

一个描述金融投资项目演化的量子力学状态方程*

笪诚† 范洪义

(中国科学技术大学材料科学与工程系, 合肥 230026)

(2013年12月8日收到; 2014年1月22日收到修改稿)

本文提出了一个描述金融投资项目演化的量子力学状态方程, 该方程的参数比较好地模拟了金融市场的基本要素, 包括投资(输入)、资产损耗(缩水)、资产增益、和收益(输出)等, 方程中的量子力学算符也能够反映该项目的动力学过程与特征, 所以能代表一类金融投资项目(其状态用 Dirac 符号表示)在市场中的演化模式. 通过引入纠缠态表象得出了该方程的量子解(算符之和形式), 该量子解给出了初态与终态的联系, 也就给出了投资项目的动态过程. 作为例子, 求出单一投资项目在金融市场中的演化, 不但得出了符合市场演化趋势的解, 而且提出了二项-负二项纠缠态. 在推导过程中, 充分利用了 Dirac 符号和有序算符内的积分技术(IWOP).

关键词: 经济物理, 金融投资项目演化, 二项-负二项纠缠态, 纠缠态表象

PACS: 89.65.Gh, 05.90.+m, 03.65.-w

DOI: 10.7498/aps.63.098901

1 引言

物理学现在已经渗透到市场动力学, 初步形成了经济物理学的学科, 一些热力学和统计力学的方程和模型, 如 Kolmogorov 方程, Brown 运动模型, Baptiste 模型, Ising 模型等都渗透到金融的研究中^[1-8]; 市场不稳定性可以找到它的热力学类比, 熵的概念也可以来分析金融市场的动态; 更有甚者, 量子力学的一些概念和方法也已经被金融领域所借鉴, 例如将路径积分技术运用到期货理论和利率模型中^[9], 得到了不少新的结果. 由于考虑到金融市场的基本要素是投资(输入)、资产损耗(缩水)、资产增益、和收益(输出)等^[10,11], 每个金融投资项目状态都随之变化, 是否有一个方程来描写其演化呢? 我们在本文中首次尝试提出一个描述金融投资项目状态的量子力学方程, 该方程的参数比较好地模拟了金融市场的基本要素, 包括投资(输入)、资产损耗(缩水)、资产增益、和收益(输出)等, 方程中的量子力学算符也能够反映该项目的动力学过程与特征, 所以能代表一类金融投资项目(其

状态用 Dirac 符号表示)在市场中的演化模式. 我们通过引入纠缠态表象得出了该方程的量子解(算符之和形式), 该量子解给出了初态与终态的联系, 也就给出了投资项目的动态过程. 作为例子, 我们求出单一投资项目在金融市场中的演化, 不但得出了符合实际市场的解, 而且提出了二项-负二项纠缠态. 在推导过程中, 我们充分利用了 Dirac 符号和有序算符内的积分技术(IWOP). 我们称此方程为金融市场状态演化方程.

2 描述金融市场演化的量子力学状态方程的建立

本节我们提出金融市场某笔投资项目的方程, 鉴于每个项目都在大市场中生息, 所以此方程是在该项目在整个金融大市场背景下(相当于一个热库)约化出来的一个方程(相当于对市场背景的自由度求迹, 即已经考虑到市场的影响), 如下:

$$\frac{dM(t)}{dt} = g [2a^\dagger M(t) a - aa^\dagger M(t) - M(t) aa^\dagger]$$

* 国家自然科学基金(批准号: 11175113)和中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: WK2060140013)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: dacheng@ustc.edu

$$\begin{aligned}
 & + \kappa [2aM(t)a^\dagger - a^\dagger aM(t) \\
 & - M(t)a^\dagger a], \tag{1}
 \end{aligned}$$

其中 $M(t)$ 代表某个投资项目的资产组合状态, g 代表利好因素, 比如说证券市场交易费用的降低或者一项支持金融市场的政策出台等刺激金融市场的因素; κ 代表利空因素, 比如说交易费用提高、市场环境恶化、经济萧条等紧缩金融市场的因素; $M(t)$ 可以用物理中的密度算符(矩阵)来表示, 湮没算符 a 代表损耗(缩水), 产生算符 a^\dagger 代表增益, 满足玻色对易关系, $[a, a^\dagger] = 1$, $a^\dagger M(t)a$ 代表资产增益, $aM(t)a^\dagger$ 代表资产损耗(缩水). 例如, 对于一个单一项目, $M(t) = |n\rangle\langle n|$ 是一个纯态, $|n\rangle$ 是 Dirac 符号, n 表示资金数, 所以

$$a^\dagger M(t)a = a^\dagger |n\rangle\langle n| a = |a^\dagger |n\rangle|^2$$

代表资金增益,

$$aM(t)a^\dagger = a |n\rangle\langle n| a^\dagger = |a |n\rangle|^2$$

代表资金缩水, 所以这是一个既有损耗(缩水)又有增益的方程. 注意, $M(t)aa^\dagger$ 与 $aa^\dagger M(t)$ 是不同的, 这可以从以下例子说明, 一般情况下, 当项目是一个混合型的投资, 相应的

$$M(t) = \sum_{k,l} C_{k,l} |k\rangle\langle l|$$

是一个混合态, $C_{k,l}$ 代表各个投资子项目之间的相互关联系数, 例如基金跟着股票走, 股票 $|k\rangle$ 跌了基金 $|l\rangle$ 跟着跌,

$$aa^\dagger M(t) = \sum_{k,l} (k+1) C_{k,l} |k\rangle\langle l|$$

就代表对 k 项目进行处理, 使得相关系数变化, 使在整个资产组合中, k 项目相对于 l 项目的比重增大, 而

$$M(t)aa^\dagger = \sum_{k,l} (l+1) C_{k,l} |k\rangle\langle l|$$

则代表其相反情况. 方程(1)中的系数2是为了保证密度算符的迹为1. 在下一节中, 我们要求出方程(1)的严格量子解.

3 金融市场演化量子力学状态方程的解

为了求方程(1)的解, 我们引入双模纠缠态^[12-14]

$$|\eta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2 + \eta a^\dagger - \eta^* \tilde{a}^\dagger + a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right) |0\tilde{0}\rangle,$$

$$\eta = \eta_1 + i\eta_2 \tag{2}$$

其中 \tilde{a}^\dagger 是独立于实模 a^\dagger 的虚模, $|0\tilde{0}\rangle$ 被 \tilde{a} 所湮没, $[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$. 将 a 和 \tilde{a} 作用于 $|\eta\rangle$ 我们得到 $|\eta\rangle$ 的本征方程

$$(a - \tilde{a}^\dagger) |\eta\rangle = \eta |\eta\rangle, \quad (a^\dagger - \tilde{a}) |\eta\rangle = \eta^* |\eta\rangle,$$

$$\langle \eta | (a^\dagger - \tilde{a}) = \eta^* \langle \eta |, \quad \langle \eta | (a - \tilde{a}^\dagger) = \eta \langle \eta |, \tag{3}$$

$$(a - \tilde{a}^\dagger) (a^\dagger - \tilde{a}) |\eta\rangle = |\eta|^2 |\eta\rangle. \tag{4}$$

注意到 $[(a - \tilde{a}^\dagger), (a^\dagger - \tilde{a})] = 0$, 因此 $|\eta\rangle$ 是 $(a - \tilde{a}^\dagger)$ 和 $(\tilde{a} - a^\dagger)$ 的共同本征态. $|\eta\rangle$ 具有正交性和完备性, 即

$$\langle \eta' | \eta \rangle = \pi \delta(\eta' - \eta) \delta(\eta'^* - \eta^*), \tag{5}$$

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta\rangle\langle \eta| = 1. \tag{6}$$

有压缩性质^[15]

$$\begin{aligned}
 S & \equiv \int \frac{d^2\eta}{\pi\mu} |\eta/\mu\rangle\langle \eta| \\
 & = \exp[\lambda (a^\dagger \tilde{a}^\dagger - a\tilde{a})] \mu = e^\lambda, \tag{7}
 \end{aligned}$$

$$S|\eta\rangle = \frac{1}{\mu} |\eta/\mu\rangle, \tag{8}$$

$|\eta\rangle$ 给我们提供一个获得 $M(t)$ 主方程的新方法.

我们引入态矢量 $|M\rangle = M|I\rangle$, 此处

$$|I\rangle \equiv |\eta = 0\rangle = \exp(a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0\tilde{0}\rangle. \tag{9}$$

$|I\rangle$ 具有如下性质:

$$\begin{aligned}
 a|I\rangle & = \tilde{a}^\dagger |I\rangle, \quad a^\dagger |I\rangle = \tilde{a} |I\rangle, \\
 (a^\dagger a)^n |I\rangle & = (\tilde{a}^\dagger \tilde{a})^n |I\rangle. \tag{10}
 \end{aligned}$$

在方程(1)两边同时作用 $|I\rangle$, 即得到 $|M(t)\rangle$ 的时间演化方程,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} |M(t)\rangle & = \{g [2a^\dagger \tilde{a}^\dagger - aa^\dagger - \tilde{a}\tilde{a}^\dagger] \\
 & + \kappa(2a\tilde{a} - a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a})\} \\
 & \times |M(t)\rangle. \tag{11}
 \end{aligned}$$

其形式解为

$$\begin{aligned}
 |M(t)\rangle & = \exp [gt (2a^\dagger \tilde{a}^\dagger - aa^\dagger - \tilde{a}\tilde{a}^\dagger) \\
 & + \kappa t (2a\tilde{a} - a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a})] |M_0\rangle, \\
 |M_0\rangle & = M_0 |I\rangle. \tag{12}
 \end{aligned}$$

为了求解上式, 注意到

$$\begin{aligned}
 2a\tilde{a} - a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a} & = -(a^\dagger - \tilde{a})(a - \tilde{a}^\dagger) + a\tilde{a} \\
 & - \tilde{a}^\dagger a^\dagger + 1 \tag{13}
 \end{aligned}$$

和关系

$$\begin{aligned}
 gt (2a^\dagger \tilde{a}^\dagger - aa^\dagger - \tilde{a}\tilde{a}^\dagger) + \kappa t (2a\tilde{a} - a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) \\
 = t(\kappa + g) (\tilde{a} - a^\dagger) (a - \tilde{a}^\dagger)
 \end{aligned}$$

$$+ t(\kappa - g)(a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger a^\dagger + 1), \quad (14)$$

以及注意到对易关系

$$\begin{aligned} & [a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger a^\dagger, (\tilde{a} - a^\dagger)(a - \tilde{a}^\dagger)] \\ &= -2[(\tilde{a} - a^\dagger)(a - \tilde{a}^\dagger)], \end{aligned} \quad (15)$$

就可以利用如下算符恒等式:

$$\begin{aligned} e^{\lambda(A+\sigma B)} &= e^{\lambda A} \exp[\sigma(1 - e^{-\lambda\tau})B/\tau], \\ ([A, B] &= \tau B). \end{aligned}$$

将(12)式中的指数算符分解为

$$\begin{aligned} |M(t)\rangle &= \exp[(a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger a^\dagger + 1)(\kappa - g)t] \\ &\times \exp\left[\frac{\kappa + g}{2(\kappa - g)}(1 - e^{2(\kappa - g)t})\right] \\ &\times (a^\dagger - \tilde{a})(a - \tilde{a}^\dagger) |M_0\rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

再用(8)式, 得

$$\begin{aligned} & \langle \eta | \exp[(a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger a^\dagger + 1)(\kappa - g)t] \\ &= \left\langle \eta e^{-(\kappa - g)t} \right|, \end{aligned} \quad (17)$$

所以

$$\begin{aligned} & \langle \eta | M(t) \rangle \\ &= \left\langle \eta e^{-(\kappa - g)t} \right| \exp\left[\frac{\kappa + g}{2(\kappa - g)}(1 - e^{2(\kappa - g)t})\right] \\ &\times (a^\dagger - \tilde{a})(a - \tilde{a}^\dagger) |M_0\rangle \\ &= \exp\left[-\frac{\kappa + g}{2(\kappa - g)}(1 - e^{-2(\kappa - g)t})\right] |\eta|^2 \\ &\times \left\langle \eta e^{-(\kappa - g)t} \right| M_0 \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

从中我们可以看出 $\langle \eta e^{-(\kappa - g)t} |$ 增益因子是 e^{gt} , 损耗因子是 $e^{-\kappa t}$, 利用(18), (6), (2)式和有限算符内的积分技术^[16], 得到

$$\begin{aligned} & |M(t)\rangle \\ &= \int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta\rangle \langle \eta | M(t) \rangle \\ &= \int \frac{d^2\eta}{\pi} : \exp\left[-\frac{\kappa - ge^{-2(\kappa - g)t}}{\kappa - g} |\eta|^2\right] \\ &+ \eta \left(a^\dagger - e^{-(\kappa - g)t} \tilde{a}\right) \\ &\times \exp\left[\eta^* \left(e^{-(\kappa - g)t} a - \tilde{a}^\dagger\right) + a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right. \\ &+ a\tilde{a} - a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a} \left. \right] : |M_0\rangle \\ &= T_3 \exp(gT_1 a^\dagger \tilde{a}^\dagger) : \exp[(T_2 - 1)(\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger a)] : \\ &\times \exp[\kappa T_1 a \tilde{a}] |M_0\rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

这里,

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1 - e^{-2(\kappa - g)t}}{\kappa - ge^{-2t(\kappa - g)}}, \\ T_2 &= \frac{(\kappa - g)e^{-(\kappa - g)t}}{\kappa - ge^{-2t(\kappa - g)}}, \\ T_3 &= \frac{\kappa - g}{\kappa - ge^{-2t(\kappa - g)}} = 1 - gT_1. \end{aligned} \quad (20)$$

(19)式中的

$$\begin{aligned} & : \exp[(T_2 - 1)(\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger a)] : \\ &= \exp[(\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger a) \ln T_2]. \end{aligned} \quad (21)$$

再用(10)式, 可以把(19)式进一步写成

$$\begin{aligned} |M(t)\rangle &= T_3 \exp[gT_1 a^\dagger \tilde{a}^\dagger] \exp[(\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger a) \ln T_2] \\ &\times \exp[\kappa T_1 a \tilde{a}] M_0 |\eta = 0\rangle \\ &= T_3 \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\kappa^i g^j T_1^{i+j}}{i!j!} \\ &\times a^{\dagger j} e^{a^\dagger a \ln T_2} a^i M_0 \\ &\times a^{\dagger i} e^{a^\dagger a \ln T_2} a^j |\eta = 0\rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

所以 t 时刻的状态 $M(t)$ 为

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} T_3 \frac{\kappa^i g^j T_1^{i+j}}{i!j! T_2^{2j}} \exp[a^\dagger a \ln T_2] \\ &\times a^{\dagger j} a^i M_0 a^{\dagger i} a^j \exp[a^\dagger a \ln T_2], \end{aligned} \quad (23)$$

这是一个算符之和形式.

4 单一项目投资在金融市场中的演化——二项-负二项纠缠态的提出

当一个单一投资项目 $M_0 = |n\rangle \langle n|$ 进入金融市场后, 随着利好因素和利空因素的变化, 资产在金融市场中不断地演化, 最终的输出结果就是收益. 利用

$$\begin{aligned} a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \\ a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \end{aligned} \quad (24)$$

得

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} T_3 \frac{\kappa^i g^j T_1^{i+j}}{i!j! T_2^{2j}} \exp[a^\dagger a \ln T_2] \\ &\times a^{\dagger j} a^i |n\rangle \langle n| a^{\dagger i} a^j \exp[a^\dagger a \ln T_2] \\ &= \sum_{i,j=0}^{\infty} T_3 \frac{\kappa^i g^j T_1^{i+j}}{i!j! T_2^{2j}} \exp[a^\dagger a \ln T_2] \\ &\times a^{\dagger j} \frac{n!}{(n-i)!} |n-i\rangle \langle n-i| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times a^j \exp [a^\dagger a \ln T_2] \\ = & T_3 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \kappa^i T_1^i T_2^{2(n-i)} \\ & \times \sum_{j=0}^{\infty} g^j T_1^j \binom{n-i+j}{j} \\ & \times |n-i+j\rangle \langle n-i+j|. \end{aligned} \quad (25)$$

该解的系数部分

$$T_3 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \kappa^i T_1^i T_2^{2(n-i)} \sum_{j=0}^{\infty} g^j T_1^j \binom{n-i+j}{j} \quad (26)$$

是一个概率分布函数, 前面二项式部分

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \kappa^i T_1^i T_2^{2(n-i)}$$

与后面负二项式部分

$$\sum_{j=0}^{\infty} g^j T_1^j \binom{n-i+j}{j}$$

是通过 i 指标纠缠在一起的, 所以我们命名该态为二项-负二项纠缠态.

利用负二项式定理:

$$\sum_{d=0}^{\infty} \binom{d+l}{d} (-x)^d = (1+x)^{-l-1}, \quad (27)$$

我们有

$$\begin{aligned} \text{Tr} M(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \langle m| T_3 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \kappa^i T_1^i T_2^{2(n-i)} \\ & \times \sum_{j=0}^{\infty} g^j T_1^j \binom{n-i+j}{j} \\ & \times |n-i+j\rangle \langle n-i+j| m\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \kappa^i T_1^i T_2^{2(n-i)} (1-gT_1)^{-n+i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \kappa^i T_1^i T_2^{2(n-i)} (1-gT_1)^{-(n-i)} \\ &= \left(\kappa T_1 + \frac{T_2^2}{1-gT_1} \right)^n \\ &= 1. \end{aligned} \quad (28)$$

这正是我们所期待的, 表明这个演化过程是保迹的.

5 单一项目投资在金融市场中的收益

根据量子统计理论, 上述资产在金融市场演化过程中 t 时刻的期望值为

$$\bar{n}(t) = \text{Tr} [M(t) a^\dagger a] = T_3 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \kappa^i T_1^i T_2^{2(n-i)}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{j=0}^{\infty} g^j T_1^j \binom{n-i+j}{j} \\ & \times \langle n-i+j| a^\dagger a |n-i+j\rangle \\ = & T_3 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \kappa^i T_1^i T_2^{2(n-i)} \\ & \times \left[\sum_{j=0}^{\infty} g^j T_1^j \binom{n-i+j}{j} (n-i+j) \right] \\ = & T_3 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \kappa^i T_1^i T_2^{2(n-i)} \\ & \times \left[(n-i) \sum_{j=0}^{\infty} g^j T_1^j \binom{n-i+j}{j} \right. \\ & \left. + gT_1 (n-i+1) \right. \\ & \left. \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(gT_1)^{j-1} (n-i+j)!}{(j-1)! (n-i+1)!} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

然后利用负二项式定理 (27) 我们得到

$$\begin{aligned} \bar{n}(t) &= T_3 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \kappa^i T_1^i T_2^{2(n-i)} \\ & \times \left[(n-i) (1-gT_1)^{-n+i-1} \right. \\ & \left. + gT_1 (n-i+1) (1-gT_1)^{-n+i-2} \right] \\ = & T_3 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \kappa^i T_1^i T_2^{2(n-i)} \\ & \times (1-gT_1)^{-n+i-2} (n-i+gT_1) \\ = & \frac{(n+gT_1) T_3}{(1-gT_1)^2} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} (\kappa T_1)^i \left(\frac{T_2^2}{1-gT_1} \right)^{n-i} \\ & - \frac{T_3 n (\kappa T_1)}{(1-gT_1)^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(i-1)! (n-i)!} (\kappa T_1)^{i-1} \\ & \times \left(\frac{T_2^2}{1-gT_1} \right)^{(n-1)-(i-1)}. \end{aligned} \quad (30)$$

现在我们利用二项式定理简化 (30) 式得

$$\begin{aligned} \bar{n}(t) &= \frac{(n+gT_1) T_3}{(1-gT_1)^2} \left(\kappa T_1 + \frac{T_2^2}{1-gT_1} \right)^n \\ & - \frac{\kappa T_1 T_3 n}{(1-gT_1)^2} \left(\kappa T_1 + \frac{T_2^2}{1-gT_1} \right)^{n-1} \\ & = \frac{\kappa}{\kappa-g} \left[1 - e^{-2(\kappa-g)t} \right] \\ & + (n+1) e^{-2(\kappa-g)t} - 1. \end{aligned} \quad (31)$$

根据 (31) 计算出

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-g} \left[1 - e^{-2(\kappa-g)t} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + (n + 1) e^{-2(\kappa-g)t} - 1 \Big\} \\
 & = 2\kappa e^{-2(\kappa-g)t} - 2(n + 1)(\kappa - g) e^{-2(\kappa-g)t} \\
 & = 2[(n + 1)g - n\kappa] e^{2(g-\kappa)t}. \tag{32}
 \end{aligned}$$

由于通常 $n \gg 1$, 所以

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{n}}{dt} & = 2[(n + 1)g - n\kappa] e^{2(g-\kappa)t} \\
 & \approx 2n(g - \kappa) e^{2(g-\kappa)t}. \tag{33}
 \end{aligned}$$

6 分析和讨论

当金融市场处于萧条时期, 利好因素 $g \rightarrow 0$ 或者利好因素相对利空因素几乎可以忽略, 此时

$$\bar{n}(t) = n(1 - \kappa T_1) = n e^{-2\kappa t},$$

资产价值呈现指数衰减趋势, 快速缩水, 缩水速度由利空指标 κ 表征.

当金融市场处于复苏时期, $g > \kappa$, 由 (33) 式可知 $\frac{d\bar{n}}{dt} > 0$, 表明由于利好因素占主导地位, 资产价值呈增值趋势的.

当金融市场处于繁荣时期, 利空因素 $\kappa \rightarrow 0$ 或者利空因素相对利好因素几乎可以忽略, 此时

$$\bar{n}(t) = \frac{n + gT_1}{1 - gT_1} = (n + 1) e^{2gt} - 1,$$

资产价值呈现指数增加趋势, 增加速度由利好指标 g 表征.

当金融市场处于衰退时期, $g < \kappa$, 由 (33) 式可知 $\frac{d\bar{n}}{dt} < 0$, 表明由于利空因素占主导地位, 资产价值呈现逐渐缩水趋势的.

当 $\kappa \approx g$ 时, 根据 (31) 式可以得出 $\bar{n} \approx n$, 表明当金融市场处于均衡时期, 由于利好和利空因素出现的程度相当或者差距很小, 此时资产在金融市场中的价值几乎保持不变, 即处于保值状态 (或者说 g 略微大于 κ , 资产在金融市场中略有增长, 其程度和银行利息相当, 即通常意义上的资产保值或不贬值).

7 实证检验

如图 1 所示: 在 2010 年 06 月 28 日—2010 年 11 月 11 日时间段基金市场处于繁荣时期 (其他杠杆基金也呈显著增加趋势), 选取银华锐进 150019 为具体例子, 100 万的资产在其中演化时价值近似呈

指数增长趋势的 (对价值取对数就是呈线性增长趋势的).

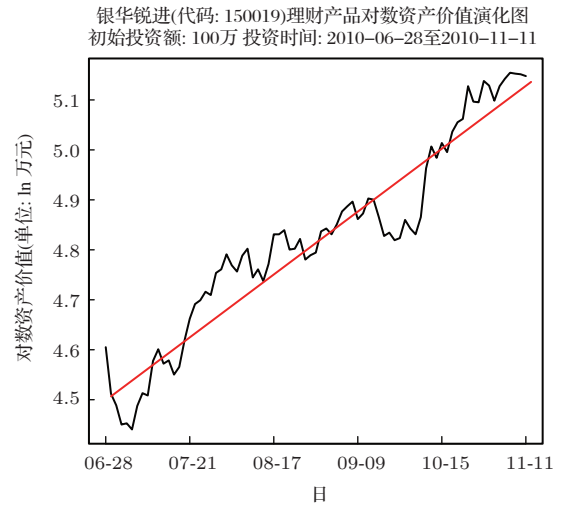


图 1 表征繁荣时期 ($g = 0.003932/\text{日}$, $\kappa = 0$, 拟合效果: Adjusted R-Squared = 0.9119) 根据中国证券市场基金评价研究数据库相关数据整理而成

如图 2 所示: 在 2011 年 03 月 22 日—2011 年 12 月 15 日时间段基金市场处于萧条时期 (其他杠杆基金也呈显著衰减趋势), 选取银华锐进 150019 为具体例子, 100 万的资产在其中演化时价值近似呈指数衰减趋势的 (对价值取对数就是呈线性衰减趋势的).

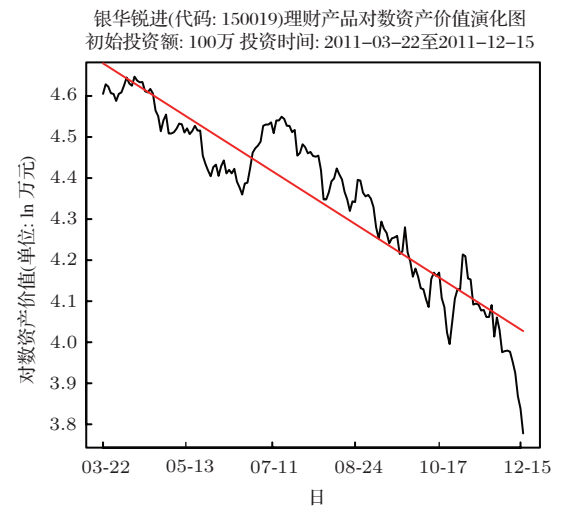


图 2 表征衰退时期 ($g = 0$, $\kappa = 0.0020382/\text{日}$, 拟合效果: Adjusted R-Squared = 0.8671) 根据中国证券市场基金评价研究数据库相关数据整理而成

图中实线代表用我们模型对这个实例的计算结果曲线, 波纹线是这个例子的实际演化曲线, 对照两者可见拟合较成功.

8 结论和展望

我们已经提出了一个描述金融投资项目状态的量子力学方程,能模拟一类金融投资项目(其状态用Dirac符号表示)在市场中的演化模式.我们通过引入纠缠态表象得出了该方程的量子解(算符之和形式),该量子解给出了初态与终态的联系,也就给出了投资项目的动态过程.作为例子,我们求出了单一投资项目在金融市场中的演化,得出一些有意义的结果,不但得出了符合市场演化趋势的解,而且提出了二项-负二项纠缠态.

尽管该方程和量子光学中激光通道的主方程的形式有类似之处,但其内涵是完全不同的,就像用Schrödinger方程用于描写生命过程一样,我们在本文中提出的金融市场量子力学状态演化方程在复杂多变的金融市场中可以为投资者提供了一个理想的基准,用量子力学观点理解金融市场变化,在一定程度上进行数值分析.我们将在今后的工作中对该模型作进一步完善和应用.

感谢和材料科学与工程系陈千帆博士的有益讨论!感谢统计与金融系笪婷婷女士提供的数据和案例支持!

参考文献

- [1] Mantegna R N, Stanley H E 2007 *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press)
- [2] Johnson N F, Jefferies P, Hui P M 2003 *Financial Market Complexity: What Physics can Tell us about Market Behaviour* (Oxford University Press)
- [3] McCauley J L, Gunaratne G H, Bassler K E 2007 *Physica. A* **379** 1
- [4] Zhou W X 2007 *An Introduction to Econophysics* (Shanghai: Shanghai University of Finance and Economics Press) (in Chinese) [周炜星 2007 金融物理学导论(上海:上海财经大学出版社)]
- [5] Huang J P 2013 *Econophysics* (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [黄吉平 2013 经济物理学(北京:高等教育出版社)]
- [6] Huang Z G, Chen Y, Zhang Y, Wang Y H 2007 *Chin. Phys. B* **16** 975
- [7] Xin B G, Liu Y Q, Chen T 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 048901 (in Chinese)[辛宝贵,刘艳芹,陈通 2011 物理学报 **60** 048901]
- [8] Wang Y G, Guo L P 2010 *Physics.* **39** 85 (in Chinese) [王有贵,郭良鹏 2010 物理 **39** 85]
- [9] Baaquie B E 2007 *Quantum Finance: Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates* (Cambridge University Press)
- [10] Mishkin F S 2012 *The Economics of Money, Banking and Financial Markets* (Prentice Hall)
- [11] Samuelson P A 2009 *Economics* (McGraw Hill Higher Education)
- [12] Wang C C, Fan H Y 2012 *Int. J. Theor. Phys.* **51** 193
- [13] Fan H Y, Hu L Y 2008 *Mod. Phys. Lett. B* **25** 2435
- [14] Fan H Y, Hu L Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1061
- [15] Fan H Y, Fan Y 1996 *Phys. Rev. A* **54** 958
- [16] Fan H Y, Lu H L, Fan Y 2006 *Ann. Phys.* **321** 480

Quantum mechanical state equation for describing evolution of projects of financial investment*

Da Cheng[†] Fan Hong-Yi

(Department of Materials Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

(Received 8 December 2013; revised manuscript received 22 January 2014)

Abstract

This paper proposes a quantum mechanical state equation for describing evolution of projects of financial investment, while the parameters of this equation well simulate the fundamental elements of financial market, including investment (input), assets loss (assets decrease), assets increase and income (output), the quantum mechanics operators involved in this equation also can reflect the dynamic process and characteristics of the project, so the equation can be taken as the evolution model of a kind of financial investment projects in the market. The entangled state representation is introduced to solve this equation and its solution is obtained in an infinite operator-sum form, which exhibits the link between the initial state and final state, i.e., the dynamic process of the financial investment project. As an example, we derive the evolution law of a pure investment project in financial market, which conforms with the evolution trend of the market. In solving the equation we also find a new state which we name it as the binomial-negative binomial entangled state. Throughout the discussions we make full use of Dirac's symbolic method and the technique of integration within an ordered product (IWOP) of operators.

Keywords: econophysics, evolution of project of financial investment, binomial-negative-binomial entangled state, entangled state representation

PACS: 89.65.Gh, 05.90.+m, 03.65.-w

DOI: [10.7498/aps.63.098901](https://doi.org/10.7498/aps.63.098901)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.11175113), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant No. WK2060140013).

† Corresponding author. E-mail: dacheng@ustc.edu