

广义双曲正弦-高斯光束的Gyrator变换性质和暗空心光束产生

朱开成[†] 唐慧琴 郑小娟 唐英

(中南大学物理与电子学院, 超微结构与超快过程湖南省重点实验室, 长沙 410083)

(2013年12月5日收到; 2014年1月24日收到修改稿)

基于Gyrator变换, 推导了广义双曲正弦-高斯光束场分布的解析表达式, 研究了广义双曲正弦-高斯光束在Gyrator变换平面上的光强分布和相位特性. 结果表明, 在Gyrator变换过程中, 具有边缘位错相位特性的双曲正弦-高斯光束能转换为具有涡旋的暗空心光束, 并确定产生的暗空心光束的拓扑荷指数为一, 而不具有边缘位错相位特性的双曲余弦-高斯光束则不可能出现空心结构. 对影响变换场强度和相位分布的束结构参数及系统参数进行了分析讨论.

关键词: 广义双曲正弦-高斯光束, Gyrator变换, 暗空心光束, 相位奇异性

PACS: 42.60.Jf, 42.55.-f, 42.15.Eq, 42.25.-p

DOI: 10.7498/aps.63.104210

1 引言

Gyrator变换产生了相空间中位置-空间频率平面上的转动, 它与分数Fourier变换相似, 从数学上看属于一类线性正则积分变换. Rodrigo等^[1-3]将Gyrator变换引入到光学领域, 并设计了实现相关变换的光学系统, 利用Gyrator变换成功地实现了激光的厄米-高斯模到拉盖尔-高斯模的转换. 同时Gyrator变换也被广泛地应用于数字图像信息加密、光学图像信息加密等信息处理方面^[3-7].

实际上, 光波场有两类相位奇异或位错: 一类是点位错或光涡旋, 即光波场中孤立点处波场复振幅的实部和虚部同时为零, 因而光强度也为零; 另一类是边缘或刃型位错, 即沿某波场线的两侧相位有 π 的相移突变^[8,9]. 与光涡旋相关的空心结构被广泛地应用于光学的许多领域, 如光涡旋可用于信息编码从而增加信息存储密度; 光涡旋也可作为光镊、光学扳手等, 用于微观粒子的操控和囚禁, 在生命科学和纳米技术中发挥着重要的作用. 近

年来, 空心光涡束的产生等问题引起了国内外学者的广泛关注, 是重要研究课题之一^[9-12], 并且边缘位错与光涡旋的相互作用问题也得到了深入讨论^[13-16]. 但就我们所知, 除了讨论上述厄米-高斯模到拉盖尔-高斯模的转换外, 边缘位错与光涡旋的相互转换研究尚未见报道. 双曲正弦-高斯光束是具有边缘位错相位结构的典型光束. 实际上, 厄米-正弦(余弦)-高斯光束是Casperson等^[17,18]给出的在直角坐标系下波动方程的一类解析解, 他们还设计了用正弦(余弦)-高斯光阑或光腔实验产生这类光束的方案^[19]. 而高斯光束、厄米-高斯光束、双曲正弦(双曲余弦)-高斯光束及正弦(余弦)-高斯光束等都可视为厄米-正弦(余弦)-高斯光束的特例, 而且对双曲正弦-高斯光束等的传播性质等问题已进行了广泛且深入的研究^[20-26].

本文研究了广义双曲正弦-高斯光束经过Gyrator变换后的场强分布及相位奇异等特性. 结果表明, 在适当变换条件下可实现光束从边缘位错到光涡旋的转换.

[†] 通讯作者. E-mail: KCZhu058@csu.edu.cn

2 广义双曲正弦-高斯光束的 Gyrator 变换公式

设在入射平面上广义双曲正弦-高斯光束的场分布 $u_\psi(x, y)$ 为

$$u_\psi(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \sinh\left(\frac{2\beta x}{w_0} + i\psi\right), \quad (1)$$

其中, w_0 为基模高斯光束的束腰宽度; β 为与双曲正弦有关的实参数; $\sinh x$ 为双曲正弦函数, $\sinh x = (\exp(x) - \exp(-x))/2$. 这里引入参数 ψ 是为了统一讨论双曲正弦-高斯光束和双曲余弦-高斯光束的 Gyrator 变换性质, 因为

$$\begin{aligned} u_{\psi=\pi/2}(x, y) &= \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \sinh\left(\frac{2\beta x}{w_0} + \frac{i\pi}{2}\right) \\ &= i \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cosh\left(\frac{2\beta x}{w_0}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

所以 $u_{\psi=\pi/2}(x, y)$ 为通常的双曲余弦-高斯光束, $u_{\psi=0}(x, y)$ 则是标准的双曲正弦-高斯光束^[17-19]. 因此本文将(1)式所表示的光束称为广义双曲正弦-高斯光束, 这是因为它除了可代表通常的双曲正(余)弦-高斯光束外, 还可代表它们的叠加光束, 如 $u_{\psi=\pi/4}(x, y)$ 就是双曲正弦-高斯光束与双曲余弦-高斯光束的等权重相位相差 $\pi/2$ 的叠加束. 另外, 实参数双曲正弦-高斯光束沿 x 轴存在边缘位错, 而实参数双曲余弦-高斯光束不具有任何相位奇异性.

Gyrator 变换^[1-3]对二维函数 $u_\psi(x, y)$ 进行如下的积分变换:

$$\begin{aligned} U_{\alpha, \psi}(x, y) &= \frac{1}{|\sin \alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_\psi(x_i, y_i) \\ &\times \exp\left[2i\pi \frac{(xy + x_i y_i) \cos \alpha - (x_i y + x y_i)}{\sin \alpha}\right] \\ &\times dx_i dy_i, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 α 被称为变换角. 容易证明, $\alpha = 0$ 时对应恒等变换, 而 $\alpha = \pi/2$ 时它代表了坐标转动 $\pi/2$ 的 Fourier 变换或逆变换. 此外, Gyrator 变换关于变换角 α 具有可加性和周期性, Gyrator 变换的数学

性质在文献^[1,3]中已有详细讨论. 特别地, 通过柱透镜的特殊级联组合, 已成功设计出完成 Gyrator 变换的光学系统^[2].

将(1)式代入 Gyrator 变换(3)式, 并两次利用积分公式

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2 + \beta x) dx \\ &= \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

容易得到

$$\begin{aligned} U_{\alpha, \psi}(x, y) &= \frac{\pi w_0^2}{|\sin \alpha| \sqrt{1 + \pi^2 w_0^4 \cot^2 \alpha}} \\ &\times \exp\left[\frac{2\pi i (1 - \pi^2 w_0^4 \cot^2 \alpha) \cot \alpha}{1 + \pi^2 w_0^4 \cot^2 \alpha} xy \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi^2 w_0^2 (x^2 + y^2) \sec^2 \alpha - \beta^2}{1 + \pi^2 w_0^4 \cot^2 \alpha}\right] \\ &\times \sinh\left[\frac{2\pi \beta w_0 \sec \alpha (\pi x w_0^2 \cot \alpha - iy)}{1 + \pi^2 w_0^4 \cot^2 \alpha} \right. \\ &\quad \left. + i\psi\right]. \end{aligned} \quad (5)$$

引入标度坐标 $(x_w, y_w) = (x, y)/w_0$, (5) 式可写为如下更简洁的形式:

$$\begin{aligned} U_{\alpha, \psi}(x, y) &= E_0 \exp[iA(1 - \delta^2)x_w y_w \sin 2\alpha \\ &\quad - A\delta(x_w^2 + y_w^2)] \sinh[2A\beta(\delta x_w \cos \alpha \\ &\quad - iy_w \sin \alpha) - i\psi], \end{aligned} \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned} \delta &= \pi w_0^2, \\ A &= \frac{\delta}{\sin^2 \alpha + \delta^2 \cos^2 \alpha}, \\ E_0 &= \sqrt{\delta A} \exp(A\beta^2 \sin^2 \alpha / \delta). \end{aligned}$$

显然, 经 Gyrator 变换后广义双曲正弦-高斯光束形式上仍是广义双曲正弦-高斯光束, Gyrator 变换的效果只是使实宗量双曲正弦-高斯光束变换成复宗量双曲正弦-高斯光束. 方程(6)是本文的主要结果, 下面将主要依据(6)式讨论经 Gyrator 变换后, 广义双曲正弦-高斯光束在变换平面上的光强分布及光波相位分布等特性.

3 Gyrator 变换后的广义双曲正弦-高斯光束在变换平面上的光强分布和相位特性

因为

$$\cosh(x \pm iy) = \cosh(x) \cos(y) \pm i \sinh(x) \sin(y),$$

所以

$$\begin{aligned} I_{\cosh}(x, y) &= |U_{\alpha, \psi=\pi/2}(x, y)|^2 \\ &= |E_0|^2 \exp[-2A^2\delta^2(x_w^2 + y_w^2)] \\ &\quad \times [\sinh^2(2A\beta\delta x_w \cos \alpha) \sin^2(2A\beta y_w \sin \alpha) \\ &\quad + \cosh^2(2A\beta\delta x_w \cos \alpha) \cos^2(2A\beta y_w \sin \alpha)]. \quad (7) \end{aligned}$$

因此, 双曲余弦-高斯光束的 Gyrator 变换束 $U_{\alpha, \psi=\pi/2}(x, y)$ 在中央部位不存在孤立奇点, 其不可能有光涡旋出现, 而且计算结果表明其中心区域也不会出现空心结构. 在以下讨论中我们将不再考虑双曲余弦-高斯光束的 Gyrator 变换性质.

由于 $\sinh(x \pm iy) = \sinh x \cos y \pm i \cosh x \sin y$,

在 Gyrator 变换平面上双曲正弦-高斯光束的光强分布为

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |U_{\alpha, \psi=0}(x, y)|^2 \\ &= |E_0|^2 \exp[-2A^2\delta^2(x_w^2 + y_w^2)] \\ &\quad \times [\sinh^2(2A\beta\delta x_w \cos \alpha) \cos^2(2A\beta y_w \sin \alpha) \\ &\quad + \cosh^2(2A\beta\delta x_w \cos \alpha) \sin^2(2A\beta y_w \sin \alpha)]. \quad (8) \end{aligned}$$

利用数值方法, 由 (8) 式可得到经 Gyrator 变换后双曲正弦-高斯光束在变换平面上的光强分布. 不失一般性, 我们用最大光强对变换平面上的光强进行归一化. 另外由 (8) 式可知, 对于双曲正弦-高斯光束 ($\psi = 0$), 其 Gyrator 变换场分布仅与 Gyrator 变换角 α 、表征光束的束参数 δ 和 β 三个参量有关.

图 1 给出了在 Gyrator 变换平面上双曲正弦-高斯光束的归一化光强 $I(x, y)$ 分布及相应场复振幅的相位分布. 从图 1 可以看出, 当 $\tan \alpha = \delta$, $\beta = 0.1, 1/3$ 时, 双曲正弦-高斯光束的光强分布呈现出明显的理想空心结构, 即沿亮环光强分布几乎

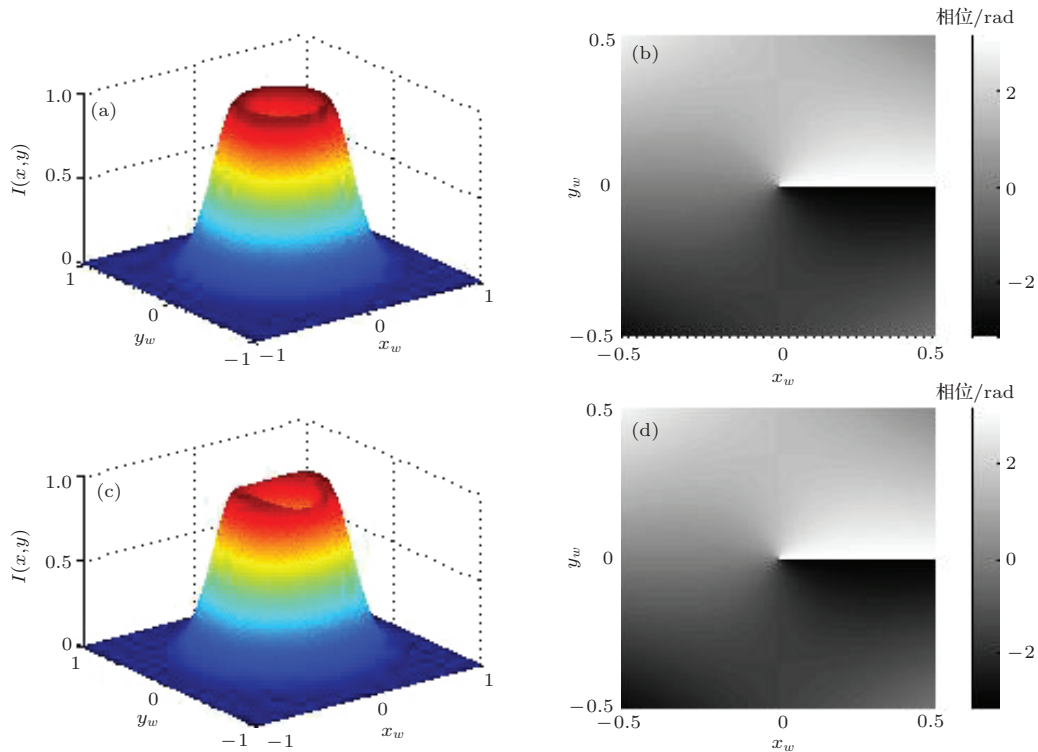


图 1 束参数 β 不同时, 在 Gyrator 变换面上双曲正弦-高斯光束的归一化光强 $I(x, y)$ 分布及对应场复振幅的相位分布 $\tan \alpha = \delta = 3$. (a) $\beta = 0.1$, 光强分布; (b) $\beta = 0.1$, 相位分布; (c) $\beta = 1/3$, 光强分布; (d) $\beta = 1/3$, 相位分布

是相同或均匀的. 而相位分布表明, 在环中心处存在一个光涡旋, 且其拓扑荷指数为一. 实际上, 计算结果表明只要 $|\beta|$ 限制在 $1/3$ 以内, 这种理想的环结构总能保持, 而 δ 只是影响了亮环的大小, 且 δ 愈大, 亮环愈小, 如图 2 所示. 由于 $\delta = \pi w_0^2$, 所以 δ 与初始输入光束的高斯束腰宽度直接相关, 因此可通过选择适当的高斯束腰宽度控制亮环的大小.

下面, 考虑 $\tan \alpha = \pm \delta$, $\delta = 1$ 及 β 参数足够小的特殊情况. 在此情况下, (6) 式可写为

$$U_{\alpha, \psi=0}(x, y) \sim \exp[-A\delta(x_w^2 + y_w^2)] \sinh[\sqrt{2}\beta(x_w \pm iy_w)]$$

$$\approx (x_w \pm iy_w) \exp[-A\delta(x_w^2 + y_w^2)], \quad (9)$$

由此可知, 经 Gyrator 变换后, 双曲正弦-高斯光束成为具有拓扑荷指数为一的光涡. 这与上述数值结果一致.

当 $\tan \alpha$ 接近于 δ 但 $\tan \alpha \neq \delta$ 时, 沿亮环光强分布会失去理想均匀性, 且当 β 取定时, 随 $\tan \alpha$ 偏离 δ 愈远, 光强分布失去均匀性愈严重, 图 3 所示结果清楚地显示了这一现象. 因此, 为获得理想的暗空心光束, 在给定双曲正弦-高斯光束的束参数条件下, 必须仔细调整 Gyrator 变换系统的变换角 α .

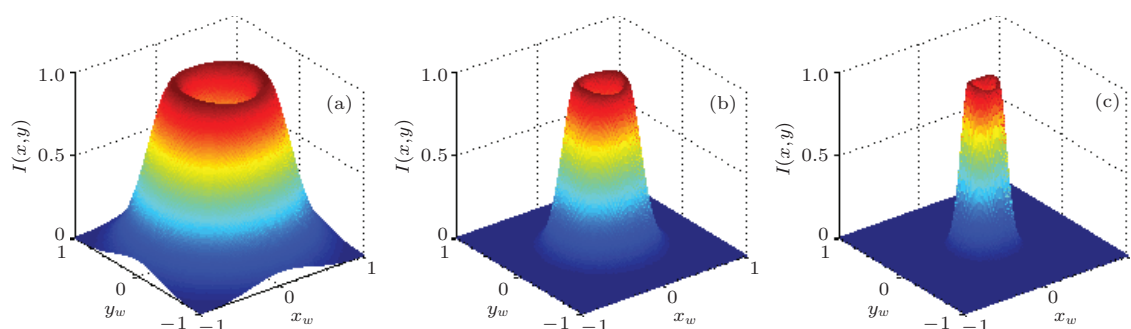


图 2 束参数 δ 不同时, 双曲正弦-高斯光束在 Gyrator 变换面上的归一化光强 $I(x, y)$ 分布 $\tan \alpha = \delta$, $\beta = 0.2$. (a) $\delta = 2$; (b) $\delta = 4$; (c) $\delta = 7$

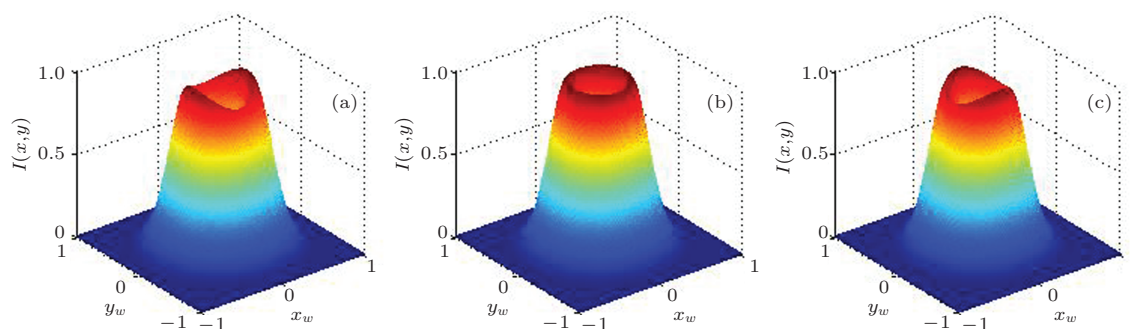


图 3 变换角 α 不同时, 双曲正弦-高斯光束在 Gyrator 变换面上的归一化光强 $I(x, y)$ 分布 $\beta = 0.1$, $\delta = 3$. (a) $\tan \alpha = 0.95\delta$; (b) $\tan \alpha = \delta$; (c) $\tan \alpha = 1.05\delta$

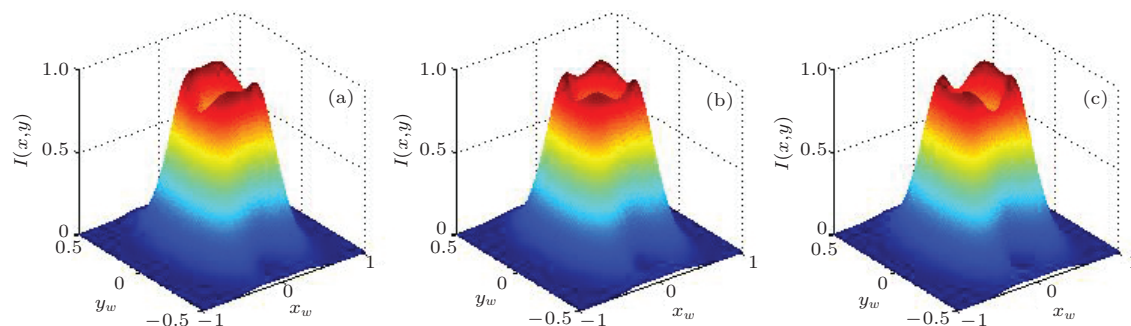


图 4 束参数 $\beta = 1.65, 1.75, 1.85$ 时, 双曲正弦-高斯光束在 Gyrator 变换面上的归一化光强 $I(x, y)$ 分布 $\delta = 3$, $\alpha = 0.45\pi$. (a) $\beta = 1.65$; (b) $\beta = 1.75$; (c) $\beta = 1.85$

此外, 对于其他系统或束参数值, 还可能获得不同类型的空心光束. 当 $\alpha = 0.45\pi$, $\delta = 3$ 时可得到近似矩形空心光束 (注意此时标度坐标 x_w , y_w 与之前不同), 结果如图 4 所示. 应当指出, 此时变换后光束强度分布对束参数 δ , β 及系统的变换角 α 都非常敏感, 在实际操作时要谨慎选择和调整.

4 结 论

由 Gyrator 变换公式出发, 本文推导出广义双曲正弦-高斯光束的场分布解析表达式, 并研究了广义双曲正弦-高斯光束的光强分布和相位特性. 结果表明: 在 Gyrator 变换下广义双曲正弦-高斯光束具有形式不变性; 而在 Gyrator 变换过程中, 具有边缘位错相位特性的双曲正弦-高斯光束可转换为中央部分具有涡旋的空心结构光束, 且由场振幅的零实部和零虚部曲线发现场复振幅具有相位奇异, 而中央部分不具有边缘位错相位特性的双曲余弦-高斯光束则不存在此性质. 同时, 对影响 Gyrator 变换场分布结构的光束参数及变换系统参数进行了分析讨论. 尽管双曲正弦-高斯光束和双曲余弦-高斯光束都属于厄米-双曲正弦-高斯类光束, 但这两种光束具有不同的特性, 从而导致了不同的 Gyrator 变换性质. 本文研究表明, 利用 Gyrator 变换系统实现空心光束的产生时, 输入光束应具有边缘位错的相位结构. 另外, 本文进一步丰富了 Gyrator 变换在光波模式转换方面的应用, 并且光涡束在信息处理、微粒控制等领域具有重要应用, 而本文对光涡场的产生及其应用研究具有促进作用.

参考文献

- [1] Rodrigo J A, Alieva T, Calvo M L 2007 *Opt. Express* **15** 2190
- [2] Rodrigo J A, Alieva T, Calvo M L 2007 *J. Opt. Soc. Am. A* **24** 3135
- [3] Rodrigo J A, Alieva T, Calvo M L 2007 *Opt. Commun.* **278** 279
- [4] Li H J 2009 *Opt. Lasers Eng.* **47** 45
- [5] Liu Z J, Guo Q, Xu L, Ahmad M A, Liu S T 2010 *Opt. Express* **18** 12033
- [6] Singh N, Sinha A 2009 *Opt. Lasers Eng.* **47** 539
- [7] Abuturab M R 2012 *Opt. Lasers Eng.* **50** 1383
- [8] Nye J F, Berry M 1974 *Proc. R. Soc. Lond. A* **336** 165
- [9] Yao A M, Padgett M J 2011 *Adv. Opt. Photon.* **3** 161
- [10] Yin J, Gao W, Zhu Y 2003 *Prog. Opt.* **44** 119
- [11] Deng D, Fu X, Wei C, Shao J, Fan Z 2005 *Appl. Opt.* **44** 7187
- [12] Cai Y, Zhang L 2006 *J. Opt. Soc. Am. B* **23** 1398
- [13] Petrov D V 2001 *Opt. Commun.* **188** 307
- [14] Yan H W, Lü B D 2008 *Opt. Commun.* **282** 717
- [15] He D, Gao Z H, Yan H W, Lü B D 2011 *Chin. Phys. B* **20** 014201
- [16] Chen H T, Gao Z H, Yang H J, Zou X F, Liu X Q 2012 *J. Mod. Opt.* **59** 579
- [17] Casperson L W, Hall D G, Tovar A A 1997 *J. Opt. Soc. Am. A* **14** 3341
- [18] Casperson L W, Tovar A A 1998 *J. Opt. Soc. Am. A* **15** 954
- [19] Tovar A A, Casperson L W 1998 *J. Opt. Soc. Am. A* **15** 2425
- [20] Zhang B, Ma H, Lü B D 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1869 (in Chinese) [张彬, 马虹, 吕百达 1999 物理学报 **48** 1869]
- [21] Eyyuboglu H T, Baykal Y 2005 *J. Opt. Soc. Am. A* **22** 2709
- [22] Eyyuboglu H T, Tanyer H 2007 *Optik* **118** 289
- [23] Ding P H, Qu J, Meng K, Cui Z F 2008 *Opt. Commun.* **281** 395
- [24] Sun Q G, Zhou K Y, Fang G Y, Zhang G Q, Liu Z J, Liu S T 2012 *Opt. Express* **20** 9682
- [25] He X M, Lü B D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 054201 (in Chinese) [何雪梅, 吕百达 2012 物理学报 **61** 054201]
- [26] Tang H Q, Zhu K C 2013 *Opt. Lasers Tech.* **54** 68

Gyrator transform of generalized sinh-Gaussian beam and generation of dark hollow light beam with vortex

Zhu Kai-Cheng[†] Tang Hui-Qin Zheng Xiao-Juan Tang Ying

(Key Laboratory for Super-microstructure and Ultrafast Process of Hunan Province, School of Physics and Electronics, Central South University, Changsha 410083, China)

(Received 5 December 2013; revised manuscript received 24 January 2014)

Abstract

Starting from the Gyrator transform formula, the closed-form field distribution of generalized sinh-Gaussian beam passing through such a transform system is derived, and the intensity distribution and the corresponding phase distribution associated with the transforming generalized sinh-Gaussian beams are analyzed. Based on the numerical method, the distributions are graphically drawn and it is found that, for appropriate beam parameters and by carefully adjusting the transform angle of Gyrator transform, the dark hollow beam with topological charge index being unity can be realized with sinh-Gaussian beam carrying an edge dislocation. And the influences of the beam parameters and the transform angle on the formation of perfect dark hollow beams are analyzed. However, it is impossible to obtain dark hollow beam with Gyrator transforming cosh-Gaussian beam.

Keywords: generalized sinh-Gaussian beams, Gyrator transform, dark hollow beam, phase singularity

PACS: 42.60.Jf, 42.55.-f, 42.15.Eq, 42.25.-p

DOI: 10.7498/aps.63.104210

[†] Corresponding author. E-mail: KCZhu058@csu.edu.cn