

基于描述函数方法的神经群自激振荡特性分析*

王俊松^{1)2)†} 徐瑶¹⁾

1) (天津医科大学生物医学工程学院, 天津 300070)

2) (约翰霍普金斯大学神经科学系, 巴尔的摩 21218)

(2013年10月10日收到; 2013年11月21日收到修改稿)

在无外界刺激时神经群表现为节律性自激振荡, 自激振荡是非线性系统特有的一种运动形式. 在非线性描述函数法理论框架下, 对神经群模型自激振荡特性进行分析, 并揭示其产生机理. 神经群模型的 sigmoid 非线性函数 (简称为 S 函数) 是其自激振荡的根源. 首先, 求解 S 函数的描述函数; 然后, 基于 S 函数的描述函数得到神经群模型正反馈回路 S 函数和负反馈回路 S 函数的等效增益, 在此基础上将神经群模型转化为可用描述函数法分析的典型结构形式; 最后, 应用描述函数法理论对神经群模型自激振荡特性进行理论分析, 得到自激振荡特性的定量描述, 并通过仿真分析对理论分析结果进行了验证. 理论分析及仿真分析结果表明基于描述函数方法的神经群自激振荡特性分析方法是正确有效的. S 函数是神经系统的典型非线性环节, S 函数的处理方法及神经群自激振荡特性分析方法对于其他神经模型的自激振荡特性分析具有参考价值.

关键词: 神经群模型, sigmoid 非线性函数, 描述函数, 自激振荡

PACS: 87.10.-e, 87.18.Sn, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.068701

1 引言

神经电活动具有节律性振荡特征, 神经振荡是神经系统信息传递和处理的基础, 是研究大脑功能的重要途径^[1,2]. 神经系统是典型的多尺度系统, 已有神经模型主要包括微观尺度的神经元模型^[3,4]和介观尺度的神经群模型 (NMM)^[5,6]. NMM 基于平均场建模思想, 采用集总变量反映整个细胞群体的平均行为, 因此 NMM 具有变量个数少、便于分析的优点^[5,6].

NMM 最初是由 Lopes 等^[7]为模拟 α 节律脑电信号而提出的, 其结构表现为兴奋性子群和抑制性子群的相互作用. 经过不断地发展和完善, NMM 在计算神经科学领域得到了广泛的应用^[8]. Jansen 和 Rit^[5]在文献^[7]提出的 NMM 结构基础上引入兴奋性自反馈回路, 提出了一种同时包含正负反馈回路的 NMM, 该模型及其扩展形式可以模拟产生脑电图 (EEG)^[5,9]、癫痫 EEG^[10,11]、局域场电位^[12]、

功能磁共振成像^[13,14]、脑磁图^[15]等信号. NMM 只能得到单一频段信号, 而实测脑电信号包含多频段的神经振荡信号^[16]. 为此, David 和 Friston^[15]将经典 NMM 的突触模型扩展为双动力学模型, 崔冬等^[17]进一步将之扩展为多动力学 NMM, 可以产生 δ 到 γ 的多频段神经振荡信号.

已有研究侧重于应用 NMM 模拟产生各种形式的脑电信号, 研究手段以仿真模拟为主, 对 NMM 自激振荡机理的深入研究还很少. 文献^[17]主要是通过仿真模拟产生多频带神经振荡信号, 并未剖析多动力学 NMM 振荡信号的产生机理. NMM 的 sigmoid 非线性函数 (简称为 S 函数) 本质为饱和环节, 已有的关于 NMM 的解析分析主要建立在 S 函数线性化基础上^[18,19], 即以 S 函数线性段的斜率近似代替 S 函数. S 函数的简单线性化会导致很大的分析误差, 更重要的是因为自激振荡只能产生于非线性系统, 所以建立在 S 函数线性化基础上的理论分析不能解释神经群自激振荡的产生机理.

* 国家自然科学基金重大项目 (批准号: 91132722) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wjsong2004@126.com

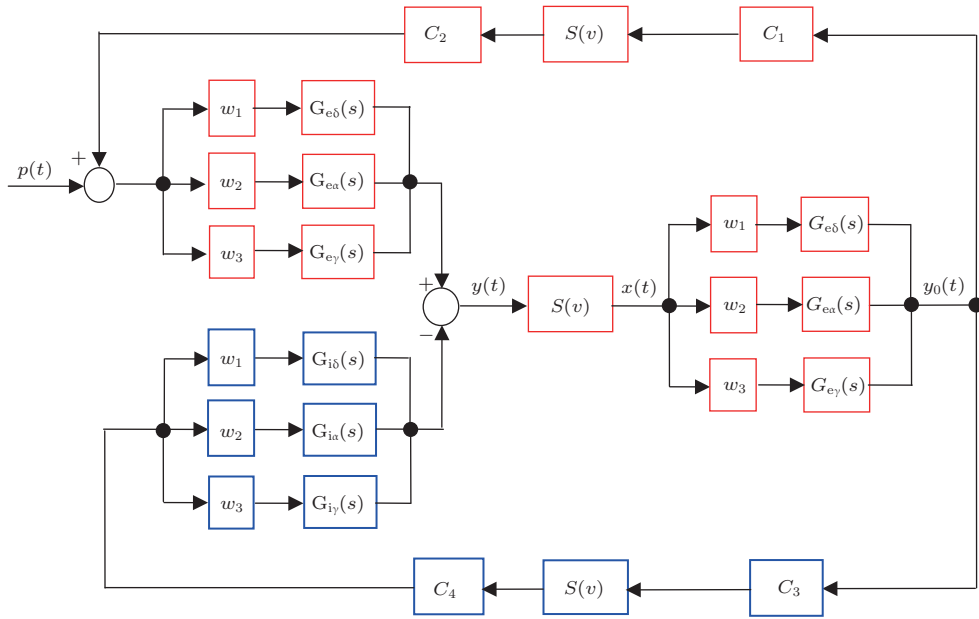


图2 (网刊彩色) 多动力学 NMM 框图

表1 多动力学 NMM 参量的生理意义及典型值

参量	生理意义	δ	α	γ
H_e/mV	兴奋性突触增益	2	3.25	7.5
H_i/mV	抑制性突触增益	15	22	150
τ_e/s	兴奋性时间常数	0.15	0.01	0.0046
τ_i/s	抑制性时间常数	0.15	0.02	0.0029
C_1, C_2	兴奋性反馈回路的平均突触连接数	$C_1 = 135, C_2 = 0.8 \times 135$		
C_3, C_4	抑制性反馈回路的平均突触连接数	$C_3 = C_4 = 0.25 \times 135$		
e_0/s^{-1}	点燃率	2.5		
r/mV^{-1}	S 型函数的弯曲度	0.56		

触和 γ 抑制性突触的传递函数; w_1, w_2 和 w_3 分别是 δ 突触、 α 突触和 γ 突触的权系数。

多动力学 NMM 参量的生理意义及典型值 [5,17] 列于表 1. 本文主要研究图 2 所示的多动力学 NMM 的自激振荡特性, 为表述方便, 下面将“多动力学 NMM”简称为“NMM”。

3 基于描述函数法的 NMM 处理

NMM 包含三个 S 函数, 为典型的非线性系统, 可应用描述函数方法对 NMM 的自激振荡特性进行分析, 需要将 NMM 变换为图 3 所示的由一个非线性环节和一个线性部分闭环连接的典型结构形式 [20]. 这里, $N(A)$ 为非线性环节的描述函数, A 为 S 函数输入信号的幅值; $G(s)$ 为线性部分的传递

函数。

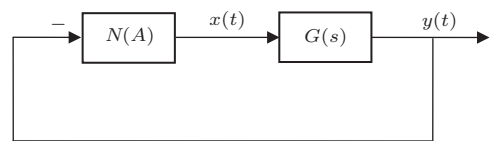


图3 非线性系统的典型结构

为便于分析和阐述, 将图 2 表示成图 4 所示的紧凑形式, 其中, $G_e(s) = w_1G_{e\delta}(s) + w_2G_{e\alpha}(s) + w_3G_{e\gamma}(s)$, $G_i(s) = w_1G_{i\delta}(s) + w_2G_{i\alpha}(s) + w_3G_{i\gamma}(s)$. 为将 NMM 变换为图 3 所示的典型结构形式, 本文采取的主要思路如图 4 所示, 以 NMM 前向通路 S 函数的描述函数 $N_S(A)$ 为典型结构图 3 中的非线性环节, 将 NMM 中除前向通路 S 函数以外部分的等效传递函数 $G_{NMM}(s)$ 为图 3 中的线性部分。

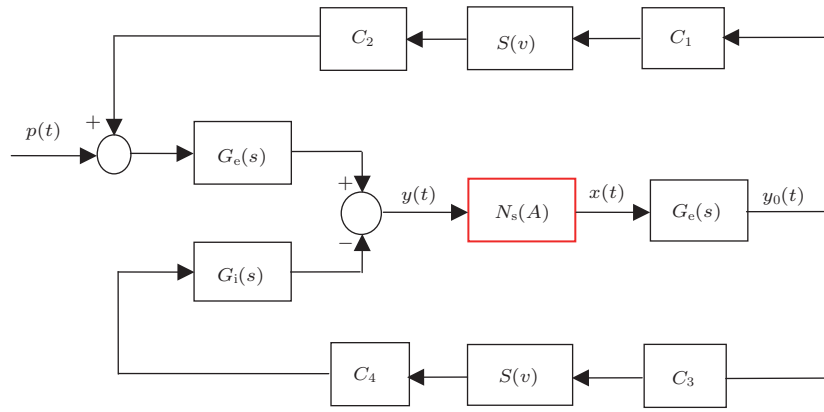


图4 (网刊彩色) NMM 紧凑形式的框图

3.1 求 S 函数的描述函数 $N_S(A)$

将 (3) 式所示的 S 函数做如下变换:

$$\begin{aligned} S(v) &= e_0 \frac{1 - e^{-rv}}{1 + e^{-rv}} \\ &= e_0 \frac{e^{\frac{rv}{2}} - e^{-\frac{rv}{2}}}{e^{\frac{rv}{2}} + e^{-\frac{rv}{2}}} \\ &= e_0 \tanh\left(\frac{r}{2}v\right). \end{aligned} \quad (4)$$

为了求 S 函数的描述函数 $N_S(A)$, 将 $S(v)$ 的稳态输出按傅里叶级数展开,

$$S(v) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega v) + B_n \sin(n\omega v)),$$

其中, A_0 为直流分量, $A_n \cos(n\omega v) + B_n \sin(n\omega v)$ 为第 n 次谐波分量, $n = 1, 2, \dots$.

因为 $S(v)$ 为 v 的奇对称函数, 所以直流分量 $A_0 = 0$, 傅里叶系数 $A_n = 0$, 所以

$$S(v) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega v).$$

一般而言, $n > 1$ 的谐波分量很小, 所以

$$S(v) \approx B_1 \sin(\omega v), \quad (5)$$

其中一次谐波的傅里叶系数 B_1 为

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(v) \sin(\omega v) d(\omega v). \quad (6)$$

根据描述函数的定义^[20], 可得到 S 函数的描述函数 $N_S(A)$,

$$N_S(A) = |N_S(A)| e^{j\phi} = \frac{B_1 + jA_1}{A} = \frac{B_1}{A}, \quad (7)$$

其中 ϕ 为 $N_S(A)$ 的相位. 这里因为 $A_1 = 0$, 所以非线性环节稳态输出 $S(v)$ 的一次谐波分量 $B_1 + jA_1 = B_1$.

由 (5) 和 (7) 式可得

$$\begin{aligned} N_S(A) &= \frac{B_1}{A} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(A \sin(\omega v)) \sin(\omega v) d(\omega v) \\ &= \frac{e_0}{\pi A} \int_0^{2\pi} \tanh\left(\frac{rA \sin(\omega v)}{2}\right) \\ &\quad \times \sin(\omega v) d(\omega v), \end{aligned}$$

代入参数值, 得到 S 函数的描述函数 $N_S(A)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} N_S(A) &= \frac{10}{\pi A} \int_0^{\pi/2} \tanh(0.28A \sin x) \\ &\quad \times \sin x dx. \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式定积分不能直接求得其积分值, 可采用高斯积分法近似求得

$$\begin{aligned} N_S(A) &\approx (0.1826 \times \tanh(1.043 \times A))/A \\ &\quad + (0.1372 \times \tanh(1.106 \times A))/A \\ &\quad + (0.001973 \times \tanh(0.03493 \times A))/A \\ &\quad + (0.06324 \times \tanh(1.119 \times A))/A \\ &\quad + (0.1356 \times \tanh(0.6701 \times A))/A \\ &\quad + (0.0221 \times \tanh(0.1781 \times A))/A \\ &\quad + (0.07138 \times \tanh(0.4078 \times A))/A \\ &\quad + (0.1816 \times \tanh(0.8975 \times A))/A. \end{aligned} \quad (9)$$

3.2 模型变换

对 NMM 中除前向通路 S 函数以外的部分进行等效化简的关键是对正反馈回路和负反馈回路中 S 函数的处理. 根据描述函数的定义, S 函数可以用

其稳态输出和输入的矢量比来代替. 将这种思想进行扩展, 对于神经群的正负反馈回路, 通过一系列矢量运算求出回路的输出和输入的矢量关系, 从而得到神经群正负回路的等效函数 $G_{\text{NMM}}(s)$. 具体方案如下: 首先根据 (9) 式分别计算图 4 中正反馈回路 S 函数和负反馈回路 S 函数的等效增益 K_{se} 和 K_{si} ; 然后以 $x(t)$ 为输入、 $y(t)$ 为输出得到回路等效传递函数 $G_{\text{NMM}}(s)$.

由图 4 可知, NMM 等效变换后正反馈回路和负反馈回路中 S 函数的输入信号幅值分别为 $C_1 \times A_0$ 和 $C_3 \times A_0$, 其中 A_0 为 $y_0(t)$ 的振幅. 根据 (9) 式可分别求得正反馈回路和负反馈回路中 S 函数的等效增益 K_{se} 和 K_{si} 分别为

$$K_{\text{se}} = N_S(C_1 \times y_0) = 0.2532,$$

$$K_{\text{si}} = N_S(C_3 \times y_0) = 0.5988.$$

根据图 4 给出的主要思路, 以 $x(t)$ 为输入、 $y(t)$ 为输出, 求得除前向通路 S 函数以外的线性部分的传递函数为

$$G_{\text{NMM}}(s) = G_e(s)[K_{\text{si}}C_3C_4G_i(s) - K_{\text{se}}C_1C_2G_e(s)], \quad (10)$$

其中,

$$G_e(s) = w_1G_{e\delta}(s) + w_2G_{e\alpha}(s) + w_3G_{e\gamma}(s),$$

$$G_i(s) = w_1G_{i\delta}(s) + w_2G_{i\alpha}(s) + w_3G_{i\gamma}(s). \quad (11)$$

经过上述变换, 可将 NMM 转化为图 3 所示的典型结构形式, 其中 $N_S(A)$ 相当于图 3 中的非线性环节 $N(A)$, $G_{\text{NMM}}(s)$ 相当于图 3 中的线性环节 $G(s)$.

4 基于非线性描述函数法的神经群自激振荡特性分析

4.1 理论分析

由图 3 所示的 NMM 典型结构可得到其闭环特征方程为

$$1 + N_S(A)G_{\text{NMM}}(j\omega) = 0, \quad (12)$$

其中 $G_{\text{NMM}}(j\omega)$ 表现了 $G_{\text{NMM}}(s)$ 的频率特性. 将 (12) 式改写为

$$G_{\text{NMM}}(j\omega) = -\frac{1}{N_S(A)}, \quad (13)$$

其中 $-\frac{1}{N_S(A)}$ 为非线性环节的负倒描述函数. 根据描述函数方法, 由 (13) 式可求得其实数解 ω , 即 NMM 自激振荡的角频率.

(13) 式不便于直接求解, 实际中经常采用控制理论的频域分析图解法求解, 即在复平面上绘制 $-\frac{1}{N_S(A)}$ 直线和 $G_{\text{NMM}}(j\omega) - \frac{1}{N_S(A)}$ 的频率特性曲线——奈奎斯特曲线. 设两条曲线的交点为 $(a, j0)$, 则存在以下关系

$$\text{Re}[G_{\text{NMM}}(j\omega)] = a, \quad -\frac{1}{N_S(A)} = a. \quad (14)$$

根据 (14) 式可以确定 NMM 自激振荡的频率 ω .

根据 (9) 和 (10) 式, 在复平面上绘制 $-\frac{1}{N_S(A)}$ 直线和 $G_{\text{NMM}}(j\omega)$ 的奈奎斯特曲线, 如图 5 所示, 其中直线为 $-\frac{1}{N_S(A)}$ 的图形, 曲线为 $G_{\text{NMM}}(j\omega)$ 的奈奎斯特曲线. 在图 5(a) 中只能看到一个交点 $(-5730, j0)$, 将图 5(a) 原点部分进行放大得到图 5(b). 从图 5(b) 可以看到, 两条曲线还存在另外两个交点 $(-4.59, j0)$ 和 $(-2.23, j0)$.

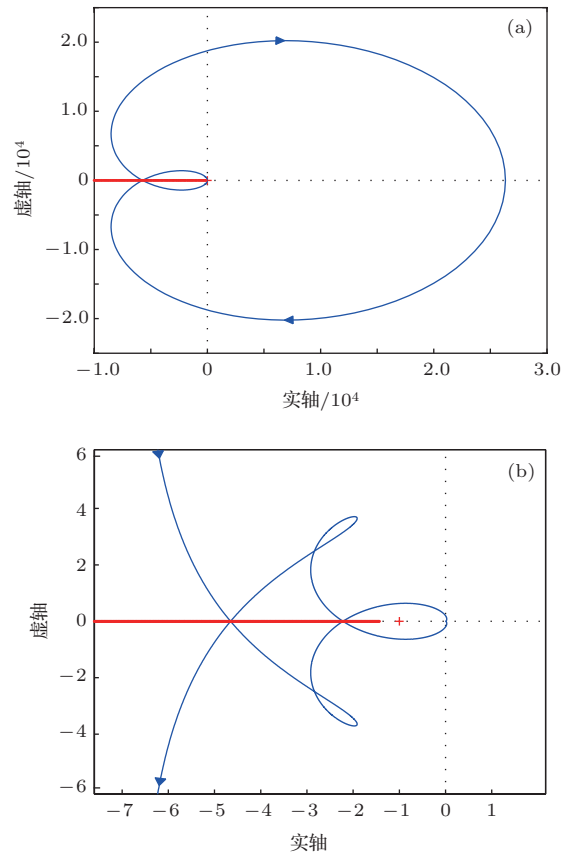


图 5 NMM 自激振荡理论分析结果 (a) 奈奎斯特曲线; (b) 图 (a) 原点附近的放大图

由 (14) 式可解得 NMM 的三个自激振荡频率分别为 $\omega_1 = 7.0 \text{ rad/s}$ (1.1 Hz), $\omega_2 = 52.5 \text{ rad/s}$ (8.4 Hz), $\omega_3 = 264 \text{ rad/s}$ (42 Hz), 表明 NMM 的三个自激振荡频率分别位于 δ 频段、 α 频段和 γ 频段范围内.

上述分析表明, $-\frac{1}{N_S(A)}$ 直线与 $G_{NMM}(j\omega)$ 奈奎斯特曲线交点个数对应于自激振荡频段数, 交点越多则自激振荡频段越丰富. 一般而言, S 函数的参数是基本不变的, 而突触模型参数 H_e, τ_e, H_i, τ_i (对应于突触可塑性) 及连接参数 C_1, C_2, C_3, C_4 (对应于结构可塑性) 等是时变的, 上述时变参数通过改变 $G_{NMM}(j\omega)$ 奈奎斯特曲线 (即频率特性) 从而改变交点的个数和位置, 达到对自激振荡特性进行调控的目的.

为表明应用非线性描述函数法对 S 函数处理的必要性, 进一步考虑 S 函数简单线性化的情况, 即 NMM 正负反馈回路的 S 函数不采用由描述函数 $N_S(A)$ 求得的等效增益 K_{se} 和 K_{si} 近似, 而是用 S 函数线性段的斜率近似 [18,19], 此时自激振荡的理论分析结果如图 6 所示. 从图 6 (b) 可以看到, $-\frac{1}{N_S(A)}$ 直线与 $G_{NMM}(s)$ 奈奎斯特曲线无交点, 表明不发生自激振荡, 显然这与实际情况 (下面的仿真结果) 不一致. 这也从相反角度表明 S 函数采用描述函数 $N_S(A)$ 求等效增益 K_{se} 和 K_{si} 的必要性和有效性.

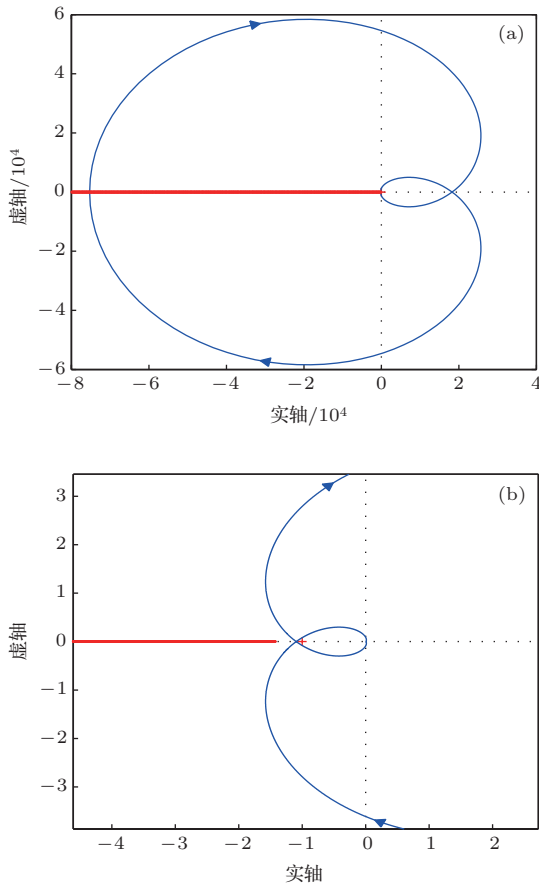


图6 NMM简单线性化的自激振荡理论分析结果 (a) 奈奎斯特曲线; (b) 图(a)原点附近的放大图

4.2 仿真实证

对 NMM (仿真模型是未经过任何近似处理的原始模型) 进行仿真分析, 仿真结果如图 7 所示. 从图 7 可以看出, NMM 可以产生自激振荡, 且自激振荡中包含 $\delta(1-4 \text{ Hz}), \alpha(8-12 \text{ Hz})$ 和 $\gamma(30-70 \text{ Hz})$ 三种典型频段的信号, 与理论分析结果一致. 这表明基于描述函数方法的自激振荡理论分析结果是正确的.

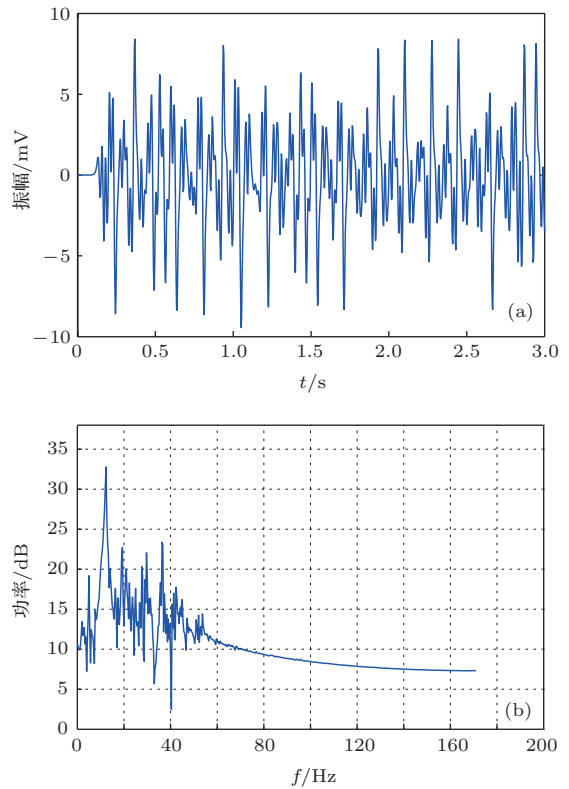


图7 NMM 仿真分析 (a) 仿真输出 EEG 信号; (b) 仿真输出 EEG 信号的功率谱

5 结 论

神经振荡是研究神经系统特性和功能的重要途径, 而在神经振荡产生机理中 S 函数扮演关键角色. 本文从非线性描述函数法这一新视角剖析了神经群自激振荡的产生机理, 不仅从理论层面可以判断神经群是否可以发生自激振荡, 并且还可以得到其自激振荡特性的定量描述. 理论分析及仿真结果表明, 基于描述函数方法的神经群自激振荡分析是可行和有效的. 尽管本文的仿真分析结果与文献 [17] 的结果相似, 但其神经振荡产生机制是不同的, 本文的仿真输出属于自激振荡, 是系统本身的固有属性, 完全由系统自身的因素 (结构和参数值) 决定, 与输入信号无关. S 函数是神经系统的典型

环节. 在其他神经模型中, 本文对于S函数的处理方法同样具有参考价值. 本文的研究表明, 描述函数方法可有效地分析神经系统的自激振荡特性, 该方法对于其他神经模型的自激振荡特性分析具有借鉴意义.

参考文献

- [1] Uhlhaas P J, Singer W 2010 *Nat. Rev. Neurosci.* **11** 100
- [2] Schnitzler A, Gross J 2005 *Nat. Rev. Neurosci.* **6** 285
- [3] Liu S B, Wu Y, Hao Z W, Li Y J, Jia N 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 020503 (in Chinese) [刘少宝, 吴莹, 郝忠文, 李银军, 贾宁 2012 物理学报 **61** 020503]
- [4] Gu H G, Hui L, Jia B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 080504 (in Chinese) [古华光, 惠磊, 贾冰 2012 物理学报 **61** 080504]
- [5] Jansen B H, Rit V G 1995 *Biol. Cybern.* **73** 357
- [6] Deco G, Jirsa V K, Robinson P A, Breakspear M, Friston K 2008 *PLOS. Comput. Biol.* **4** e1000092
- [7] Lopes S F H, Hoeks A, Smits H, Zetterberg L H 1974 *Kybernetik* **15** 27
- [8] Destexhe A, Sejnowski T J 2009 *Biol. Cybern.* **101** 1
- [9] Zavaglia M, Astolfi L, Babiloni F, Ursino M 2008 *Biomed. Eng.* **55** 69
- [10] Wendling F, Bartolomei F, Bellanger J J, Chauvel P 2002 *Eur. J. Neurosci* **15** 1499
- [11] Liu X, Ma B W, Liu H J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 020202 (in Chinese) [刘仙, 马百旺, 刘会军 2013 物理学报 **62** 020202]
- [12] Zheng Y, Luo J J, Harris S, Kennerley A, Berwick J, Billings S A, Mayhew J 2012 *NeuroImage* **63** 81
- [13] Stephan K E, Kasper L, Harrison L M, Daunizeau J, den Ouden H E, Breakspear M, Friston K J 2008 *NeuroImage* **42** 649
- [14] Babajani A, Soltanian-Zadeh H 2006 *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **53** 1794
- [15] David O, Friston K J 2003 *NeuroImage* **20** 1743
- [16] Buzsáki G, Draguhn A 2004 *Science* **304** 1926
- [17] Cui D, Li X L, Ji X Q, Liu L X 2011 *Sci. China: Inf. Sci.* **54** 1283 (in Chinese) [崔冬, 李小隼, 吉学青, 刘兰祥 2011 中国科学: 信息科学 **54** 1283]
- [18] van Rotterdam A, Lopes da Silva F H, van den Ende J, Viergever M A, Hermans A J 1982 *Bull. Math. Biol.* **44** 283
- [19] Abbas B F, Hamid S Z 2010 *NeuroImage* **52** 793
- [20] Hu S S 2007 *Automatic Control Principle* (5th Ed.) (Beijing: Science Press) pp408–422 (in Chinese) [胡寿松 2007 自动控制原理 (第五版) (北京: 科学出版社) 第408—422页]

Spontaneous oscillation analysis of neural mass model using describing function approach*

Wang Jun-Song^{1)2)†} Xu Yao¹⁾

1) (*School of Biomedical Engineering, Tianjin Medical University, Tianjin 300070, China*)

2) (*Department of Neuroscience, Johns Hopkins University, Baltimore 21218, USA*)

(Received 10 October 2013; revised manuscript received 21 November 2013)

Abstract

Neural mass model (NMM) can generate spontaneous oscillation even in a resting state. However, it remains little known which mechanism is responsible for NMM's spontaneous oscillation. From dynamical theory, spontaneous oscillation is an intrinsic property of nonlinear system, which means that the sigmoid nonlinear function (S function) of NMM plays a key role in the emergence of its spontaneous oscillation. In this study, describing function approach is employed to analyze the spontaneous oscillation characteristics of a kind of extended NMM. Firstly, the describing function of S function is derived, through which the two S functions in excitatory and inhibitory feedback loop, respectively, are approximated. Secondly, the NMM is transformed into a typical block diagram composed of a nonlinear unit and a linear unit. Thirdly, in the theoretical framework of describing function approach, theoretical analysis of the spontaneous oscillation characteristics of NMM is conducted, and the oscillation frequencies are determined. The simulation results demonstrate that the theoretical results are correct and the employed approach is effective. Since S function exists extensively in neural system, the proposed approach has a potential application in the spontaneous oscillation analysis of other neural model.

Keywords: neural mass model, sigmoid nonlinear function, describing function, spontaneous oscillation

PACS: 87.10.-e, 87.18.Sn, 05.45.-a

DOI: [10.7498/aps.63.068701](https://doi.org/10.7498/aps.63.068701)

* Project supported by the Major Research Plan of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 91132722).

† Corresponding author. E-mail: wjsong2004@126.com