

广义Duffing扰动振子随机共振机理的渐近解*

韩祥临¹⁾ 林万涛²⁾ 许永红³⁾ 莫嘉琪^{4)†}

1) (湖州师范学院数学系, 湖州 313000)

2) (中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

3) (蚌埠学院数理系, 蚌埠 233030)

4) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2014年4月10日收到; 2014年4月28日收到修改稿)

利用非线性方法研究了一类广义Duffing扰动方程. 首先求得了典型的Duffing方程的解. 然后利用泛函广义变分迭代原理得到了广义Duffing扰动振子随机共振机理的近似解, 并论述了解的一致有效性.

关键词: 扰动振子, 共振机理, 渐近解

PACS: 02.30.Sa

DOI: 10.7498/aps.63.170204

1 引言

随机共振的概念是1981年首先提出的^[1-3], 它是用来解释70万年前地球冰川期和暖气候期交互发生的现象. 目前, 这一非线性现象得到了广泛的关注^[4], 随机共振是弱信号在噪声和非线性系统下的能量得到增强, 基于信号的输出, 信噪比先增后减, 产生共振输出. 1989年开始, 一些学者对Duffing振子随机共振的输出特性进行了系统的研究^[5-8], 2003年, 研究了振子的微弱信号检测模型^[9], 讨论了二维Duffing振子的信号、噪声和非线性系统三者之间的匹配. 然而在实际工程应用中, 信号和噪声情况往往未知, 它们与系统三者之间也并非总是最优匹配. 在文献^[10]中, 提出了Duffing振子的变尺度随机共振, 研究了大频率信号的共振. 这为研究Duffing振子调参共振机理, 建立了Duffing振子广义调参随机共振的更一般方法^[11].

由于非线性微分方程的解, 一般不是初等函数, 因此不能用有限的初等函数来表示. 故用近似的方法来求出非线性方程的近似解析解越来越重

要. 作者等也利用各种渐近方法来得到相关的非线性方程的渐近解^[12-19]. 本文就是用经过改进的广义变分方法来求得一类广义Duffing扰动方程随机共振机理的渐近解

2 广义Duffing扰动方程随机共振机理

讨论如下广义Duffing扰动方程:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k \frac{du}{dt} - au + bu^3 = A \cos(2\pi\omega t) + \sqrt{2D}f(t), \quad (1)$$

其中 k 为阻尼系数; $-au + bu^3$ 为势场作用力, 势函数 $U = -\frac{au^2}{2} + \frac{bu^4}{4}$ ($a > 0, b > 0$) 为系统参数; $A \cos(2\pi\omega t)$ 是以 A 为振幅, ω 为频率, 初位相为0的周期驱动力; $\sqrt{2D}f(t)$ 是强度为 D 的噪声信号, 其中 $f(t)$ 表示Gauss白噪声, 设它是充分光滑的有界函数. 因此方程(1)可以看作Brown粒子在液体等介质的势场 U 中的运动. 这里的系统输出 u 是Brown粒子的位移函数 $u(t)$.

* 国家自然科学基金(批准号: 41275062)、浙江省自然科学基金(批准号: LY13A010005)和安徽省高等学校省级自然科学基金项目(批准号: KJ2013B003)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: mojqiaqi@mail.ahnu.edu.cn

为了求得广义 Duffing 扰动方程 (1) 的近似解. 现构造如下泛函 $F[u] \in C^1(R)$:

$$F[u] = u - \int_0^t \lambda(\xi) [u_{\xi\xi} + ku_{\xi} - au + b\bar{u}^3 - A \cos(2\pi\omega\xi) - \sqrt{2D}f(\xi)] d\xi, \quad (2)$$

式中 $\bar{u}$ 为 u 的限制变量^[20], λ 为 Lagrange 乘子. 将泛函 (2) 式进行变分运算 δF :

$$\delta F = \delta u - \lambda|_{\xi=t} \delta u_{\xi} + \lambda_{\xi}|_{\xi=t} \delta u - k\lambda|_{\xi=t} \delta u - \int_0^t [\lambda_{\xi\xi} - k\lambda_{\xi} - a] \delta u d\xi.$$

令 $\delta F = 0$. 可得到 Lagrange 乘子 λ 应满足的关系式

$$\lambda_{\xi\xi} - k\lambda_{\xi} - a = 0, \quad (3)$$

$$\lambda|_{\xi=t} = 0, \quad \lambda_{\xi}|_{\xi=t} = -1. \quad (4)$$

由 (3), (4) 式, 不难得到

$$\lambda(\xi) = -\frac{2}{\sqrt{k^2+4a}} \exp \frac{k}{2}(\xi-t) \times \sin \frac{\sqrt{k^2+4a}}{2}(\xi-t). \quad (5)$$

由 (2), (5) 式, 构造如下的广义变分迭代式:

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + \frac{2}{\sqrt{k^2+4a}} \\ &\times \int_0^t \left[\exp \frac{k}{2}(\xi-t) \sin \frac{\sqrt{k^2+4a}}{2}(\xi-t) \right] \\ &\times [u_{(n-1)\xi\xi} + ku_{(n-1)\xi} - au_{n-1} + bu_{n-1}^3 \\ &- A \cos(2\pi\omega\xi) - \sqrt{2D}f(\xi)] d\xi, \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

3 广义变分迭代解

首先, 取方程 (1) 相关的线性齐次方程

$$\frac{d^2v}{dt^2} + k \frac{dv}{dt} - av = 0. \quad (7)$$

显然, 由方程 (7), 其解为

$$v(t) = \exp \left(-\frac{k}{2}t \right) \left[C_1 \sin \left(\frac{\sqrt{k^2+4a}}{2}t \right) + C_2 \cos \left(\frac{\sqrt{k^2+4a}}{2}t \right) \right],$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

选取变分迭代 (6) 式的初始迭代 u_0 为方程 (7) 的解 $v(t)$. 即

$$u_0(t) = \exp \left(-\frac{k}{2}t \right) \left[C_1 \sin \left(\frac{\sqrt{k^2+4a}}{2}t \right) \right.$$

$$\left. + C_2 \cos \left(\frac{\sqrt{k^2+4a}}{2}t \right) \right]. \quad (8)$$

由广义变分迭代 (6) 式和 (8) 式, 可以得到广义 Duffing 扰动方程 (1) 的一次迭代解

$$\begin{aligned} u_{1asy} &= \exp \left(-\frac{k}{2}t \right) \left[C_1 \sin \left(\frac{\sqrt{k^2+4a}}{2}t \right) \right. \\ &+ C_2 \cos \left(\frac{\sqrt{k^2+4a}}{2}t \right) \left. \right] + \frac{2}{\sqrt{k^2+4a}} \\ &\times \int_0^t \exp \frac{k}{2}(\xi-t) \sin \left(\frac{\sqrt{k^2+4a}}{2}(\xi-t) \right) \\ &\times [-A \cos(2\pi\omega\xi) - \sqrt{2D}f(\xi) \\ &+ bu_0^3] d\xi, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 u_{0asy} 由 (8) 式表示.

继续由广义变分迭代 (6) 式, 可以得到广义 Duffing 扰动方程 (1) 的二次迭代解

$$\begin{aligned} u_{2asy} &= \exp \left(-\frac{k}{2}t \right) \left[C_1 \sin \left(\frac{\sqrt{k^2+4a}}{2}t \right) \right. \\ &+ C_2 \cos \left(\frac{\sqrt{k^2+4a}}{2}t \right) \left. \right] + \frac{2}{\sqrt{k^2+4a}} \\ &\times \int_0^t \exp \frac{k}{2}(\xi-t) \sin \left(\frac{\sqrt{k^2+4a}}{2}(\xi-t) \right) \\ &\times [u_{1asy\xi\xi} + ku_{1asy\xi} - au_{1asy} - A \cos(2\pi\omega\xi) \\ &- \sqrt{2D}f(\xi) + b(u_0^3 + u_{1asy}^3)] d\xi, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 u_{0asy}, u_{1asy} 分别由 (8) 和 (9) 式表示.

同样, 由广义变分迭代 (6) 式, 可以依次得到广义 Duffing 扰动方程 (1) 的各次渐近解 $u_{nasy}(t)$ ($n = 3, 4, \dots$)

可以用变分原理和不动点理论证明^[21-23], 函数序列 $\{u_{nasy}(t)\}$ 在 $t \in (-\infty, \infty)$ 上是一致收敛的. 设

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{nasy}(t). \quad (11)$$

将 (6) 式两边取极限 $n \rightarrow \infty$, 显然得知, 由 (11) 式确定的极限函数 $u(t)$ 就是广义 Duffing 扰动随机共振方程 (1) 的精确解 $u_{\text{exa}}(t)$ 表达式. 因而, $u_{nasy}(t)$ 就是扰动方程 (1) 式对应的 n 次近似解析解.

4 举 例

为了简单起见, 我们给出仅有周期驱动力, 而不具有 Gauss 白噪声的广义 Duffing 扰动随机

共振方程的一组无量纲参数为 $k = 1$, $a = 1$, $b = \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$), $A = 1$, $\omega = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. 这时广义 Duffing 方程 (1) 为

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} - u + \varepsilon u^3 = \cos 2\pi t. \quad (12)$$

由广义变分迭代 (6) 式和 (8) 式, 对应的广义 Duffing 扰动随机共振方程 (12) 的初始迭代 u_0 为

$$u_0(t) = \exp \frac{1}{2} t \sin \frac{\sqrt{5}}{2} t. \quad (13)$$

由 (9) 式, 得到广义 Duffing 扰动方程 (12) 的一次迭代渐近解

$$u_{1asy} = \exp \frac{1}{2} t \sin \frac{\sqrt{5}}{2} t + \frac{2}{\sqrt{5}} \int_0^t \exp \frac{1}{2} (\xi - t) \times \sin \frac{\sqrt{5}}{2} (\xi - t) [-\cos 2\pi \xi + \varepsilon u_0^3] d\xi, \quad (14)$$

其中 u_0 由 (13) 式表示

为了说明由广义变分迭代方法得到的广义 Duffing 扰动随机共振方程 (12) 的渐近解的近似程度, 现取 $\varepsilon = 0.1$ 和 $\varepsilon = 0.05$ 用模拟方法得到的 Duffing 扰动方程 (12) 的 (一次) 渐近解 u_{1asy} 曲线 (虚线) 和精确解 u_{exa} 曲线 (实线) 的比较图形, 分别如图 1 和图 2 所示.

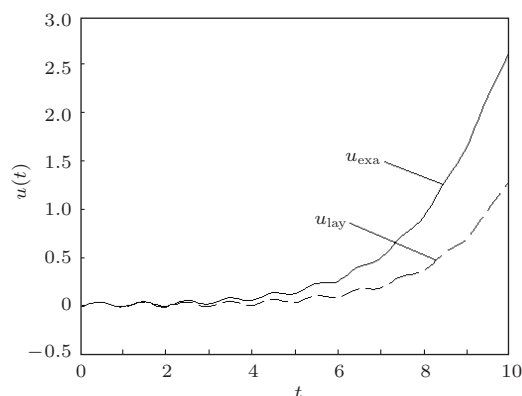


图 1 精确解 (实线) 与渐近解 (虚线) 比较 ($\varepsilon = 0.1$)

由图 1 和图 2 可以看出, 渐近解 u_{1asy} 和精确解 u_{exa} 具有较好的近似度, 而且取参数 $\varepsilon > 0$ 越小, Duffing 扰动方程 (12) 的渐近解和精确解两者曲线就越靠近.

再由 (10), (13) 和 (14) 式, 得到广义 Duffing 扰动方程 (12) 的二次迭代渐近解

$$u_{2asy} = \exp \frac{1}{2} t \sin \frac{\sqrt{5}}{2} t + \frac{2}{\sqrt{5}} \int_0^t \exp \frac{1}{2} (\xi - t)$$

$$\times \sin \frac{\sqrt{5}}{2} (\xi - t) [u_{1asy} \xi + u_{1asy} \xi - u_{1asy} - \cos 2\pi \xi + \varepsilon (u_0^3 + u_{1asy}^3)] d\xi, \quad (15)$$

其中 u_0, u_{1asy} 分别由 (13) 和 (14) 式表示.

由广义变分迭代 (6) 式, 还可以依次得到广义 Duffing 扰动方程 (12) 的各次渐近解 $u_{nasy}(t)$ ($n = 3, 4, \dots$).

由于渐近解函数序列 $\{u_{nasy}(t)\}$ 关于 t 是一致收敛的. 因此当 $n \rightarrow \infty$ 时, 渐近解 $u_{nasy}(t)$ 随 n 的增大而越来越接近精确解 u_{exa} .

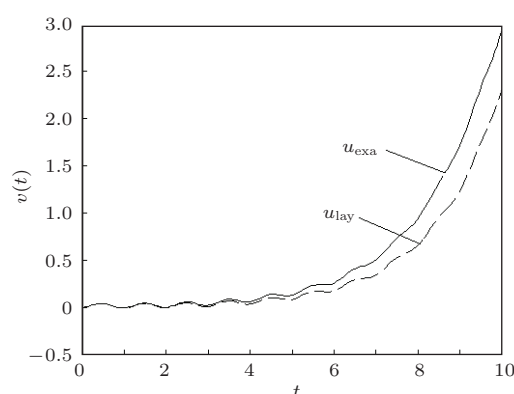


图 2 精确解 (实线) 与渐近解 (虚线) 比较 ($\varepsilon = 0.05$)

5 随机共振机理渐近解的物理意义

由广义变分迭代方法得到的广义 Duffing 扰动随机共振方程的渐近解 $u_{nasy}(t)$, 因为它是近似的解析关系式, 因此可以通过解析运算继续对随机共振机理进一步研究, 得到相关的物理性态.

例如, 当我们需要研究随机共振系统平衡点的势垒高度时, 在具有周期驱动力 $s(t) = A \cos 2\pi \omega t$ 存在的情形下, 由 Brown 粒子的位移函数 $u(t)$ 的渐近解析表示式 $u_{nasy}(t)$ 能够通过解析运算来计算出系统势函数受到特征信号周期性的调制时的变化函数

$$V(u) = -\frac{a}{2} u^2 + \frac{b}{4} u^4 - A \cos 2\pi \omega t.$$

此外, 我们还可利用渐近解 $u_{nasy}(t)$ 通过解析方法来讨论势场作用力的计算, 逃逸速率参数的分析, 噪声强度的变化对随机共振的影响, 以及各调节系统参数的最优匹配等等物理性态. 本文在此不再予以深入探讨.

6 结 论

广义变分迭代方法, 当选取选定合适的初始近似后, 能较快速度地得到满意的渐近解析解, 并利用解析运算来进一步研究对应物理模型的相关物理性态. 本文就是从一类广义Duffing扰动方程随机共振机理出发来得到其满意的渐近解. 并以此为基础, 还可进一步研究相关的物理性态

参考文献

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiana 1981 *Physica A* **14** 453
- [2] Bensi R, Parisi G, Srutera A 1982 *Tellus* **34** 11
- [3] Nicolis C 1982 *Tellus* **1** 1
- [4] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rew. Mod. Phys.* **70** 223
- [5] Gammaitoni L, Marchesoni F, Menichella-Saetta E, Santucci S 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 349
- [6] Gammaitoni L, Menichella-Saetta E, Santucci S, Marchesoni F, Presilla C 1989 *Phys. Rev. A* **40** 2114
- [7] Jung P, Hänggi P 1990 *Phys. Rev. A* **41** 2977
- [8] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 802 (in Chinese) [康艳梅, 徐健学, 谢勇 2003 物理学报 **52** 802]
- [9] Wang F Z, Chen W S, Qin G R, Guo D Y, Liu J L 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 27
- [10] Leng Y G, Lai Z H, Fan S B, Gao Y J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 230502 (in Chinese) [冷永刚, 赖志慧, 范胜波, 高毓璦 2012 物理学报 **61** 230502]
- [11] Leng Y G, Lai Z H 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 020502 (in Chinese) [冷永刚, 赖志慧 2014 物理学报 **63** 020502]
- [12] Han X L, Shi L F, Mo J Q 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 060205 (in Chinese) [韩祥临, 石兰芳, 莫嘉琪 2014 物理学报 **63** 060205]
- [13] Han X L, Zhao Z J, Cheng R J, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110202 (in Chinese) [韩祥临, 赵振江, 程荣军, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 110202]
- [14] Yao J S, Lin W T, Du Z J, Mo J Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 120205
- [15] Lin W T, Zhang Y, Mo J Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 030205
- [16] Ouyang C, Chen L H, Mo J Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050203
- [17] Zhou X C, Yao J S, Mo J Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 030201
- [18] Zhou X C, Shi L F, Mo J Q 2014 *Chin. Phys. B* **23** 040202
- [19] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010208
- [20] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010241
- [21] Lin W T, Zhang Y, Mo J Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 030205
- [22] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Publisher) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学中的近似非线性分析方法 (郑州: 河南科学技术出版社)]
- [23] de Jager, E. M, Jiang Furu 1996 *The Theory of Singular Perturbation*, Amsterdam: North-Holland Publishing Co

Asymptotic solution to the generalized Duffing equation for disturbed oscillator in stochastic resonance^{*}

Han Xiang-Lin¹⁾ Lin Wan-Tao²⁾ Xu Yong-Hong³⁾ Mo Jia-Qi⁴⁾[†]

1) (*Departmentt of Mathematics, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China*)

2) (*State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamic, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*)

3) (*Department of Mathematics & Physics, Bengbu College, Bengbu 233030, China*)

4) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China*)

(Received 10 April 2014; revised manuscript received 28 April 2014)

Abstract

A class of nonlinear generalized Duffing equation for disturbed oscillator is considered. Firstly, the typical Duffing equation is solved. Then approximate solutions to the nonlinear Duffing equation for disturbed oscillators in stochastic resonance is obtained using the generalized functional variation principle, and the uniform validity is proved.

Keywords: disturbed oscillator, resonance mechanism, asymptotic solution

PACS: 02.30.Sa

DOI: 10.7498/aps.63.170204

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 41275062), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. LY13A010005), and the Natural Science Foundation of the Education Department of Anhui Province, China (Grant No. KJ2013B003).

[†] Corresponding author. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn