

## 自适应光学系统倾斜校正回路的最优闭环带宽\*

郭友明<sup>1)2)3)</sup> 马晓燮<sup>1)2)</sup> 饶长辉<sup>1)2)†</sup>

1)(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

2)(中国科学院自适应光学重点实验室, 成都 610209)

3)(中国科学院大学, 北京 100049)

(2013年10月14日收到; 2013年12月7日收到修改稿)

基于实际自适应光学系统倾斜校正回路最常使用的比例积分控制器, 分析了最优闭环带宽与大气湍流、测量噪声之间的关系. 利用满足Kolmogorov湍流整体倾斜功率谱密度的时间序列进行了相关的数值仿真. 结果表明, 根据不同湍流强度及测量噪声选择合适的闭环带宽, 可以充分发挥自适应光学系统倾斜校正回路的闭环校正能力, 减小闭环残差.

**关键词:** 自适应光学, 倾斜校正, Tyler频率, 最优闭环带宽

**PACS:** 95.75.Qr, 42.68.Wt, 07.05.Tp

**DOI:** 10.7498/aps.63.069502

## 1 引言

自适应光学 (adaptive optics, AO) 系统通过实时测量、校正受到大气湍流扰动影响的光波前来提高成像系统的成像质量, 在天文观测和人眼观测等领域具有重要的应用<sup>[1,2]</sup>. 自适应光学系统通常由波前探测器<sup>[3]</sup>、波前控制器和波前校正器组成<sup>[4]</sup>. 大气湍流引入的波前相位变化通常包含整体倾斜和高阶像差. 一般AO系统通常使用一面或者多面高速倾斜反射镜 (简称倾斜镜) 校正大气湍流中的整体倾斜部分, 该倾斜镜的闭环控制回路通常称为倾斜校正回路<sup>[5]</sup>. 对于大气湍流引起的波前相位变化, 整体倾斜导致的波前相位方差所占比例达到87%<sup>[6]</sup>. 因此, 如何有效地校正大气湍流引入的整体倾斜将是AO系统校正能力的决定性因素之一. 近些年来, 为扩大AO系统的视场, 人造激光导引星技术成为研究热点<sup>[7]</sup>. 目前的研究表明, 倾斜校正回路并不能使用激光导引星作为观测目标 (信标) 来获取光波前的整体倾斜, 而依然需要使用各种星等的自然导引星<sup>[8]</sup>. 跟踪探测器测量噪声的

统计特性也将根据观测目标的不同而发生较大变化. 此外, 由于大气湍流相干长度、横向风速等特性也并非固定不变, 将导致整体倾斜的功率谱密度发生变化<sup>[9]</sup>. 因此, 根据大气湍流条件及观测目标的变化而选择合适的闭环带宽, 对于充分发挥倾斜校正回路的闭环校正能力至关重要. 为研究大气湍流的闭环残余方差, Tyler<sup>[9]</sup>提出了不考虑时间延迟的理想倾斜校正回路的闭环残余方差与闭环带宽的关系. 李新阳和姜文汉<sup>[10]</sup>分析了基于比例积分控制器的AO系统的开环带宽、闭环带宽、误差(-3 dB)带宽之间的关系. 郭友明等<sup>[2]</sup>分析了有时间延迟的实际倾斜校正回路闭环残余方差与误差-3 dB之间的关系, 提出了修正有效带宽的概念. 饶长辉和姜文汉<sup>[11]</sup>从理论上分析了AO系统高阶回路的最佳闭环带宽及极限工作星等. 李新阳和姜文汉<sup>[12]</sup>从理论上分析了有时间延迟AO系统高阶回路的最优控制带宽. 但目前还未见有关AO系统倾斜校正回路的最优闭环带宽的研究, 更未见相关的数值仿真验证. 为此, 本文基于实际AO系统倾斜校正回路最常使用的比例积分控制器, 分析了最优闭环带宽与大气湍流、测量噪声之间的关系, 得

\* 国家自然科学基金联合基金 (批准号: 11178004) 和中国科学院光电技术研究所研究生创新基金 (批准号: 2013.2) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: [chrao@ioe.ac.cn](mailto:chrao@ioe.ac.cn)

出了相关的近似公式, 并利用功率谱反演法<sup>[2]</sup>生成的湍流整体倾斜时间信号和不同强度的测量噪声信号进行了相关的数值仿真验证. 结果表明, 所推导出的最优闭环带宽的理论结果与仿真结果一致. 利用得出的最优闭环带宽的近似公式可以根据不同湍流强度及测量噪声更加容易地调整控制参数, 从而充分发挥 AO 系统的倾斜校正性能, 减小闭环残余方差.

## 2 AO 系统倾斜校正回路控制模型

典型的 AO 系统倾斜校正回路控制框图如图 1 所示. 其中  $r(s)$  为湍流引入的光波前的整体倾斜信号,  $y(s)$  为倾斜镜补偿信号,  $e(s)$  为倾斜残余误差,  $n(s)$  为探测器的测量噪声信号, 主要包括光子噪声、读出噪声等. 跟踪探测器 (TS) 探测到带有测量噪声的残余倾斜, 经过控制运算单元 (CC) 计算得到相应的补偿电压, 经数模转换 (DA)、高压放大器 (HVA) 后施加到倾斜镜 (TM) 上.

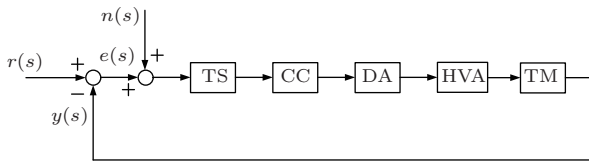


图 1 AO 系统典型倾斜校正回路控制框图

倾斜校正回路的开环传递函数可以简化为

$$G(s) = \frac{y(s)}{e(s)} = K_a \frac{K_i}{s} \frac{[1 - \exp(-T_s s)]^2}{T_s s^2}, \quad (1)$$

其中,  $s$  为复变量;  $T_s$  为采样周期; 如 TS 使用最广泛应用的四象限跟踪探测器, 传递函数为  $\frac{1 - \exp(-T_s s)}{T_s s}$ ; CC 使用最常见的比例积分控制器<sup>[13]</sup>, 传递函数为  $\frac{K_i}{s}$ ; DA 环节使用零阶保持器模型, 传递函数为  $\frac{1 - \exp(-T_s s)}{s}$ ; HVA 与 TM 的带宽一般远大于闭环带宽, 可在此将它们的作用考虑为增益  $K_a$ .

利用一阶近似关系可得

$$\frac{1 - \exp(-T_s s)}{T_s s} \approx \exp\left(-\frac{T_s s}{2}\right), \quad (2)$$

将 (2) 式代入 (1) 式有

$$G(s) = \frac{K}{s} \exp(-\tau s), \quad (3)$$

其中,  $K = K_a K_i T_s$  为回路总增益,  $\tau = T_s$  为回路的等效时延. 倾斜校正回路对应的闭环传递函数与误差抑制传递函数分别为

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}, \quad (4)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)}, \quad (5)$$

倾斜校正回路的闭环带宽与误差抑制 -3 dB 带宽分别定义为

$$|H(f)|^2|_{f=f_{3dB}} = \frac{1}{2}, \quad (6)$$

$$|E(f)|^2|_{f=f_{e3dB}} = \frac{1}{2}, \quad (7)$$

其中,  $|H(f)|$ ,  $|E(f)|$  分别为  $H(s)$  与  $E(s)$  对应的频率响应函数的幅值.  $f_{3dB}$  称为闭环带宽, 而  $f_{e3dB}$  称为误差抑制 -3 dB 带宽. 根据文献<sup>[10]</sup>的分析, 有

$$f_{3dB} \approx \frac{K}{2\pi(1 - K\tau)}, \quad (8)$$

$$f_{e3dB} = \frac{f_{3dB}}{\sqrt{1 + 2\pi\tau f_{3dB}}}. \quad (9)$$

## 3 倾斜校正回路的最优闭环带宽

### 3.1 Kolmogorov 湍流补偿残余方差

由于倾斜校正回路的闭环残余方差  $\sigma^2$  为湍流补偿残余方差  $\sigma_{sa}^2$  与测量噪声引入的闭环噪声方差  $\sigma_{sn}^2$  之和<sup>[10]</sup>:

$$\sigma^2 = \sigma_{sa}^2 + \sigma_{sn}^2 = \int_0^\infty |E(f)|^2 F_a(f) df + \int_0^\infty |H(f)|^2 F_n(f) df, \quad (10)$$

其中,  $F_a$  为湍流整体倾斜功率谱密度;  $F_n$  为测量噪声功率谱密度. 根据文献<sup>[2]</sup>的分析, Kolmogorov 湍流的闭环校正残余误差

$$\sigma_{sa}^2 \approx \left(\frac{f_T}{f_{\text{Effective}}}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{D}\right)^2, \quad (11)$$

其中,  $\lambda$  为观测波长;  $D$  为望远镜主口径;  $f_T$  为 Tyler 频率, 其具体定义请参考文献<sup>[9]</sup>;  $f_{\text{Effective}}$  为修正有效带宽, 其与  $f_{e3dB}$  的关系为

$$f_{\text{Effective}} \approx \frac{f_{e3dB}}{\sqrt{0.77566 - 0.00109 f_{e3dB}}} \approx \frac{f_{e3dB}}{\sqrt{0.77566}}. \quad (12)$$

### 3.2 测量噪声引入的闭环噪声方差

跟踪探测器的测量噪声一般可以近似为白噪声, 假定测量噪声信号的均方根等于  $\sigma_n$ , 则其对应的时间功率谱密度

$$F_n = \frac{\sigma_n^2}{f_s/2}, \quad (13)$$

其中,  $f_s$  为倾斜校正回路的采样频率, 一般认为闭环传递函数近似满足一阶低通滤波器模型的控制

$$\sigma_{sn}^2 = \frac{\pi f_{3dB} F_n}{2}. \quad (14)$$

### 3.3 最优闭环带宽

根据 3.1 和 3.2 可知, 闭环残余方差与闭环带宽的关系为

$$\sigma^2 = 0.77566(1 + 2\pi\tau f_{3dB}) \left(\frac{f_T}{f_{3dB}}\right) \left(\frac{\lambda}{D}\right)^2 + \frac{\pi f_{3dB} F_n}{2}. \quad (15)$$

已有的研究<sup>[11,12]</sup>表明: 随着  $f_{3dB}$  的增大,  $\sigma_{sa}^2$  越来越小, 而  $\sigma_{sn}^2$  却越来越大, 最终将使得  $\sigma^2$  呈现先减小后增大的特点. 因此寻找最优闭环带宽使  $\sigma^2$  最小, 是充分发挥倾斜校正回路闭环校正能力的重要保证. 为此, 令

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial f_{3dB}} = 0, \quad (16)$$

使用一元三次方程的卡尔丹公式, 获取 (16) 式的实数解, 可得倾斜校正回路的最优闭环带宽满足

$$f_{3dB}^* = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad (17)$$

其中,

$$p = -12.4\tau(f_T\lambda)^2/(F_n D^2),$$

$$q = -3.1(f_T\lambda)^2/(\pi F_n D^2).$$

### 4 最优闭环带宽仿真

本文使用文献<sup>[2]</sup>中的方法来生成满足 Kolmogorov 湍流整体倾斜信号功率谱密度的时间序列. 仿真时假定望远镜的主口径  $D$  为 1.76 m; 观测波长  $\lambda$  为 500 nm; 天顶角  $0^\circ$ ; 等效横向风速 20 m/s;

跟踪探测器的采样频率为 5000 Hz; 等效时间延迟为 0.2 ms (一个采样周期); 模拟的湍流为单层, 其折射率结构常数和横向风速在传输路径上相等, 传输路径为 3000 m. 仿真中生成了满足典型大气相干长度 5.0, 10.0, 20.0 cm 的整体倾斜信号各 10 组.

在上述条件下, 不考虑测量噪声时, 湍流残余方差与闭环带宽的关系如图 2 所示. 其中理论结果由 (11) 式得到, 仿真结果为 10 次试验的平均结果. 可以看出理论结果与仿真结果一致, 因此湍流残余方差可以由 (11) 式进行准确估计.

假定跟踪探测器的测量噪声为均方根分别为 100, 200, 300 nrad 的高斯白噪声, 仿真了闭环噪声方差与闭环带宽的关系, 结果如图 3 所示. 其中, 理论结果由 (14) 式计算获取. 可以看出理论结果与仿真结果一致. 因此, 闭环噪声方差可以由 (14) 式进行准确的估计.

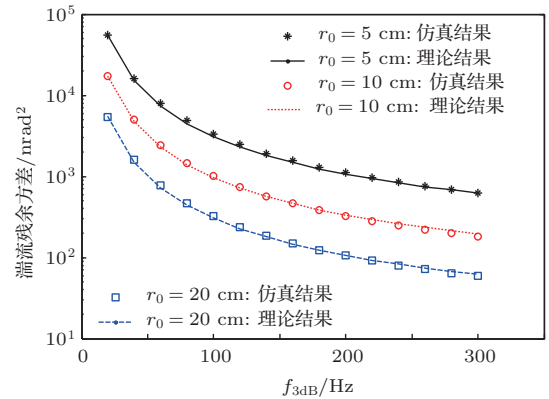


图 2 湍流残余方差与闭环带宽的关系

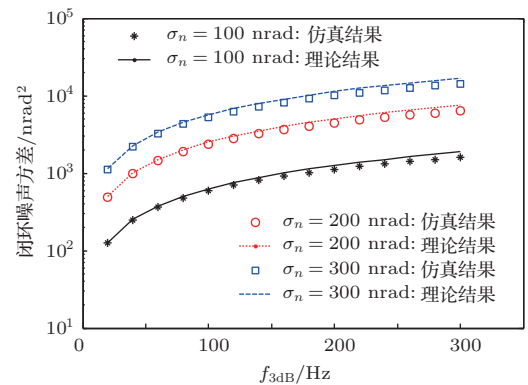


图 3 闭环噪声方差与闭环带宽的关系

通过图 2 和图 3 可以发现, 随着闭环带宽的增大, 湍流残余方差与闭环噪声方差趋势确实截然相反: 湍流残余方差越来越小, 而闭环噪声方差却越来越大. 因此, 实际的倾斜校正回路中, 寻找准确的最优闭环带宽, 对于充分发挥倾斜校正回路的校正能力, 减小闭环残余方差很重要.

为此, 我们利用之前生成的整体倾斜信号和不同强度的测量噪声信号进行了仿真分析. 通过调整控制参数  $K_i$ , 使闭环带宽持续增加, 记录不同闭环带宽下对应的闭环残余方差, 并找到使其最小的最优闭环带宽的仿真结果. 利用 (17) 式计算得到最优闭环带宽的理论结果. 不同湍流条件下最优闭环带宽与测量噪声间的关系如图 4 所示. 通过对比可以发现, (17) 式给出的最优闭环带宽理论结果与仿真结果一致. 由于不同湍流强度、不同测量噪声均方根下所需的最优闭环带宽差别很大, 因此为实现优化控制, 可根据实际大气条件及测量噪声情况, 利用 (17) 式得到对应的最优闭环带宽, 再由此选取合适的控制参数使得系统闭环带宽接近该最优闭环带宽. 图 5 为不同湍流条件下, 最小闭环残余方差与测量噪声均方根之间的关系. 其中, 理论结果由 (15) 和 (17) 式计算获得. 可以看出理论结果与仿真结果依然一致.

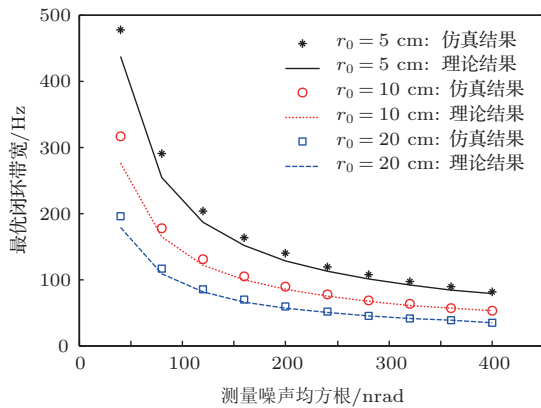


图 4 最优闭环带宽与测量噪声均方根的关系

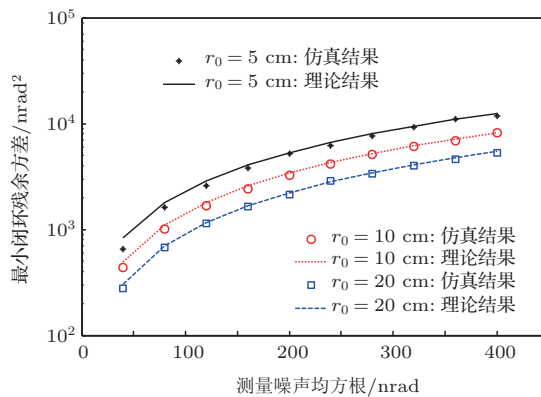


图 5 最小闭环残余方差与测量噪声均方根的关系

## 5 结 论

本文基于 AO 系统倾斜校正回路广泛使用的比例积分控制器, 分析了最优闭环带宽与大气湍流、测量噪声的关系, 并提出了最优闭环带宽的近似计算方法. 通过仿真不同湍流强度和测量噪声所需的最优带宽, 验证了所提计算方法的正确性. 本文的研究结果对实际 AO 系统倾斜校正回路闭环带宽的选择具有指导和参考意义.

感谢中国科学院光电技术研究所的姜文汉院士对作者研究工作的指导以及帮助.

## 参考文献

- [1] Jiang W H, Li M Q, Tang G M, Ling N, Li M, Zheng D F 1995 *Opt. Eng.* **34** 15
- [2] Guo Y M, Ma X Y, Rao C H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 134207 (in Chinese)[郭友明, 马晓燊, 饶长辉 2013 物理学报 **62** 134207]
- [3] Luo Q, Huang L H, Gu N T, Rao C H 2012 *Chin. Phys. B* **21** 094201
- [4] Ning Y, Zhou H, Yu H, Rao C H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1089
- [5] Guo Y M, Ma X Y, Rao C H 2012 *Proc. SPIE* **8415** 84150X
- [6] Hardy J W 1998 *Adaptive Optics for Astronomical Telescopes* (New York: Oxford University Press) pp316–344]
- [7] Parenti R R, Sasiela R 1994 *J. Opt. Soc. Am. A* **11** 288
- [8] Rigaut F, Gendron E 1992 *Astron. Astrophys.* **261** 677
- [9] Tyler G A 1994 *J. Opt. Soc. Am. A* **11** 358
- [10] Li X Y, Jiang W H 1997 *Acta Opt. Sin.* **17** 1697 (in Chinese) [李新阳, 姜文汉 1997 光学学报 **17** 1697]
- [11] Rao C H, Jiang W H 1996 *High Power Laser and Particle Beams* **8** 469 (in Chinese) [饶长辉, 姜文汉 1996 强激光与粒子束 **8** 469]
- [12] Li X Y, Jiang W H 2000 *Acta Opt. Sin.* **20** 1328 (in Chinese) [李新阳, 姜文汉 2000 光学学报 **20** 1328]
- [13] Kulcsar C, Raynaud H F, Petit C, Conan J M, Lesegno P V 2006 *Opt. Express* **14** 7464

# Optimal closed-loop bandwidth of tip-tilt correction loop in adaptive optics system\*

Guo You-Ming<sup>1)2)3)</sup> Ma Xiao-Yu<sup>1)2)</sup> Rao Chang-Hui<sup>1)2)</sup>†

1) (*Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209, China*)

2) (*The Key Laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209, China*)

3) (*University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

( Received 14 October 2013; revised manuscript received 7 December 2013 )

## Abstract

Based on the most widely used proportional-integrator controller of the tip-tilt correction loop in an adaptive optical system, the relationship between the optimal closed-loop bandwidth and the atmosphere turbulence as well as the sensor noise is analyzed. Numerical simulation is also performed by using the time serial signals that follow the power spectrum density of the global tilt of Kolmogorov turbulence. Results show that with different atmosphere turbulences and sensor noises, the correction capability of the tip-tilt correction loop can be brought into full play by choosing appropriate closed-loop bandwidth and the residual variance can be reduced.

**Keywords:** adaptive optics, tip-tilt tracking, Tyler frequency, closed-loop bandwidth

**PACS:** 95.75.Qr, 42.68.Wt, 07.05.Tp

**DOI:** [10.7498/aps.63.069502](https://doi.org/10.7498/aps.63.069502)

---

\* Project supported by the Joint Funds of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11178004), and the Graduate Student Innovation Foundation of the Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences (Grant No. 2013.2).

† Corresponding author. E-mail: [chrao@ioe.ac.cn](mailto:chrao@ioe.ac.cn)