地球磁层电磁场中粒子引导中心漂移运动模型的周期轨*

陈丽娟† 鲁世平

(南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

(2014 年 4 月 11 日收到; 2014 年 6 月 3 日收到修改稿)

运用 Mawhin 重合度理论探讨了一类非线性问题的周期解, 然后将其应用于地球磁层电磁场中粒子引导中心漂移运动模型的周期轨的研究, 得到了一定条件下该模型存在周期轨的结果.

关键词: 带电粒子, 漂移运动, 非线性, 周期轨

PACS: 02.30.Hq **DOI:** 10.7498/aps.63.190202

1 引 言

带电粒子在电磁场中的运动轨道比较复杂, 当粒子在均匀电磁场中运动时, 其轨道和粒子的电荷、质量、速度以及速度与磁场的夹角有关. 如果设带电粒子的速度和磁场垂直, 在磁场的作用下, 带电粒子将在垂直于磁场的平面上围绕磁场做回旋运动. 由于质子的质量比电子大, 因此其回旋运动的半径比电子大. 如果带电粒子平行于磁场方向的速度不为零, 由于有平行方向的速度, 带电粒子的运动是圆周运动加上平行于磁场方向的等速运动, 这两种运动合成后形成螺旋轨道. 若还有电场和磁场梯度, 则粒子的运动轨道将变得更为复杂. 针对带电粒子在运动区内围绕磁力线做螺旋轨道运动, 阿尔文引入了引导中心的概念, 研究引导中心的运动轨迹要比研究带电粒子的轨迹方便, 在某种特殊情况下还可得出解析表达式 [1].

磁层是地球空间环境中非常重要的区域, 磁层内充满着稀薄等离子体, 也是空间物理中十分活跃的研究对象. 地球磁层中有内辐射带和外辐射带, 这些辐射带中俘获了大量的高能带电粒子, 它们分别来自于地球外层大气和太空. 地球的磁场可以近似看作偶极磁场, 带电粒子在磁场中的有些运动具有明显的周期性特征, 如粒子的回旋运动、弹跳运动以及绕地球的漂移运动等 [2]. 讨论复杂电磁背景下带电粒子的运动轨道及其运动规律, 一方面为进一步了解磁层等离子体的集体特征提供线索, 另一方面借助于这些运动特征可以研究粒子在磁层电磁场中的许多动力学过程如粒子进入地球附近、极光和环电流的形成过程等, 从而为解释磁层的基本结构和卫星的观测结果, 包括辐射带、等离子体层、环电流以及磁尾等离子体片等结构、现象提供重要的理论依据. 本文讨论了地球磁层电磁场中粒子引导中心漂移运动的周期性问题.

2 非线性动力学模型

带电粒子在磁层电磁场中的运动满足洛伦兹方程, 由于非电磁力在磁层中可忽略, 从而其动力学方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t^2}=q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{S},t)+q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{S},t), \qquad (1)$$

其中 m, q, $\boldsymbol{S}$ 和 t 分别是粒子的质量、电荷、位置和时间. $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ 为带电粒子所在位置的电磁场. 由引

* 国家自然科学基金 (批准号: 11271197)、江苏省普通高校研究生科研创新计划项目 (批准号: CXLX13_502) 和南京信息工程大学科研基金 (批准号: 20110387; 2012r101) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: clj_99@sohu.com

言我们知道, 当带电粒子在恒定的均匀磁场中运动时, 粒子在电场的作用下, 或在垂直于磁场方向存在磁场梯度时, 带电粒子做漂移运动. 文献[3]提出了在一般情况下, 只要粒子在一次回旋运动期间, 磁场的变化可看成是一个小扰动, 以上的结论仍然成立. 而且当粒子围绕引导中心一周时, 磁场的空间与时间变化满足小扰动条件

$$|(\boldsymbol{\rho}\cdot\nabla\boldsymbol{B})| \ll |B|,\quad T_0\left|\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right| \ll |B| \tag{2}$$

时, 引导中心的概念依然成立. (2)式中 $\boldsymbol{\rho}$ 为回旋半径, T_0 为回旋周期. Northrop 利用严格的数学方法, 根据带电粒子的动力学方程(1), 推导了当满足小扰动条件(2)时, 带电粒子引导中心的基本动力学方程:

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{S}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2} =& q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{S}_\mathrm{c}) + q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}_\mathrm{c}) \\ &- \mu\nabla B(\boldsymbol{S}_\mathrm{c}), \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{S}_\mathrm{c}$ 代表引导中心的位置. 由方程(1)和(3), 显然带电粒子引导中心的动力学方程与带电粒子的动力学方程有相似的形式. 作用于带电粒子引导中心上的力, 除了一般的洛伦兹力和电场力外, 还有磁场梯度所引起的力 $\boldsymbol{F}_{\nabla B} = -\mu\nabla B(\boldsymbol{S}_\mathrm{c})$.

由于磁层等离子体中不存在平行于磁场方向的电场, 粒子在磁力线两头密集, 中间稀疏的磁瓶内, 一方面围绕磁力线运动, 另一方面其引导中心还在磁瓶内的一对磁镜点之间, 不断来回作周期性振荡. 带电粒子在一对磁镜点之间振荡时, 引导中心除沿磁力线运动外, 还会在外力作用下漂移偏离磁力线, 其漂移方向与磁力线垂直. 当磁场随时间缓慢变化时, 磁力线在空间形成一个封闭的曲面, 带电粒子的引导中心围绕这封闭曲面作周期性运动.

如果存在平行于磁场方向的电场时, 粒子在磁瓶内的运动将被破坏. 在某些情况下, 粒子将停止沿磁力线运动, 或很快离开磁力线向外运动.

由于太阳风活动(如磁暴、黑子暴等)经常使太阳风传播过程中出现周期性扰动[4], 考虑到这些实际原因, 我们在方程(3)中加入了扰动项—太阳风周期扰动, 建立如下的磁层电磁场中粒子引导中心漂移运动的 n 维非线性模型:

$$x'' + g'(x(t))x'(t) + h(x(t)) = f(t), \tag{4}$$

其中

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^\mathrm{T} \in R^n,$$

$$t\in R,\quad g\in C^1(R^n, R^n),$$
$$h\in C(R^n,R^n),\quad f\in C(R,R^n),$$

且 $f(t+2T) = f(t),\quad T>0$.

在非线性问题的研究中, 许多学者用不同方法做了大量的工作[5−13]. 地球磁层电磁场中粒子引导中心的漂移运动模型是非线性动力学模型, 具有复杂的动力学行为. 本文运用重合度拓展理论, 探讨了一定条件下该模型周期轨的问题. 笔者等一些学者也曾用这种方法成功地解决了一些非线性模型的周期解问题[14−17].

3 理论分析

现考虑系统(4)的 $2T$ 周期解存在性问题, 其中 T 为一正常数.

令

$$C_{2T} = \{x | x\in C(R,R^n), x(t+2T)\equiv x(t)\},$$
$$C^1_{2T} = \{x | x\in C^1(R,R^n), x(t+2T)\equiv x(t)\},$$

显然, C_{2T} 和 C^1_{2T} 为Banach空间.

$\forall x\in C_{2T}$, 定义

$$|x(t)| = \sqrt{x(t)^T x(t)},$$
$$|x|_\infty = \max_{t\in[-T,T]} |x(t)|,$$
$$|x|_r = \left(\int_{-T}^{T} |x(t)|^r \,\mathrm{d}t\right)^{1/r},\quad r\in(1,+\infty).$$

$\forall x\in C^1_{2T}$, 定义

$$|x|_{C^1_{2T}} = \max_{t\in[-T,T]}\{|x|_\infty, |x'|_\infty\}.$$

引理1[18] 设 $q\in C^1_{2T}$, 则

$$\begin{aligned} |q|_\infty \leqslant& T^{-1/v}\left(\int_{-T}^{T}|q(s)|^v\,\mathrm{d}s\right)^{1/v} \\ &+ T^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{-T}^{T}|q'(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}, \end{aligned}$$

其中 v 和 p 为常数且 $v>1$, $p>1$.

引理2[19] 设 $\varOmega$ 是 X 中有界开集, 如果满足下列条件:

1) 对任意的 $\lambda\in(0,1)$, 方程

$$x'' + \lambda g'(x(t))x'(t) + \lambda h(x(t)) = \lambda f(t)$$

在 $\varOmega$ 的边界 $\partial\varOmega$ 上无解;

2) 方程 $\varDelta(c) := \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}[f(t)-h(c)]\mathrm{d}t = 0$ 在 $\partial\varOmega\cap R^n$ 上无解;

3) Brouwer 度 $d_B\{\Delta,\ \Omega\cap R^n,\ 0\}\neq 0$. 则方程 (4) 在 $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ 中有一个 $2T$ 周期解.

定理1 设 $f\in C(R,R^n)$ 为有界函数, 若存在常数 $l\geqslant m>0$, 使得

$$-l|x|^2\leqslant x^{\mathrm{T}}h(x)\leqslant -m|x|^2,\forall x\in R^n,$$

则

(I) 对 $x\in\Sigma=\{x|x\in C^1_{2T},x''+\lambda_1 g'(x(t))x'(t)+\lambda_1 h(x(t))=\lambda_1 f(t),\lambda_1\in(0,1]\}$, 存在正常数 $A_1,\ A_2,\ M_1,\ M_2$, 使得

$$|x|_2\leqslant A_1,\quad |x'|_2\leqslant A_2,\quad |x|_\infty\leqslant M_1,\quad |x'|_\infty\leqslant M_2,$$

其中 $A_1,\ A_2,\ M_1,\ M_2$ 与 λ 无关.

(II) 方程 (4) 存在一个 $2T$ 周期解.

证明 (I) 对 $x\in\Sigma$, 则有

$$\begin{aligned}&x''+\lambda_1 g'(x(t))x'(t)+\lambda_1 h(x(t))=\lambda_1 f(t),\\&\lambda_1\in(0,1].\end{aligned}\tag{5}$$

将 (5) 式两端同时左乘 x^{T}, 在 $[-T,T]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}&-|x'|_2^2+\lambda_1\int_{-T}^{T}x^{\mathrm{T}}(t)g'(x(t))x'(t)\mathrm{d}t\\&+\lambda_1\int_{-T}^{T}x^{\mathrm{T}}(t)h(x(t))\mathrm{d}t\\=&\lambda_1\int_{-T}^{T}x^{\mathrm{T}}(t)f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{6}$$

又

$$\begin{aligned}&\int_{-T}^{T}x^{\mathrm{T}}(t)g'(x(t))x'(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-T}^{T}x^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}g(x(t))\\&=-\int_{-T}^{T}x'^{\mathrm{T}}(t)g(x(t))\mathrm{d}t=0,\end{aligned}$$

于是 (6) 式变为

$$-|x'|_2^2+\lambda\int_{-T}^{T}x^{\mathrm{T}}(t)h(x(t))\mathrm{d}t=\lambda\int_{-T}^{T}x^{\mathrm{T}}(t)f(t)\mathrm{d}t,$$

根据定理1中的条件 $-l|x|^2\leqslant x^{\mathrm{T}}h(x)\leqslant -m|x|^2$, $\forall x\in R^n$, 有

$$\begin{aligned}|x'|_2^2=&\lambda_1\int_{-T}^{T}x^{\mathrm{T}}(t)h(x(t))\mathrm{d}t-\lambda_1\int_{-T}^{T}x^{\mathrm{T}}(t)f(t)\mathrm{d}t\\&\leqslant-\lambda_1 m\int_{-T}^{T}|x|^2\mathrm{d}t-\lambda_1\int_{-T}^{T}x^{\mathrm{T}}(t)f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即

$$|x'|_2^2+\lambda_1 m|x|_2^2\leqslant\lambda_1\int_{-T}^{T}|x^{\mathrm{T}}(t)f(t)|\mathrm{d}t.$$

再由 Holder 不等式 [12], 得

$$|x'|_2^2+\lambda_1 m|x|_2^2\leqslant\lambda_1|f|_2\cdot|x|_2,$$

从而有

$$\lambda_1 m|x|_2^2\leqslant\lambda_1|f|_2\cdot|x|_2,\quad |x'|_2^2\leqslant\lambda_1|f|_2\cdot|x|_2,$$

即有

$$\begin{aligned}&|x|_2\leqslant\frac{|f|_2}{m}\triangleq A_1,\\&|x'|_2\leqslant\lambda_1\sqrt{|f|_2\cdot|x|_2}\leqslant\frac{|f|_2}{\sqrt{m}}\triangleq A_2.\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $A_1,\ A_2$ 为与 λ_1 无关的正常数.

由引理1, 取 $v=p=2$, 则有

$$\begin{aligned}|x|_\infty\leqslant&T^{-1/2}\left(\int_{-T}^{T}|x(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\\&+T^{1/2}\left(\int_{-T}^{T}|x'(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\\=&T^{-1/2}|x|_2+T^{1/2}|x'|_2\\\leqslant&T^{-1/2}A_1+T^{1/2}A_2\triangleq M_1,\end{aligned}\tag{8}$$

其中 M_1 为与 λ_1 无关的正常数.

令 $H_{M_1}\triangleq\max\limits_{|x|\leqslant M_1}|h(x)|,\ G_{M_1}\triangleq\max\limits_{|x|\leqslant M_1}|g(x)|$, 由 (5) 得到

$$\begin{aligned}&|x''+\lambda_1 g'(x(t))x'(t)|\\=&\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x'+\lambda_1 g(x(t))]\right|\\\leqslant&H_{M_1}+\sup_{t\in R}|f(t)|\triangleq A_3.\end{aligned}\tag{9}$$

由 $x'(t)$ 的连续性, 存在 $\xi\in[0,T]$, 使得

$$\begin{aligned}|x'(\xi)|=&\left|\frac{1}{T}\int_0^T x'(s)\mathrm{d}s\right|\\=&\left|\frac{x(T)-x(0)}{T}\right|\leqslant\frac{2}{T}M_1.\end{aligned}\tag{10}$$

再由 (9) 和 (10) 式, 有

$$\begin{aligned}&|x'(t)+\lambda_1 g(x(t))|\\=&\left|\int_\xi^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[x'(s)+\lambda_1 g(x(s))]\mathrm{d}s+x'(\xi)+\lambda_1 g(x(\xi))\right|\\\leqslant&\int_0^T\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[x'(s)+\lambda_1 g(x(s))]\right|\mathrm{d}s+|x'(\xi)|+G_{M_1}\\\leqslant&A_3T+\frac{2}{T}M_1+G_{M_1}\triangleq A_4.\end{aligned}$$

因此, 我们有

$$|x'(t)|=|x'(t)+\lambda_1 g(x(t))-\lambda_1 g(x(t))|$$

$$\begin{aligned}&\leqslant|x'(t)+\lambda_1 g(x(t))|+|g(x(t))|\\&\leqslant A_4+G_{M_1}\triangleq M_2,\end{aligned}\tag{11}$$

即

$$|x'|_\infty\leqslant M_2,$$

这里 M_2 为与 λ_1 无关的正常数.

由 (7), (8), (11) 可知, (I) 得证.

(II) 考虑方程

$$\begin{aligned}&x''+\lambda g'(x(t))x'(t)+\lambda h(x(t))=\lambda f(t),\\&\lambda\in(0,1).\end{aligned}\tag{12}$$

令 $\Omega_1\subset C^1_{2T}$ 为方程 (12) 的所有 $2T$ 周期解的集合, 由 (0, 1) $\subset$ (0, 1] 可知 $\Omega_1\subset\sum$. 如果 $x\in\Omega_1$, 由 (I) 可得

$$|x|_\infty\leqslant M_1,\quad |x'|_\infty\leqslant M_2.$$

再令

$$\begin{aligned}&\Omega_2\\=&\left\{x|x\in R^n,\Delta(x)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[f(t)-h(x)]\mathrm{d}t=0\right\},\end{aligned}$$

若 $x\in\Omega_2$, 则 $x=c\in R^n$, 从而有

$$\Delta(c)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[f(t)-h(c)]\mathrm{d}t=0,$$

由定理 1 的条件, 得

$$2Tmc^2\leqslant\int_{-T}^{T}|c|\cdot|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant|c|\cdot\sqrt{2T}\cdot|f|_2,$$

即有

$$|c|\leqslant\frac{|f|_2}{m\sqrt{2T}}\triangleq M_0$$

作 $\Omega=\{x|x\in C^1_{2T},|x|_\infty\leqslant M_1+M_0,|x'|_\infty\leqslant M_2+1\}$, 则 $\Omega\supset\Omega_1\cup\Omega_2$, 引理 2 中的条件 1) 和 2) 显然成立.

最后, 作同伦映射

$$\begin{aligned}&H:(\Omega\cap R^n)\times[0,1]\to R^n,\\&H(x,\mu)=\mu x+(1-\mu)\Delta(x),\quad \mu\in[0,1],\end{aligned}$$

其中 $\Delta(x)=\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}[f(t)-h(x)]\mathrm{d}t=0.$

且由定理 1 的条件及引理 2 的 2) 不难得出

$$H(x,\mu)\neq0,\quad\forall(x,\mu)\in\partial(\Omega\cap R^n)\times[0,1].$$

因此,

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}_B\{\Delta,\Omega\cap R^n,0\}\\&=\mathrm{d}_B(H(x,0),\Omega\cap R^n,0)\\&=\mathrm{d}_B(H(x,1),\Omega\cap R^n,0)\\&=\mathrm{d}_B(I,\Omega\cap R^n,0)\neq0.\end{aligned}$$

即引理 2 中条件 3) 满足, 从而根据引理 2, 方程 (4) 存在一个 $2T$ 周期解.

4 结　论

1) 地球磁层电磁场中粒子引导中心的漂移运动模型 (4) 是非线性动力学模型, 而且是带电粒子引导中心的基本动力学方程的推广. 一般情况下, 无论是求解析解还是近似解, 或用数值计算方法得到模拟解都相当困难. 重合度理论中的延拓定理是解决动力系统周期解存在性问题的非常有效和常用的方法, 其关键是设法将一个模型转化成抽象方程, 找到系统所有可能解的先验界, 它在物理、力学、偏微分方程等学科中都有广泛的应用. 本文运用重合度拓展理论, 不通过求解, 得到了一定条件下该模型存在周期轨的结论. 在本文所得结果的基础上, 还可以进一步探讨该模型同宿轨等其他动力学行为的存在性问题.

2) 粒子的运动可以近似看成在均匀恒定磁场中的回旋运动和作为微扰的磁场非均匀性以及随时间缓变所引起的漂移运动的叠加, 也就是粒子围绕引导中心回旋, 而引导中心在微扰力作用下作漂移运动. 在考虑大尺度上粒子运动时, 通常对于粒子运动的细节并不感兴趣. 由于粒子是绕引导中心作旋转运动, 只要弄清楚引导中心的漂移运动的性质, 就能了解粒子运动的整体特性, 因此本文对地球磁层电磁场中粒子引导中心漂移运动的周期性的研究具有一定的物理应用价值.

参考文献

[1] Yang G, Wang L, Tian J L 2013 *Chin. Phys. B* **22** 127305
[2] Dzhalilov, N. S., V. D. Kuznetsov, J. Staude 2011 *Contrib. Plasma Phys.* **51** 621
[3] Xu R L, Li L 2005 *Dynamics of Magnetosphere Particle* (Beijing: Science Press) pp78–81 (in Chinese) [徐荣栏, 李磊 2005 磁层粒子动力学 (北京: 科学出版社) 第 78—81 页]
[4] Gan S P, Hong M H, Wang X M 1993 *Chinese Journal of Space Science* **13** 107
[5] Marques I 2005 *Nonlinear Anal.* **61** 21
[6] Bartier J P 2006 *Asmototic Anal.* **46** 325
[7] Ni W M, Wei J C 2006 *J. Diff. Eqns.* **221** 158

[8] Mo J Q 2010 *Commun. Theor Phys.* **53** 440
[9] Mo J Q 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010203
[10] Zhou X C, Shi L F, Mo J Q 2014 *Chin. Phys. B* **23** 040202
[11] Chen L J, Lu S P 2012 *Journal of Applied Mathematics* **12** 615303
[12] Lu S P, Chen L J 2012 *J. Math. Anal. Appl* **387** 1127
[13] Lu S P, Zheng L, Chen L J 2013 *Acta Mathematica Scientia* **33** 5
[14] Li X J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020202
[15] Li X J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210201 (in Chinese) [李晓静 2012 物理学报 **61** 210201]
[16] Chen L J, Lu S P, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 090201 (in Chinese) [陈丽娟, 鲁世平, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 090201]
[17] Chen L J, Lu S P 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 200201 (in Chinese) [陈丽娟, 鲁世平 2013 物理学报 **62** 200201]
[18] Tang X H, Li X 2009 *Nonlinear Analysis* **71** 1124
[19] Gaines R E, Mawhin J L 1977 *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations* (Berlin: Springer) pp16–16

The periodic problem of drift motion of the guidance center in the earth's magnetosphere electromagnetic field*

Chen Li-Juan† Lu Shi-Ping

(*School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China*)

(Received 11 April 2014; revised manuscript received 3 June 2014)

Abstract

Using Mawhin's continuation theorem, the existence of periodic solution for a class of nonlinear problem is discussed, and then by using it, the problem of periodic solution of drift motion of the guidance center in earth's magnetosphere electromagnetic field is investigated. A result on the existence of periodic solution to the model is obtained, and the feasibility of our result is explained.

Keywords: electric particle, drift motion, nonlinear, periodic orbits

PACS: 02.30.Hq **DOI:** 10.7498/aps.63.190202

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 11271197), the Innovation Program Award for Graduate Student in Jiangsu, China (Grant No. CXLX13_502), and the Science Foundation in NUIST of China (Grant No. 20110387, 2012r101).

† Corresponding author. E-mail: clj_99@sohu.com