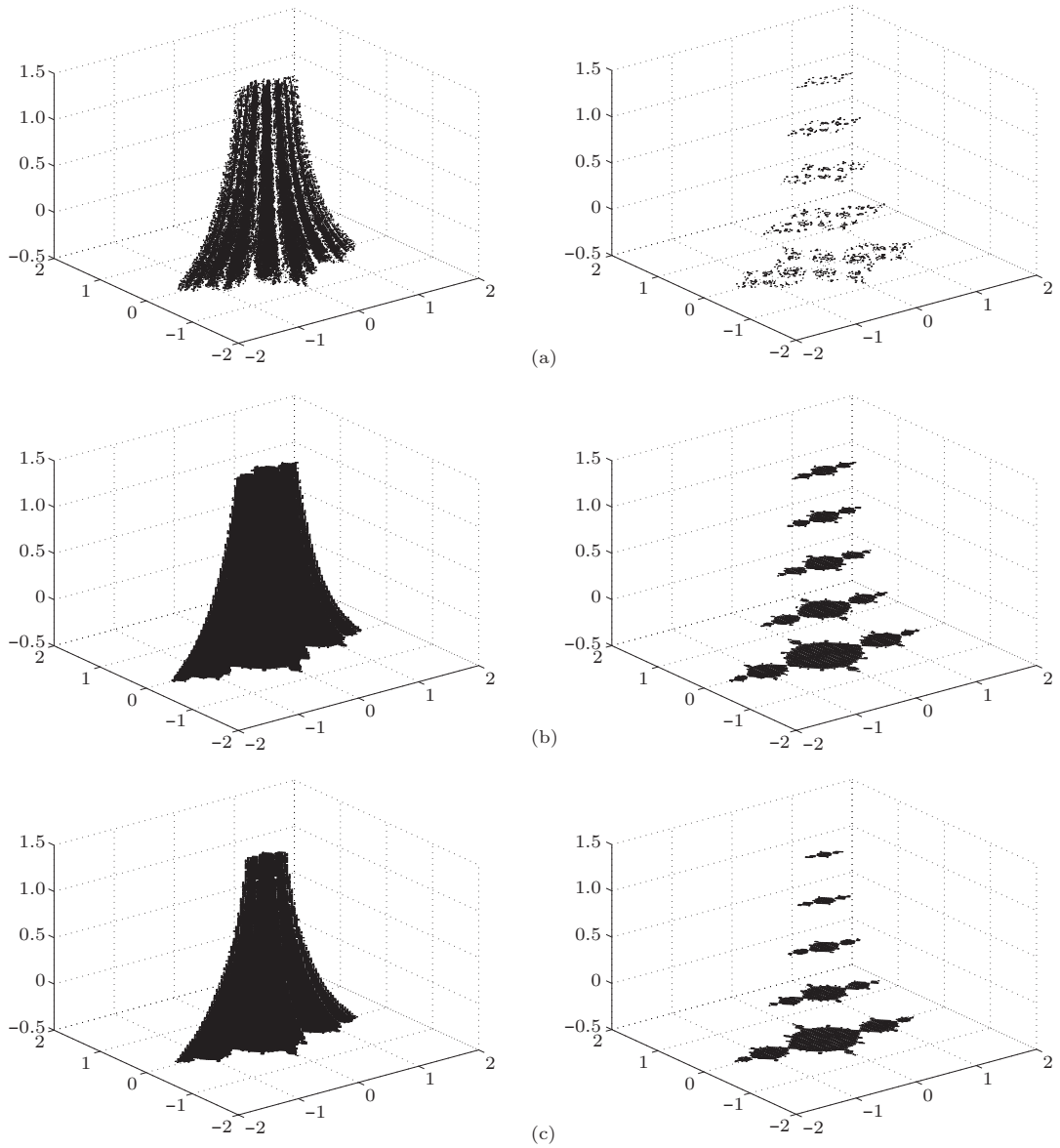


图3 被驱动系统系统(8)与驱动系统(9)的空间交替 Julia 集实现线性广义同步 (a) 被驱动系统(8)的空间交替 Julia 集及其切面图; (b) 驱动系统(9)的空间交替 Julia 集及其切面图; (c) 被驱动系统系统(8)与驱动系统(9)的空间交替 Julia 集同步的情形

简单地, 引入反馈控制项

$$u_m = \begin{cases} (kz_{\text{ref1}} + w_0z_m)(z_m - z_{\text{ref1}}) & m \text{ 是偶数} \\ (kz_{\text{ref2}} + w_0z_m)(z_m - z_{\text{ref2}}) & m \text{ 是奇数} \end{cases}$$

同时, 我们希望系统(23)的不动点  $z^*$  在如下控制系统(24)中仍然是稳定的,

$$z_{m+1} = \begin{cases} (1 + w_0)z_m^2 + (k - w_0)z_{\text{ref1}}z_m + c_1 - kz_{\text{ref1}}^2 & m \text{ 是偶数} \\ (1 + w_0)z_m^2 + (k - w_0)z_{\text{ref2}}z_m + c_2 - kz_{\text{ref2}}^2 & m \text{ 是奇数} \end{cases} \quad (24)$$

为了方便叙述, 我们讨论  $m$  是偶数的情况,  $m$  为奇数时可做类似的讨论此时, 系统(24)简化为

$$z_{m+1} = \alpha z_m^2 + \beta z_{\text{ref1}}z_m + \gamma,$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = 1 + w_0 \\ \beta = (k - w_0)z_{\text{ref1}} \\ \gamma = c_1 - kz_{\text{ref1}}^2 \end{cases}$$

此时, 不动点

$$z_1^* = \frac{1 - \beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha},$$

其中  $\Delta = (\beta - 1)^2 - 4\alpha\gamma$ . 由吸引不动点的定义知, 若不动点  $z_1^*$  是吸引的, 则有

$$|f'(z_1^*)| = |2\alpha z_1^* + \beta| = |1 \pm \sqrt{\Delta}| < 1.$$

不失一般性地, 取正号进行计算, 令  $\sqrt{\Delta} = s + ti$ , 其中  $s, t$  是实数, 有

$$|f'(z_1^*)| = |1 + s + ti| = \sqrt{(1+s)^2 + t^2} < 1,$$

即有  $-2 < s < 0, -1 < t < 1$ .

由于

$$\begin{aligned} s^2 - t^2 + 2sti &= \Delta = (\beta - 1)^2 - 4\alpha\gamma \\ &= [(k - w_0)^2 + 4k(1 + w_0)]z_{\text{ref1}}^2 - 2(k - w_0)z_{\text{ref1}} \\ &\quad + 1 - 4c_1(1 + w_0). \end{aligned}$$

为了简化计算, 取  $k = w_0$ , 则有

$$\begin{aligned} &|4k(1+k)z_{\text{ref1}}^2| \\ &= |s^2 - t^2 + 2sti - (1 - 4c_1(1+k))|. \end{aligned}$$

经计算, 有

$$\begin{aligned} |z_{\text{ref1}}^2| &\leq \frac{|s^2 - t^2 + 2sti| + |(1 - 4c_1(1+k))|}{|4k(1+k)|} \\ &< \frac{4 + |1 - 4c_1(1+k)|}{|4k(1+k)|}. \end{aligned} \quad (25)$$

由不等式 (25) 知,  $z_{\text{ref1}}$  的取值依赖于  $k, c_1$ . 同样地, 当  $m$  为奇数时,

$$z_2^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c_2}}{2},$$

有

$$|z_{\text{ref2}}^2| < \frac{4 + |1 - 4c_2(1+k)|}{|4k(1+k)|}.$$

以  $c_1 = -0.765 + 0.105i, c_2 = -0.76 + 0.1i, k = 0.1$  为例, 有  $|z_{\text{ref1}}| < 4.3668, |z_{\text{ref2}}| < 4.3605$ .

当  $k = w_0$  时, 有

$$\begin{cases} (1+k)z_m^2 - z_m + c_1 - kz_{\text{ref1}}^2 = 0 & m \text{ 是偶数} \\ (1+k)z_m^2 - z_m + c_2 - kz_{\text{ref2}}^2 = 0 & m \text{ 是奇数} \end{cases}.$$

在  $m$  是偶数的情况下, 考虑方程

$$|1 + k|z^2 - z - |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2| = 0. \quad (26)$$

显然方程 (26) 有正根

$$T_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4|1+k||c_1 - kz_{\text{ref1}}^2|}}{2|1+k|}.$$

当  $|z| > T_1$  时, 有  $|f(z)| > \left(\frac{|z|}{T_1}\right)^2 T_1$ .

在  $m$  是奇数的情况下, 考虑方程

$$|1 + k|z^2 - z - |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2| = 0. \quad (27)$$

显然方程 (27) 有正根

$$T_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4|1+k||c_2 - kz_{\text{ref2}}^2|}}{2|1+k|}.$$

当  $|z| > T_2$  时, 有  $|f(z)| > \left(\frac{|z|}{T_2}\right)^2 T_2$ . 推理见附录 A3.

令  $T = \max\{T_1, T_2\}$ , 因此当  $|z| > T$  时, 有

$$f^n(z) > \left(\frac{|z|}{T}\right)^{2^n} T \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty),$$

显然, 系统 (24) 的 Julia 集包含在集合  $\{z : |z| \leq T\}$  内.

根据 Julia 集性质, 吸引不动点  $z_1^*, z_2^*$  或  $\infty$  的吸引域的边界即为 Julia 集, 由此我们讨论系统 (24) 的平面交替 Julia 集. 令  $C_0$  表示曲线  $|z| = T$ , 显然  $C_0$  包含稳定的不动点  $z_1^*, z_2^*$ . 由于

$$\begin{aligned} &|f^{-1}(C_0)|^2 \\ &= \left\{ \left\{ \frac{|T_1 e^{i\theta} - |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2||}{|1+k|} : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \frac{|T_2 e^{i\theta} - |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2||}{|1+k|} : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} \right\}, \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} |f^{-1}(C_0)|^2 &\leq \max \left\{ \left| \frac{T_1 e^{i\theta} - |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2||}{|1+k|} \right|, \right. \\ &\quad \left. \left| \frac{T_2 e^{i\theta} - |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2||}{|1+k|} \right| \right\} \\ &\leq \max\{|T_1 e^{i\theta}|^2, |T_2 e^{i\theta}|^2\} \\ &\leq |T e^{i\theta}|^2 = T^2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{aligned}$$

即  $|f^{-1}(C_0)| \leq T$ , 因此  $f^{-1}(C_0)$  包含于  $C_0$  围成的区域内, 并记  $C_1 = f^{-1}(C_0)$ . 用类似的方法继续下去, 可以得到一个序列  $C_p, p = 0, 1, 2, 3, \dots$ , 满足  $C_{p+1}$  包含于  $C_p$  所围成的区域内. 当  $p \rightarrow \infty$  时, 曲线  $C_p$  逼近  $z_1^*, z_2^*$  的吸引域的边界, 即系统 (24) 的平面交替 Julia 集.

另外,  $m$  为偶数时有

$$\begin{aligned} |f^{-1}(z)|^2 &= \frac{|z - |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2||}{|1+k|} \\ &\leq \frac{|T_1 e^{i\theta}| + |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2|}{|1+k|} \end{aligned}$$

$$\leq |z_{\text{ref1}}^2| + \frac{T_1 + |c_1 + z_{\text{ref1}}^2|}{|1+k|}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (28)$$

同样地, 当  $m$  是奇数时, 有

$$|f^{-1}(z)|^2 \leq |z_{\text{ref2}}^2| + \frac{T_2 + |c_2 + z_{\text{ref2}}^2|}{|1+k|}.$$

因此, 系统 (24) 的 Julia 集随  $|1+k|$  的增加而减小. 当  $c_1 = -0.765 + 0.105i$ ,  $c_2 = -0.76 + 0.1i$  时, 图 4 给出了系统 (24) 的 Julia 集在反馈控制下随参数  $k$  的变化情况, 其中  $k=0$  是无控制时的平面交替 Julia 集.

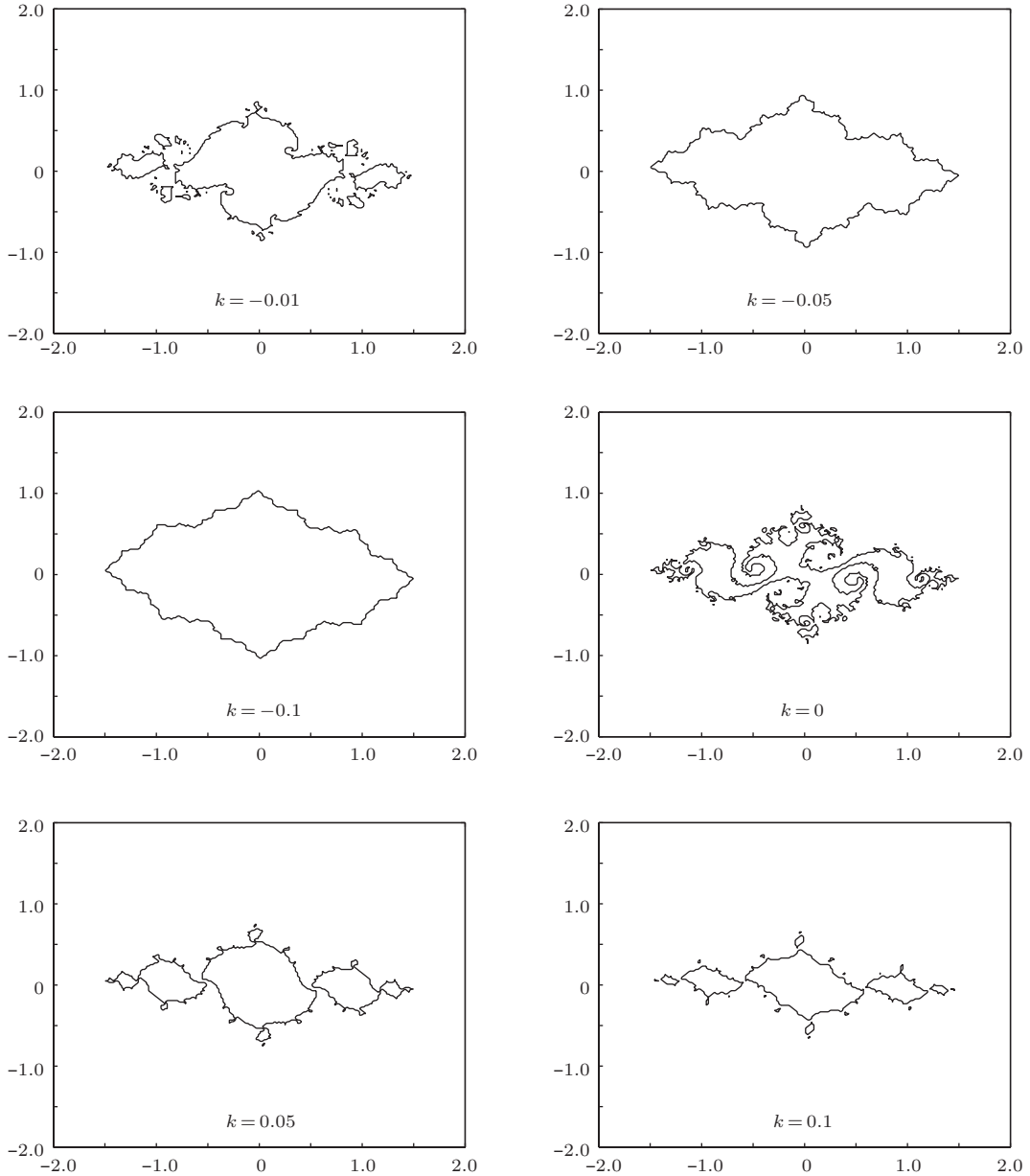


图 4 交替系统 (24) 的平面交替 Julia 集在反馈控制下随参数  $k$  的变化

## 6 结 论

本文中首次提出空间交替系统及空间交替 Julia 集的定义, 并且利用反馈控制方法实现了对空间交替 Julia 集的控制, 仿真结果验证了该控制方法

在空间交替 Julia 集控制上的有效性和可行性. 同时, 我们也实现了不同空间交替 Julia 集的线性广义同步, 仿真结果证明该方法同样适用在空间交替 Julia 集的同步上. 特别地, 我们利用反馈控制方法实现了对平面交替 Julia 集的控制, 仿真结果证明

了该控制思想的有效性. 对空间交替 Julia 集的反饋控制和线性广义同步的实现丰富了空间交替分形理论, 为我们理解更多的非线性现象提供了理论基础.

附录 A

由于

$$f((1+a)z) = (1+a)^2(1+k)z^2 + c_1 - kz_{\text{ref1}}^2 = (1+a)z,$$

那么当  $|z| > T_1, (1+a)|z| > (1+a)T_1$  时, 根据等式 (4), 有

$$\begin{aligned} & |f((1+a)z)| \\ & \geq |(1+a)^2(1+k)z^2| - |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2| \\ & = \frac{|(1+k)(1+a)^2T_1^2|}{T_1^2} z^2 - |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2| \\ & = [(1+a)T_1 + |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2|] \frac{|z|^2}{T_1^2} - |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2| \\ & = (1+a) \left(\frac{|z|}{T_1}\right)^2 T_1 + |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2| \left(\left(\frac{|z|}{T_1}\right)^2 - 1\right) \\ & > (1+a) \left(\frac{|z|}{T_1}\right)^2 T_1 \\ & = \left[\frac{|z|}{T_1}(1+a)^{1/2}\right]^2 T_1. \end{aligned}$$

由于

$$f((1+a)z) = (1+a)^2(1+k)z^2 + c_2 - kz_{\text{ref2}}^2 = (1+a)z,$$

那么当  $|z| > T_2, (1+a)|z| > (1+a)T_2$  时, 根据等式 (5), 有

$$\begin{aligned} & |f((1+a)z)| \\ & \geq |(1+a)^2(1+k)z^2| - |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2| \\ & = \frac{|(1+k)(1+a)^2T_2^2|}{T_2^2} z^2 - |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2| \\ & = [(1+a)T_2 + |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2|] \frac{|z|^2}{T_2^2} - |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2| \\ & = (1+a) \left(\frac{|z|}{T_2}\right)^2 T_2 + |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2| \left(\left(\frac{|z|}{T_2}\right)^2 - 1\right) \\ & > (1+a) \left(\frac{|z|}{T_2}\right)^2 T_2 \\ & = \left[\frac{|z|}{T_2}(1+a)^{1/2}\right]^2 T_2. \end{aligned}$$

附录 B

当

$$M_1 = \frac{\varepsilon_1}{(1+a)^2}, \quad M_2 = \frac{\varepsilon_2}{(1+a)^2}$$

时, 则有  $e_{mn} = (1+M_i)z_{mn} - M_i w_{mn}, i = 1, 2$ , 由此可得

$$w_{mn} = \frac{1+M_i}{M_i} z_{mn} - \frac{1}{M_i} e_{mn}.$$

将  $w_{mn}$  代入 (14) 式, 则有

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = \begin{cases} \frac{1+M_1}{M_1}(1+a)^2(z_{mn} - \frac{e_{mn}}{1+M_1})^2 + \frac{(1+a)^2}{1+M_1}e_{mn}^2 + c_1 & m+n \text{ 是偶数} \\ \frac{1+M_2}{M_2}(1+a)^2(z_{mn} - \frac{e_{mn}}{1+M_2})^2 + \frac{(1+a)^2}{1+M_2}e_{mn}^2 + c_2 & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

由于

$$e_{m+1,n} + ae_{m,n+1} = \begin{cases} (1+a)^2e_{mn}^2 + M_1(c_1 - c_3) + c_1 & m+n \text{ 是偶数} \\ (1+a)^2e_{mn}^2 + M_2(c_2 - c_4) + c_2 & m+n \text{ 是奇数} \end{cases},$$

从而有

$$\begin{cases} z_{m+1,n} - \frac{1}{1+M_1}e_{m+1,n} + a\left(z_{m,n+1} - \frac{1}{1+M_1}e_{m,n+1}\right) \\ = \frac{1+M_1}{M_1}(1+a)^2\left(z_{mn} - \frac{e_{mn}}{1+M_1}\right)^2 + \frac{M_1}{1+M_1}c_3 & m+n \text{ 是偶数} \\ z_{m+1,n} - \frac{1}{1+M_2}e_{m+1,n} + a\left(z_{m,n+1} - \frac{1}{1+M_2}e_{m,n+1}\right) \\ = \frac{1+M_2}{M_2}(1+a)^2\left(z_{mn} - \frac{e_{mn}}{1+M_2}\right)^2 + \frac{M_2}{1+M_2}c_4 & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

当  $W_{mn} = z_{mn} - \frac{1}{1+M_i}e_{mn}$  时, 则有

$$W_{m+1,n} + aW_{m,n+1} = \begin{cases} \frac{1+M_1}{M_1}(1+a)^2W_{mn}^2 + \frac{c_3}{(1+M_1)/M_1} & m+n \text{ 是偶数} \\ \frac{1+M_2}{M_2}(1+a)^2W_{mn}^2 + \frac{c_4}{(1+M_2)/M_2} & m+n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

附录 C

由于

$$f(z) = (1+k)z^2 + c_1 - kz_{\text{ref1}}^2 = z,$$

那么当  $|z| > T_1$  时, 根据 (26) 式有

$$\begin{aligned} |f(z)| & \geq |(1+k)z^2| - |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2| \\ & = \frac{|(1+k)T_1^2|}{T_1^2} z^2 - |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (T_1 + |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2|) \left( \frac{|z|}{T_1} \right)^2 - |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2| \\ &= \left( \frac{|z|}{T_1} \right)^2 T_1 + |c_1 - kz_{\text{ref1}}^2| \left( \left( \frac{|z|}{T_1} \right)^2 - 1 \right) \\ &> \left( \frac{|z|}{T_1} \right)^2 T_1. \end{aligned}$$

由于

$$f(z) = (1+k)z^2 + c_2 - kz_{\text{ref2}}^2 = z,$$

那么当  $|z| > T_2$  时, 根据 (27) 式有

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |(1+k)z^2| - |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2| \\ &= \frac{|(1+k)T_2^2|}{T_2^2} z^2 - |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2| \\ &= (T_2 + |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2|) \left( \frac{|z|}{T_2} \right)^2 - |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2| \\ &= \left( \frac{|z|}{T_2} \right)^2 T_2 + |c_2 - kz_{\text{ref2}}^2| \left( \left( \frac{|z|}{T_2} \right)^2 - 1 \right) \\ &> \left( \frac{|z|}{T_2} \right)^2 T_2. \end{aligned}$$

### 参考文献

[1] Romera M, Ppstor G 2009 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **6** 2123  
 [2] Sui S G 2005 *M. S. Dissertation* (Jinan: Shandong University) (in Chinese) [隋首钢 2005 硕士学位论文 (济南: 山东大学)]

[3] Liu S T, Zhang Y P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 737 (in Chinese)[刘树堂, 张永平 2008 物理学报 **57** 737]  
 [4] Qin W Y, Sun T, Jiao X D, Yang Y F 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 090502 (in Chinese) [秦卫阳, 孙涛, 焦旭东, 杨永锋 2012 物理学报 **61** 090502]  
 [5] Liu P, Liu S T 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Number Simulat.* **16** 3344  
 [6] Liu P, Liu C A 2011 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **21** 1281  
 [7] Liu S T, Chen G R 2003 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **13** 1163  
 [8] Zhang Y P, Liu S T 2008 *Chin. Phys. B* **17** 543  
 [9] Blanchard P, Devaney R, Keen L 2004 *Proc. Symp. Appl. Math.* **60** 37  
 [10] Lakhtakia A, Varadan V V, Messier R, Varadan V K 1987 *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** 3533  
 [11] Goldberger A L, Amaral L A, Hausdorff J M, Ivanov P C, Peng C K, Stanley H E 2002 *Proc. Nat. Acad. Sci.* **99** 2466  
 [12] Ascencio S F, Meana H P, Miyatake M N 2001 *Phys. Engineer. Millim. Sub-Millim. Waves* **1** 241  
 [13] Tamasevicius A 1997 *Electr. Lett.* **33** 1105  
 [14] Blasius B, Huppert A, Stone L 1999 *Nature* **399** 354  
 [15] Liu S T, Wu S, Zhang Y P 2006 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **16** 2697  
 [16] Liang X, Zhang J, Xia X 2008 *IEEE Trans. Autom. Control* **53** 1740  
 [17] Danca M F, Tang W, Chen G 2008 *Appl. Math. Comput.* **201** 650

# Feedback control and linear generalized synchronization of spatial-alternated Julia sets

Wang Pei<sup>†</sup> Liu Shu-Tang

(College of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

( Received 10 July 2013; revised manuscript received 5 December 2013 )

## Abstract

In this paper, the spatial-alternated Julia sets are discussed, which are obtained by alternated iteration of quadratic family  $z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = (1+a)^2 z_{m,n}^2 + c_i, i = 1, 2$ . The control of spatial-alternated Julia sets is accomplished by using the feedback control. Then the linear generalized synchronization of two different spatial-alternated Julia sets is discussed. The simulations demonstrate the effectiveness of the control methods.

**Keywords:** spatial-alternated Julia sets, the feedback control, synchronization, the linear generalized synchronization

**PACS:** 05.45.Df, 47.53.+n, 61.43.Hv

**DOI:** 10.7498/aps.63.060503

---

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [wppink@126.com](mailto:wppink@126.com)