

分形基底上受限固-固模型动力学性质的数值模拟研究*

杨毅 唐刚† 宋丽建 寻之朋 夏辉 郝大鹏

(中国矿业大学理学院物理系, 徐州 221116)

(2014年3月4日收到; 2014年4月15日收到修改稿)

为了探讨非完整基底结构对生长表面动力学行为的影响, 本文在具有相同分形维数而不同谱维数的谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底上对受限固-固 (restricted solid-on-solid, RSOS) 模型的生长过程进行了大量的数值模拟研究. 通过计算表面宽度和饱和表面极值高度的统计行为对生长表面的动力学行为进行了分析. 结果表明, 分形基底结构对生长表面的动力学行为具有显著的影响. 尽管在两种基底上受限固-固模型的表面宽度均表现出很好的动力学标度行为, 仍然满足 Family-Vicsek 标度规律, 但由此计算得到的动力学标度指数并不相同. 饱和生长表面的极值高度并不能满足三种常用的极值统计分布, 即 Weibull, Gumbel 和 Frechet 分布, 而是能很好地符合 Asym2Sig 分布.

关键词: 受限固-固模型, 分形基底, 动力学性质

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r, 64.60.Ht

DOI: 10.7498/aps.63.150501

1 引言

近年来, 人们基于不同的连续性生长方程和离散生长模型对表面界面粗化动力学生长现象进行了广泛研究^[1-6]. 通常用表面宽度描述粗化生长表面的动力学行为, 随着研究的深入, 人们发现饱和粗化表面生长高度的极值统计行为在分析表面界面粗化动力学现象中有着同样重要的作用. 此外, 很多实际的生长体系存在着这种现象, 如细菌边缘生长、晶体生长等. 因此, 对其进行深入研究具有十分重要的价值.

表面界面粗化生长是一种十分复杂的随机过程, 但其粗化表面能够形成自仿射的分形结构. 其动力学行为通常用表面宽度 $W(L, t)$ 进行描述, 其定义为

$$W(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L^d} \sum_{i=1}^{L^d} [h(i, t) - \langle h(t) \rangle]^2}, \quad (1)$$

其中, L 表示基底的横向尺寸, d 表示基底的维数 (通常情况下, d 被定义为正整数), L^d 表示基底上的格点数目, $h(i, t)$ 表示 t 时刻在基底格点 i 处的表面高度, $\langle h(t) \rangle$ 表示 t 时刻表面高度的平均值. 通常情况下, 在有限尺寸系统中, 表面宽度 $W(L, t)$ 满足 Family-Vicsek 提出的动力学标度律^[7]

$$W(L, t) = L^\alpha f(t/L^z), \quad (2)$$

其中, 标度函数 $f(u)$ 具有渐近行为: 当 $u \ll 1$ 时, $f(u) \propto u^\beta$; 当 $u \gg 1$ 时, $f(u)$ 趋于常数. 式中 α 和 z 分别为粗糙度指数与动力学指数, 常用来决定粗糙表面所属的普适类. $\beta = \alpha/z$ 为生长系数, 表示系统表面初始生长阶段的动力学性质.

除表面宽度外, 表面极值统计分布在描述表面界面粗化生长现象中同样有着十分重要的作用^[8-11]. 涨落表面作为一种典型的非平衡系统, 生长阶段的极值统计性质十分复杂, 与系统生长时间和系统尺寸之间存在着很大的关联性, 故极值统计理论主要应用在表面生长的饱和阶段. 以涨落表面

* 中央高校基本科研业务费 (批准号: 2013XK04) 和国家自然科学基金 (批准号: 11304377, 11247249) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: gangtang@cumt.edu.cn

的纵向生长高度为例, 对于基底尺寸为 L 的有限系统, 相对生长高度的最大值 $h_{\max}$ 在饱和区域的分布满足^[10,11]

$$P(h_{\max}, L) \propto L^{-\alpha} f(h_{\max}/L^{\alpha}), \quad (3)$$

其中 $f(x)$ 为标度函数, α 为前文所述的粗糙度指数.

表面界面粗化生长现象可以划分为不同的普适类^[12], 同一普适类的生长表面可以用相同的动力学方程描述. 例如抛射沉积 (ballistic deposition, BD) 模型^[13], Eden 模型^[14] 在欧几里得空间均能够用 Kardar-Parisi-Zhang(KPZ)^[15] 方程描述, 属于 KPZ 普适类. 相应的 KPZ 方程表示为

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

式中, ν 表示表面的张力系数, 方程右边非线性项表示表面沿侧向的生长, 非线性系数 λ 正比于表面的生长速度, $\eta(\mathbf{r}, t)$ 表示生长随机性对表面涨落的影响, 即高斯噪声项. 理论分析表明, 在欧几里得空间粗糙度指数 α 和动力学指数 z 满足标度关系 $\alpha + z = 2$, 且和基底的维数无关^[2,15].

人们在欧几里得空间运用上述方法取得了很好的成果^[12,15,16], 而分形理论的发展使得人们开始关注分形基底结构对表面界面粗化生长动力学行为的影响.

受限固-固 (restricted solid-on-solid, RSOS) 模型^[16] 作为 KPZ 普适类中一个十分重要的离散生长模型, Lee 等^[17] 研究指出 RSOS 模型在分形维数 $d_f = 2$ 的谢尔宾斯基垫片和棋盘分形两种分形基底上的表面界面生长比维数 $d = 2$ 的欧几里得基底要粗糙, 虽然仍满足 Family-Vicsek 标度规律, 但标度关系 $\alpha + z = 2$ 不再成立. Tang 等^[18] 在谢尔宾斯基毯上对刻蚀模型的模拟结果也显示出不满足标度关系 $\alpha + z = 2$, 并且认为分形结构不仅导致了奇异扩散, 还影响了其非线性动力学行为. 平衡受限固-固 (equilibrium restricted solid-on-solid, ERSOS) 模型作为 RSOS 模型的推广, Lee 和 Kim^[19] 在谢尔宾斯基垫片和棋盘分形等分形基底上对其进行研究时发现欧几里得空间内成立的线性 Edwards-Wilkinson(EW) 方程并不能用来描述分形基底上的生长过程. 为此, 他们提出分数阶 EW 方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^{z_{\text{EW}}} h + \eta(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

式中, z_{RW} 表示分形基底上随机游走的动力学指数. 并且他们发现分形基底上 ERSOS 模型具有很

好的动力学标度行为, 满足 Family-Vicsek 标度律, 模拟结果与直接标度分析方法的解析结果符合的很好, 满足标度关系 $2\alpha + d_f = z$. 此外, Xun 等^[20] 在谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底上对 Family 模型以及 Kim 等^[21] 在谢尔宾斯基垫片和棋盘分形上对表面弛豫随机沉积模型的研究结果表明分数阶的 EW 方程具有一定的普适性. 同时 Xun 等^[20] 指出当不同的分形基底具有相同的分形维数和谱维数时, 所得标度指数相同.

Lee 等^[17] 所采用的基底虽然是分形结构, 但其分形维数 $d_f = 2$ 却为整数. 为更深入的探讨非完整基底结构对生长表面动力学行为的影响, 本文在两种分形维数为非整数维的分形基底上对 RSOS 模型进行 Kinetic Monte Carlo 模拟研究, 并从表面宽度和表面生长高度的极值统计分布两方面分析 RSOS 模型的动力学标度行为. 研究发现分形基底上 RSOS 模型的表面宽度表现出很好的标度行为, 仍遵循 Family-Vicsek 标度律, 但由此计算两种分形基底上的标度指数存在差异. 发现 $\alpha + z > 2$, 不满足欧几里得空间成立的动力学标度关系 $\alpha + z = 2$. 表面生长的极值高度具有很好的统计分布行为, 能够很好地符合 Asym2Sig 函数.

2 分形基底及受限固-固模型

2.1 谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底

Huynh 等^[22] 在研究 Abelian Manna 模型的雪崩尺寸分布时引入了具有相同分形维数 ($d_f \approx 1.585$) 的谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底, 分别如图 1 和图 2 所示. 这两种分形基底由弧分形系统演化而来, 具有相同的初始生成元, 经过 n 次迭代后它们总格点数目均为 $N_n = 3^n + 1$. 但由于它们的生成规则不同, 造成基底的具体结构存在很大差异, 相应的系统尺寸也不同, 谢尔宾斯基箭头的系统尺寸 $L_n = 2^n + 1$, 蟹状分形基底的系统尺寸 $L_n = 3 \times 2^{n-1}$ (系统尺寸被定义为横向空心圆和实心圆的个数总和).

图 1 和图 2 给出了经四次迭代生成的谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底 (实心圆表示格点, 空心圆是为标度系统尺寸而设置的参考点), 显示出这两种分形基底的具体微观结构存在明显差异. 从图中可以看出除边界点外基底上每个格点都有两个或三个最近邻点, 且蟹状分形基底上配位数为三的格点位置分布相对于谢尔宾斯基箭头更加集中.

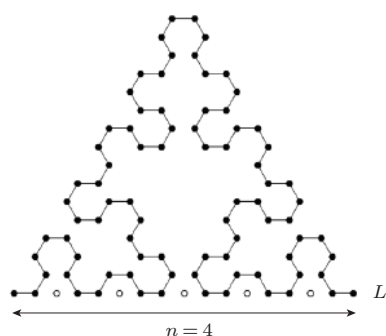


图1 经过四次迭代生成的谢尔宾斯基箭头分形基底, 线性尺寸 $L = 17$

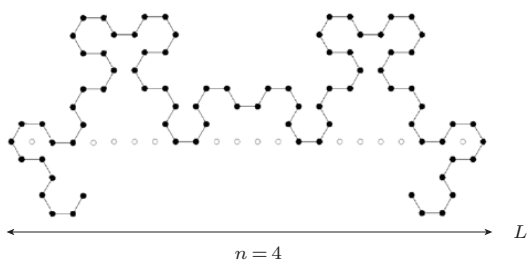


图2 经过四次迭代生成的蟹状分形基底, 线性尺寸 $L = 24$

2.2 受限固-固 (RSOS) 模型

Kim 和 Kosterlitz^[16] 为研究 KPZ 方程的动力学行为提出 RSOS 模型, 该模型可以生成没有悬挂键和空洞的致密结构. 其动力学生长规则是: 在分形基底上随机选择一个格点位置 x , 然后比较该格点位置 x 与其最邻近格点位置 x' 上的高度差 $|\nabla h|$, 如果此高度差满足

$$|\nabla h| = |h(x) - h(x')| \leq 1, \quad (6)$$

则在该格点位置沉积一个粒子, 相应的生长高度 $h(x) \rightarrow h(x) + 1$; 如果不满足此高度差, 则该沉积过程不发生, 相应的生长高度保持不变.

本文利用上述生长规则模拟了谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底上 RSOS 模型表面粗化生长的动力学行为. 选取的迭代次数为 $n = 4, 5, 6, 7, 8$, 对应的格点数为 $N = 82, 244, 728, 2188, 6562$, 即谢尔宾斯基箭头的系统尺寸 $L = 17, 33, 65, 129, 257$, 蟹状分形基底的系统尺寸 $L = 24, 48, 96, 192, 384$. 在数值模拟中, 采用蒙特卡罗时间步长, 最小尺寸的沉积时间为 2^{11} , 统计平均次数为 10^5 ; 最大尺寸的沉积时间为 2^{17} , 统计平均次数为 10^4 . 对饱和和生长涨落表面进行极值统计时选取迭代次数 $n = 5$, 即谢尔宾斯基箭头的系统尺寸 $L = 33$, 蟹形

分形基底的系统尺寸 $L = 48$, 为保证统计结果的准确性, 统计平均次数设置为 10^7 .

3 数值模拟结果

3.1 谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底上 RSOS 模型表面宽度的动力学标度行为

图3给出了迭代次数 $n = 4, 5, 6, 7, 8$ 的谢尔宾斯基箭头分形基底上 RSOS 模型表面宽度 $W(L, t)$ 随生长时间 t 变化的双对数曲线关系, 插图显示了饱和宽度 $W_{\text{sat}}(L)$ 与系统尺寸 L 的双对数曲线关系. 在早期生长阶段 $t \ll L^z$, 生长表面宽度与生长时间满足幂律关系 $W(L, t) \propto t^\beta$, 我们采用文献中最常用的标准处理方法^[7], 对最大基底尺寸的曲线进行线性拟合, 获得生长指数 $\beta = 0.276 \pm 0.002$, 此时, 生长表面的横向关联性逐渐增强, 即离散模型的生长规则起主要作用. 在饱和和生长阶段, 生长表面宽度满足幂律关系 $W_{\text{sat}}(L) \propto L^\alpha$, 通过对插图中的数据点进行线性拟合, 获得粗糙度指数 $\alpha = 0.514 \pm 0.003$. 则动力学指数 $z = \alpha/\beta \approx 1.862$.

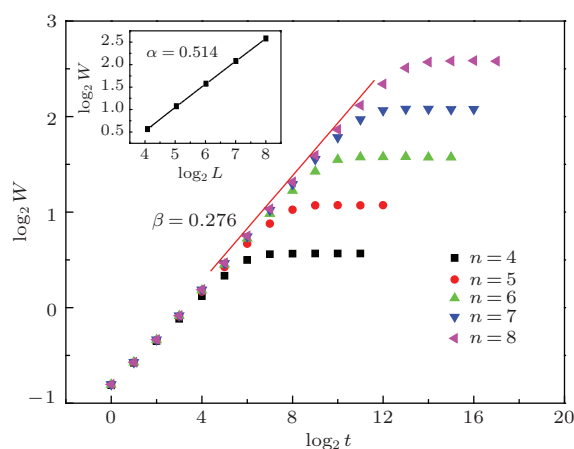


图3 谢尔宾斯基箭头基底上 RSOS 模型的表面宽度 $W(L, t)$, $n = 4-8$ 为基底的迭代次数 (t 为生长时间, 插图为饱和宽度 W_{sat} 随系统尺寸 L 变化的双对数曲线)

图4给出了谢尔宾斯基箭头基底上 W/L^α 与 t/L^z 重新标度后的双对数关系, 可以看出, 各个曲线塌缩的很好, 说明谢尔宾斯基箭头分形基底上 RSOS 模型的表面宽度表现出很好的标度行为. 根据我们的模拟结果, 在谢尔宾斯基箭头上粗糙度指数与动力学指数之和 $\alpha + z \approx 2.376$, 并不满足在欧几里得空间成立的标度关系 $\alpha + z = 2$ ^[2,15].

图5给出了迭代次数 $n = 4, 5, 6, 7, 8$ 的蟹状分形基底上 RSOS 模型表面宽度 $W(L, t)$ 随生长时

间 t 变化的双对数曲线关系, 插图显示了饱和宽度 $W_{\text{sat}}(L)$ 与系统生长尺寸 L 的双对数关系. 采用与谢尔宾斯基箭头分形基底上相同的处理方法, 我们获得了生长指数 $\beta = 0.323 \pm 0.002$ 及粗糙度指数 $\alpha = 0.633 \pm 0.006$. 利用动力学标度关系 $z = \alpha/\beta$, 获得动力学指数 $z \approx 1.96$, 并发现在蟹状分形基底上, 标度指数明显大于谢尔宾斯基箭头的标度指数. 从图 1 和图 2 的分形基底上可以看出, 蟹状分形基底上配位数为三的格点分布比谢尔宾斯基箭头相对集中, 而一个格点的配位数会影响该格点的生长情况. 由此我们认为, 蟹状分形基底格点的这种分布方式使得 RSOS 模型在该基底上比谢尔宾斯基箭头的生长表面要粗糙.

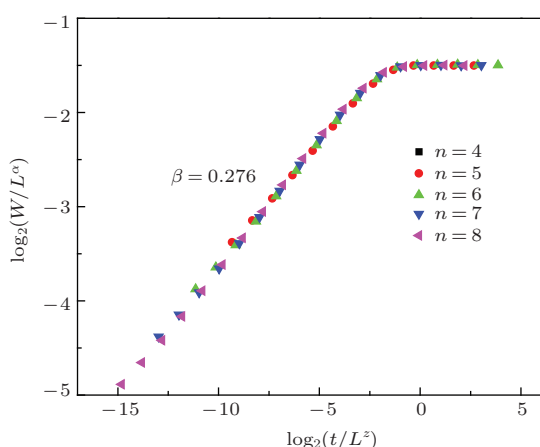


图 4 (网刊彩色) 谢尔宾斯基箭头基底上 RSOS 模型 W/L^α 随 t/L^z 变化的双对数关系 ($n = 4-8$ 为基底的迭代次数, t 为生长时间, $\alpha = 0.514$, $z = 1.862$)

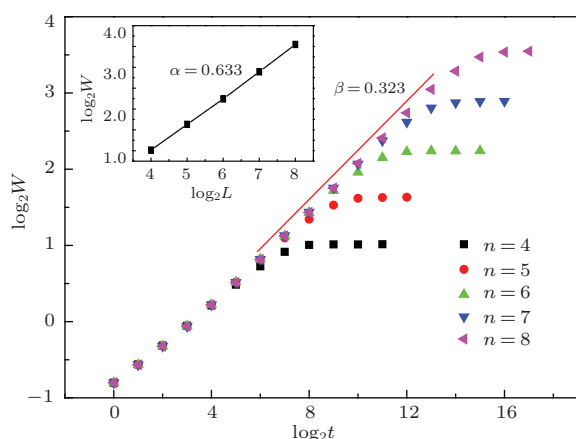


图 5 (网刊彩色) 蟹状基底上 RSOS 模型的表面宽度 $W(L, t)$, $n = 4-8$ 为基底的迭代次数 (t 为生长时间, 插图饱和宽度 W_{sat} 随系统尺寸 L 变化的双对数曲线)

图 6 给出了蟹状分形基底上 W/L^α 与 t/L^z 重新标度后的双对数关系, 可以看出, 除了早期生长阶段, 其余部分的数据塌缩的很好, 这说明蟹

状分形基底上 RSOS 模型的表面宽度也表现出很好的标度行为. 根据我们的模拟结果, 在谢尔宾斯基箭头上粗糙度指数与动力学指数之和 $\alpha + z \approx 2.593$, 也不满足在欧几里得空间成立的标度关系 $\alpha + z = 2$ [2,15].

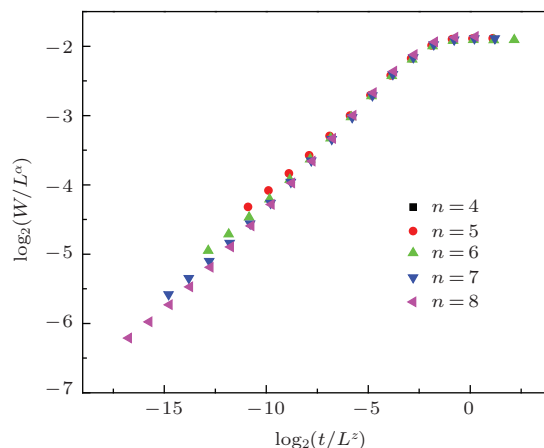


图 6 (网刊彩色) 蟹状基底上 RSOS 模型 W/L^α 随 t/L^z 变化的双对数关系, $n = 4-8$ 为基底的迭代次数, t 为生长时间, $\alpha = 0.633$, $z = 1.96$

3.2 谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底上 RSOS 模型的表面极值高度统计行为

20 世纪 30 年代, Fisher 和 Tippet [23] 对独立同分布的极大(小)值渐近分布进行理论研究时提出了三种极值分布: I 型的 Gumbel 分布, II 型的 Frechet 分布和 III 型的 Weibull 分布. Gumbel 函数作为描述不同分布下样本容量中极大(小)值的分布, 有着非常重要的应用. 文献 [24-26] 指出, 关联物理系统中涨落表面全局涨落可以用广义 Gumbel 函数进行描述. Wen 等 [27] 在分析 1+1 维 Wolf-Villain 模型生长表面高度极值统计分布时发现相对极大生长高度服从广义 Gumbel 分布, 而相对极小生长高度不满足广义 Gumbel 分布. Oliveira 等 [28] 研究 KPZ 和 LDV 普适类的几种离散生长模型粗化生长表面的相对极大生长高度和相对极小生长高度分布时, 指出在峰值处可以利用广义 Gumbel 函数拟合, 但是在尾巴处存在差异. 本文在两种分形基底上的表面极值高度统计分布结果显示相对极大高度分布和相对极小高度分布均不能很好的利用这三种极值分布函数进行拟合, 或许说明分形结构影响了涨落表面的极值统计分布行为. Cui 等 [29] 研究 HSSF-CW 关于示踪物的停滞时间密度分布以及 Brar [30] 研究光致发光谱的强度分布时, 发现 Asym2Sig 分布函数拟合效果很

好. Asym2Sig 函数表达式为

$$y = y_0 + A(1 + e^{-(x-x_c+w_1/2)/w_2})^{-1} \times (1 - (1 + e^{-(x-x_c+w_1/2)/w_3})^{-1}), \quad (7)$$

其中, x 和 y 分别为自变量和因变量, y_0 为偏移量, A 为振幅, x_c 为水平方向的中心点, w_1, w_2, w_3 为宽度参量, 且 w_2 和 w_3 决定峰值位置.

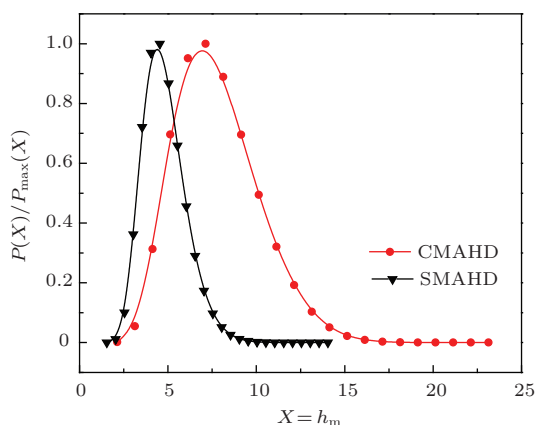


图7 谢尔宾斯基箭头基底上 RSOS 模型饱和表面相对生长高度极大值 (SMAHD) 和蟹状基底上 RSOS 模型饱和表面相对生长高度极大值 (CMAHD) 的统计分布

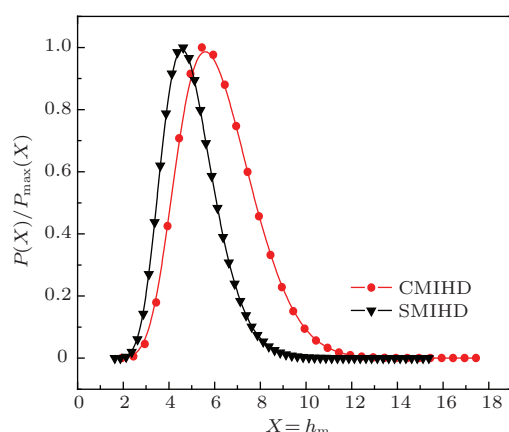


图8 谢尔宾斯基箭头基底上 RSOS 模型饱和表面相对生长高度极小值 (SMIHD) 和蟹状基底上 RSOS 模型饱和表面相对生长高度极小值 (CMIHD) 的统计分布

图7和图8分别给出了谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底两种分形基底上 RSOS 模型饱和和生长表

面相对生长高度极大值和相对生长高度极小值的统计分布, 横坐标定义为 $X = h_m$, 其中 h_m 表示相对极大(小)高度. 纵坐标定义为统一除以对应峰值处最大统计次数, 使纵坐标取值范围限制在 $[0, 1]$ 之间. 从图中可以看出, 两种分形基底上饱和和生长表面的相对生长高度极值统计存在明显差异.

图9给出了重新标度之后的两种分形基底上生长表面极值高度分布, 采用和文献[27]相同的处理方法, 即横坐标定义为 $X = (h_m - \langle h_m \rangle) / \delta$, $\langle h_m \rangle$ 表示相对极大(小)高度的统计平均值, $\delta = (\langle h_m^2 \rangle - \langle h_m \rangle^2)^{1/2}$ 表示相对极大(小)高度的标准差. 纵坐标定义为统一除以对应峰值处最大统计次数, 使纵坐标取值范围限制在 $[0, 1]$ 之间. 模拟结果显示两种分形基底上 MIHD 与 MAHD 具有很好的统计行为, 重新标度之后能够塌缩在一起, 较好的服从 Asym2Sig 分布函数. 说明基底微观结构的不同没有影响 RSOS 模型饱和和生长表面的极值统计分布行为. 表1给出了两种分形基底上 MAHD 和 MIHD 通过 Asym2Sig 函数拟合的参数情况. 可以看出, 影响峰值的宽度参数 w_2 和 w_3 在两种分形基底上对 MAHD 与 MIHD 拟合所得数值在误差范围之内可以认为是相等的.

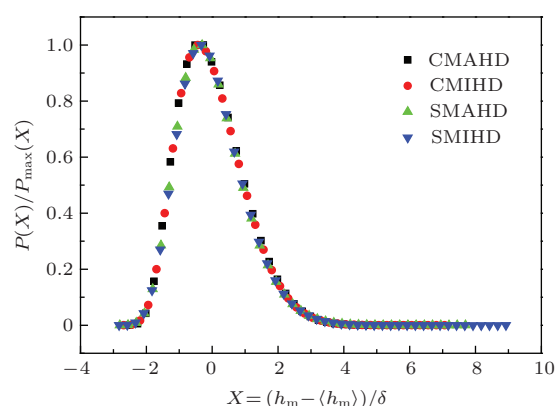


图9 (网刊彩色) 蟹状基底上 RSOS 模型饱和表面相对生长高度极大值 (CMAHD) 与相对生长高度极小值 (CMIHD) 的统计分布和谢尔宾斯基箭头基底上 RSOS 模型饱和表面相对生长高度极大值 (SMAHD) 与相对生长高度极小值 (SMIHD)

表1 归一化后两种分形基底上 MAHD 与 MIHD 的 Asym2Sig 函数各参数拟合结果

	y_0	x_c	A	w_1	w_2	w_3
CMAHD	-0.006 ± 0.003	-0.236 ± 0.012	1.216 ± 0.028	2.052 ± 0.046	0.280 ± 0.008	0.639 ± 0.019
CMIHD	-0.004 ± 0.002	-0.241 ± 0.009	1.224 ± 0.022	1.990 ± 0.034	0.283 ± 0.006	0.640 ± 0.013
SMAHD	-0.003 ± 0.002	-0.267 ± 0.012	1.311 ± 0.031	1.792 ± 0.045	0.306 ± 0.006	0.651 ± 0.015
SMIHD	-0.003 ± 0.001	-0.262 ± 0.011	1.318 ± 0.030	1.778 ± 0.044	0.315 ± 0.006	0.651 ± 0.014

4 结 论

本文采用具有相同分形维数的谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底,从粗化生长表面的表面宽度及相对生长高度极值统计分布两方面分析研究了非完整基底结构对表面动力学标度性质的影响.模拟结果表明RSOS模型表面宽度具有很好的动力学标度行为,仍然满足Family-Vicsek标度律,且两种分形基底上MAHD和MIHD具有很好的统计分布规律,并且能很好地满足Asym2Sig分布函数,而不是常见的三种广义极值分布函数,即Weibull, Gumbel和Frechet分布.分形基底结构的改变影响了生长模型的动力学行为.

此外,RSOS模型在两种分形基底上得到的动力学指数、粗糙度指数、生长指数存在明显差异.虽然Lee等^[17]在具有相同分形维数的基底上得到的动力学指数也存在差异,但其认为在分形基底上粗糙度指数与动力学指数之和在一定误差范围内是相等的.而本文的模拟结果显示谢尔宾斯基箭头 $\alpha + z = 2.36$ 与蟹状分形基底 $\alpha + z = 2.58$ 的情况并不相等.另根据Xun等^[20]的研究结果,我们有理由认为是基底谱维数的不同造成了这两种分形基底上表面界面的表面宽度性质的差异.

参考文献

- [1] Family F, Vicsek T 1991 *Dynamics of Fractal Surfaces* (Singapore: World Scientific Press)
- [2] Barabási A L, Stanley H E 1995 *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [3] Tang G, Ma B K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 0994 (in Chinese) [唐刚, 马本堃 2002 物理学报 **51** 0994]
- [4] Xun Z P, Tang G, Han K, Hao D P, Xia H, Zhou W, Yang X Q, Wen R J, Chen Y L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 070516
- [5] Kim J M, Kim D H 2008 *J. Stat. Phys.* **133** 1179
- [6] Zhang Y W, Tang G, Han K, Xun Z P, Xie Y Y, Li Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 020511 (in Chinese) [张永伟, 唐刚, 韩奎, 寻之朋, 谢裕颖, 李炎 2012 物理学报 **61** 020511]
- [7] Family F, Vicsek T 1985 *J. Phys. A* **18** L75
- [8] Foltin G, Oerding K, Racz Z, Workman R L, Zia R K P 1994 *Phys. Rev. E* **50** 639
- [9] Derrida B, Lebowitz J L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 209
- [10] Raychaudhuri S, Cranston M, Przybyla C, Shapir Y 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 136101
- [11] Majumdar S N, Comtet A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 225501
- [12] Xun Z P, Tang G, Han K, Xia H, Hao D P, Li Y 2012 *Phys. Rev. E* **85** 041126
- [13] Meakin P, Ramanlal P, Sander L M, Ball R C 1986 *Phys. Rev. A* **34** 5091
- [14] Julien R, Boter R 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 2055
- [15] Kardar M, Parisi G, Zhang Y C 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 889
- [16] Kim J M, Kosterlitz J M 1989 *Phys. Rev. Lett.* **64** 2289
- [17] Lee S B, Jeong H C, Kim J M 2008 *J. Stat. Mech.* p12013
- [18] Tang G, Xun Z P, Wong R J, Han K, Xia H, Hao D P, Zhou W, Yang X Q, Chen Y L 2010 *Physica A* **389** 4552
- [19] Lee S B, Kim J M 2009 *Phys. Rev. E* **80** 021101
- [20] Xun Z P, Zhang Y W, Li Y, Xia H, Hao D P, Tang G 2012 *J. Stat. Mech.* p10014
- [21] Kim D H, Kim J M 2010 *J. Stat. Mech.* p08008
- [22] Huynh H N, Chew L Y, Pruessner G 2010 *Phys. Rev. E* **82** 042103
- [23] Fisher R A, Tippet L H C 1928 *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **24** 180
- [24] Bramwell S T, Christensen K, Fortin J, Holdsworth P C W, Jensen H J, Lise S, López J M, Nicodemi M, Pinton J F, Sellitto M 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 3744
- [25] Antal T, Droz M, Györgyi G, Rácz Z 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 240601
- [26] Lee D S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 150601
- [27] Wen R J, Tang G, Han K, Xia H, Hao D P, Xun Z P, Chen Y L 2011 *Chinese J. Comput. Phys.* **28** 933
- [28] Oliveira T J, Aarão Reis F D A 2008 *Phys. Rev. E* **77** 041605
- [29] Cui L J, Zhang Y, Zhang M Y, Li W, Zhao X S, Li S G, Wang Y F 2012 *J. Environ. Monit.* **14** 3037
- [30] Brar J 2011 *Photoluminescence Spectroscopy of CdSe/Cd_{0.5}Zn_{0.5}S Core/Shell Colloidal Quantum Dots* MS Thesis (Ottawa: University of Ottawa)

Numerical simulations of dynamic properties of the restricted solid-on-solid model on fractal substrates^{*}

Yang Yi Tang Gang[†] Song Li-Jian Xun Zhi-Peng Xia Hui Hao Da-Peng

(Department of Physics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

(Received 4 March 2014; revised manuscript received 15 April 2014)

Abstract

In order to investigate the effect of the structure of a non-complete substrate on the dynamic behaviors of a growing surface, the restricted solid-on-solid model on Sierpinski arrowhead and Crab fractal substrates, which have the same fractal dimensions but of different spectrum dimensions, are extensively studied by means of numerical simulations. The surface width and the maximal height of the saturated surface are calculated. It is found that the microscopic structure of the substrates affects significantly the dynamic properties of the surfaces. Although the restricted solid-on-solid model evolving on two kinds of fractal substrates exhibits dynamic scaling behavior, the standard Family-Vicsek scaling is still satisfied for different dynamic scaling exponents. The maximal height of the width of saturated surface can be fitted by Asym2Sig distribution, not by the three kinds of usual extreme statistical distribution, i.e. Weibull, Gumbel, and Frechet distributions.

Keywords: restricted solid-on-solid model, fractal substrate, dynamic scaling behavior

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r, 64.60.Ht

DOI: 10.7498/aps.63.150501

^{*} Projects supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. 2013XK04), and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11304377, 11247249).

[†] Corresponding author. E-mail: gangtang@cumt.edu.cn