

# Hénon映射的噪声诱导间歇现象及其 临界值估算研究\*

郭空明<sup>1)</sup> 江俊<sup>2)†</sup>

1) (西安电子科技大学机电工程学院, 西安 710071)

2) (西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

(2014年5月12日收到; 2014年6月1日收到修改稿)

本文研究了 Hénon 映射在噪声诱导下发生的间歇现象. 通过数值模拟和全局分析手段, 揭示了噪声诱导间歇现象的机理. 基于随机敏感度函数法, 通过检测噪声作用下周期吸引子的置信椭圆与混沌鞍的碰撞情况, 给出了诱发间歇现象的噪声强度临界值的估算方法. 结果表明, Hénon 映射中噪声诱导间歇现象是由随机周期吸引子和混沌鞍不稳定流形的相互作用引发, 随机敏感度函数的方法可以较好地估算发生间歇现象的噪声强度临界值.

**关键词:** 噪声诱导间歇, 暂态混沌, 随机敏感度函数

**PACS:** 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.63.190503

## 1 引言

噪声在真实系统中是不可避免的. 对于非线性系统而言, 即使很小强度的噪声也会引发具有全新机理的复杂动力学现象, 如随机共振<sup>[1,2]</sup>、噪声诱导相干<sup>[3]</sup>、噪声诱导同步<sup>[4]</sup>、噪声诱导混沌<sup>[5]</sup>等等. 目前, 在许多系统中都发现了噪声诱导的现象, 并且其中大部分现象的机理都已得到了一定程度的认识, 但是, 除了随机共振之外, 对于其他噪声诱导现象, 虽然对其内在机理都有一定的认识, 但对于其定量分析、临界值计算等问题还未有实质性的进展, 而这些都是工程领域中所关心的实际问题. 因此, 对于噪声诱导现象, 发展一种可以定量估计噪声扰动效果的方法, 并基于此方法估算噪声诱导现象中噪声强度的临界值, 显得尤为重要.

噪声诱导的间歇现象<sup>[6]</sup>作为一种非线性与小噪声共同作用下的复杂现象, 往往发生于周期吸引子和暂态混沌共存的系统中. 在这种现象中, 噪声会使周期吸引子逐渐扩散, 形成所谓随机吸引子,

当随机吸引子与暂态混沌或其稳定流形相碰撞时, 会在暂态混沌上做有限时间的停留, 之后重新回到周期吸引子附近, 循环往复, 形成噪声诱导的间歇现象. 此时噪声将周期吸引子和暂态混沌连接在一起, 形成一个新的不变集. 随着噪声强度增加, 轨道访问暂态混沌的次数会愈发频繁, 响应的最大 Lyapunov 指数会逐渐增大至正值, 形成噪声诱导的混沌.

对于高斯噪声诱发的现象, 从理论上讲, 即使无限小的噪声也会使随机周期吸引子遍历整个相空间, 从而使其与暂态混沌相连接. 但是, 基于高斯分布的特殊性以及对该系统的有限观测时间, 可以认为在小噪声作用下, 随机吸引子是有界的<sup>[6]</sup>. 而且, Lai 等<sup>[7]</sup>发现对于噪声诱导间歇现象, 当噪声强度增大至某一值时, 系统的最大 Lyapunov 指数会突然增大, 该噪声强度即为噪声诱导间歇现象的临界值. 该临界值可以通过引入准势的概念, 计算周期吸引子和暂态混沌的准势差而得到<sup>[8]</sup>. 但是准势的计算较为复杂, 目前的应用仅限于平面系统. 为了利用准势的思想描述随机吸引子的分布情

\* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 11332008) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: K5051304012) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: jun.jiang@mail.xjtu.edu.cn

况, Mil'shtein 等<sup>[9]</sup>在不动点和极限环吸引子附近将准势做线性化近似, 求出了随机吸引子的协方差矩阵. 而 Bashkirtseva 等<sup>[10]</sup>进一步发展了该方法, 提出了随机敏感度函数的概念. 通过随机敏感度函数, 可以构造置信椭圆来定量描述吸引子的空间分布情况.

本文对 Hénon 映射在给定参数下的噪声诱导间歇现象开展研究, 揭示了现象发生的机理, 并通过检测 Hénon 映射中周期吸引子置信椭圆与混沌鞍稳定流形的碰撞, 研究噪声诱导间歇现象的噪声强度临界值估算问题. 本文的工作可为非线性与噪声相互作用下局部现象的噪声临界值估算问题提供一种思路.

## 2 Hénon 映射的噪声诱导间歇现象

考虑如下的、在  $x$  方向受加性噪声扰动的 Hénon 映射

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n + \sqrt{D}\xi_n, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (1)$$

其中,  $\xi_n$  为高斯白噪声,  $D$  为噪声强度. 固定参数  $b = 0.3$ .

首先考虑确定性系统, 即  $D = 0$  时的情况. 当参数  $a$  在范围  $[1, 1.3]$  内发生变化时, 系统的分岔图如图 1 所示. 下面研究  $a = 1.25$  时系统的全局特性, 通过全局分析可以看出, 此时系统存在一个周期 7

吸引子. 另外, 系统还存在一个无穷远处的吸引子、两个鞍点和一个混沌鞍, 如图 2 所示. 其中混沌鞍使用两尺度全局分析方法结合 PIM-triple 法<sup>[11]</sup>计算得到.

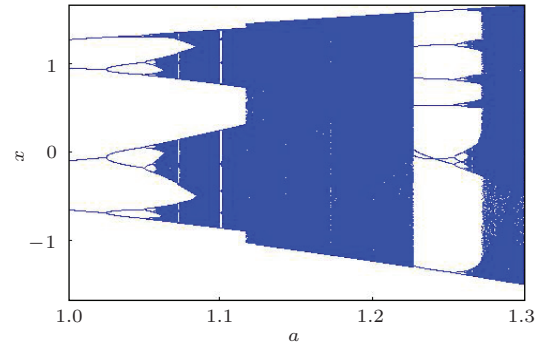


图 1 Hénon 映射的分岔图

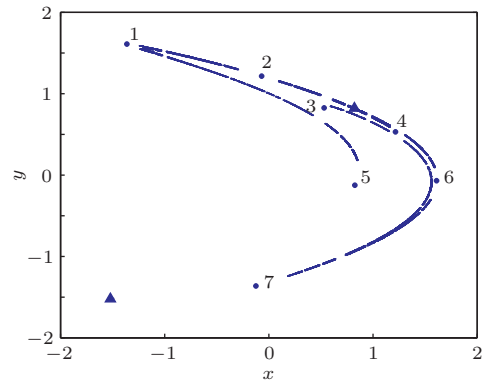


图 2 Hénon 映射在  $a = 1.25$  时的全局不变集 (三角形表示鞍点, 圆点表示周期 7 吸引子, 新月形带状不变集表示混沌鞍)

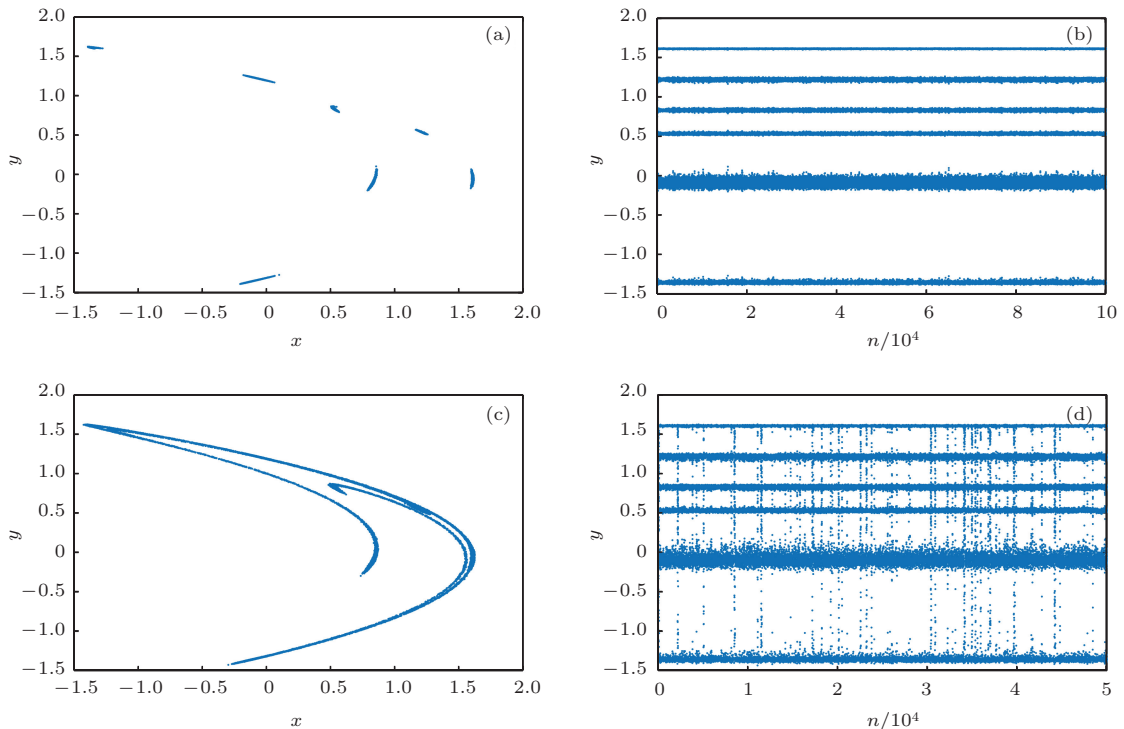


图 3 (a), (b)  $D = 5 \times 10^{-6}$  时系统响应; (c), (d)  $D = 2 \times 10^{-5}$  时系统响应

下面研究噪声强度不为零的情况. 当噪声强度较小时 ( $D = 5 \times 10^{-6}$ ), 系统仍在确定性吸引子附近运动, 围绕着7个周期点形成7个条形区域 (图3(a), (b)), 即随机吸引子. 而当噪声强度较大时 ( $D = 2 \times 10^{-5}$ ), 随机吸引子的区域继续扩散增大. 当随机吸引子与混沌鞍的稳定流形发生碰撞后, 轨道会沿稳定流形访问混沌鞍并短暂停留, 之后沿混沌鞍的不稳定流形重新回到随机吸引子上, 由此形成噪声诱导间歇现象 (图3(c), (d)). 在该响应状态下, 系统大部分时间还是停留在随机吸引子附近, 而在混沌鞍及其流形上停留的时间较短.

图4给出了混沌鞍的稳定流形和不稳定流形, 可以看出, 间歇现象的响应是由周期吸引子和混沌鞍的不稳定流形组成的.

对于映射系统, 其周期吸引子的最大Lyapunov指数小于零, 而混沌鞍的最大Lyapunov指数大于零. 因此, 当噪声强度增加到某一值, 使系统轨道开始访问混沌鞍时, 最大Lyapunov指数会突然开始增大. 通过计算系统的最大Lyapunov指数 (图5) 可以看出, 系统的最大Lyapunov指数在噪声强度达到  $8 \times 10^{-6}$  左右的一个值时开始增加, 该值即为噪声强度临界值.

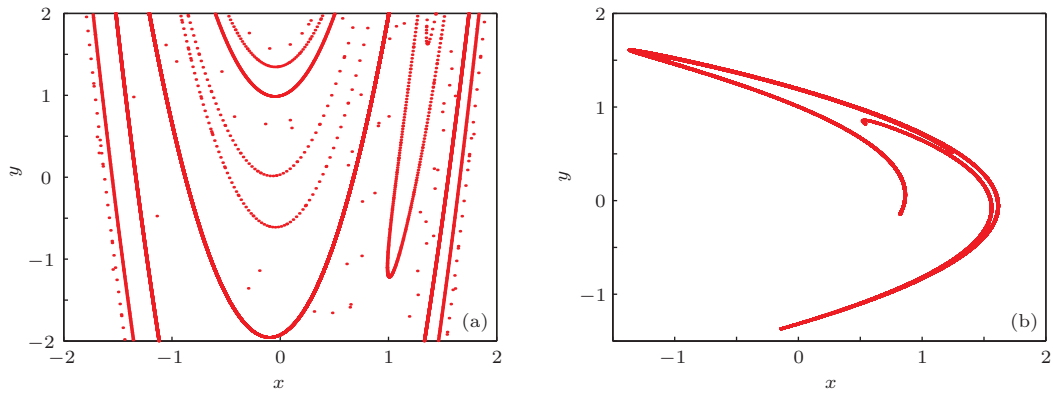


图4 混沌鞍的流形 (a) 稳定流形; (b) 不稳定流形

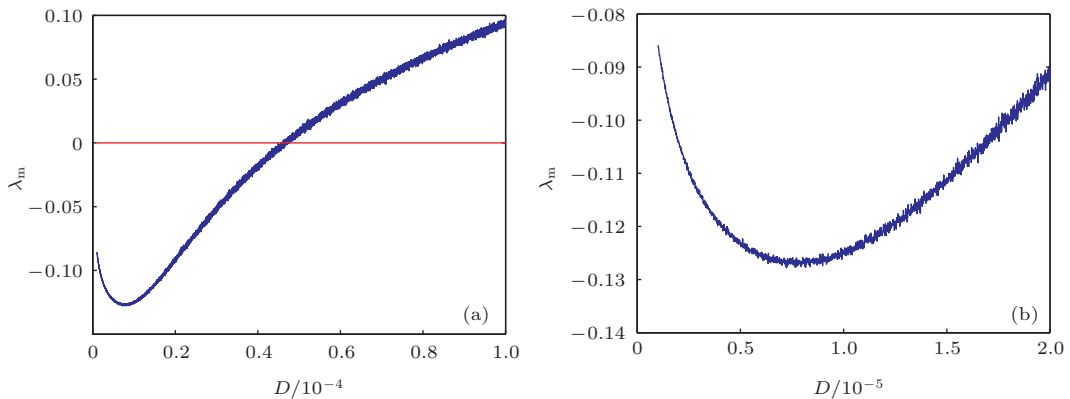


图5 最大Lyapunov指数随噪声强度的变化 (a) 整体情况; (b) 临界值附近

### 3 随机敏感度函数

从上一节的内容可以看出, 确定性系统的不动点和周期吸引子在受到小噪声扰动后, 会扩散成一个测度不为零的区域, 称为随机吸引子. 对于受高斯噪声扰动的系统, 理论上随机吸引子的区域是无界的. 但是根据高斯分布的特点, 绝大多数的点都集中在一个有限的区域内. 通过 Monte-Carlo 模

拟, 可以从数值上求出在特定噪声强度下随机吸引子的分布, 但不能量化该分布随噪声强度的变化. Frobenius-Perron 方程虽然可以精确描述映射系统全局概率密度的变化情况, 但却难以求解. 而随机敏感度函数法可以通过近似求解随机吸引子的协方差矩阵, 构造置信椭圆来描述随机吸引子分布区域随噪声强度的变化情况. 这种方法虽然是一种近似方法, 但是计算量小, 非常适合描述吸引子受到

小噪声扰动后的局部行为.

考虑受噪声扰动的  $N$  维映射系统

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \sqrt{D}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_n)\boldsymbol{\xi}_n, \quad (2)$$

其中  $D$  为噪声强度,  $\boldsymbol{\sigma}$  为  $N \times M$  维矩阵, 代表噪声与系统状态之间的关系,  $\boldsymbol{\xi}_n$  为  $M$  维高斯噪声向量, 满足条件

$$E\boldsymbol{\xi}_t = 0, \quad E\boldsymbol{\xi}_t\boldsymbol{\xi}_t^T = I, \quad E\boldsymbol{\xi}_t\boldsymbol{\xi}_k^T = 0, \quad (t \neq k), \quad (3)$$

其中  $E$  表示期望,  $I$  代表单位矩阵.

首先考虑不动点吸引子的随机敏感度函数. 假设系统 (2) 在  $D = 0$  时存在一个不动点吸引子  $\bar{\mathbf{x}}$ , 令

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T. \quad (4)$$

若不动点  $\bar{\mathbf{x}}$  是指数稳定的, 则其随机敏感度函数  $\mathbf{W}$  满足矩阵代数方程<sup>[12]</sup>

$$\mathbf{W} = \mathbf{F}\mathbf{W}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}. \quad (5)$$

当噪声强度  $D$  不为零时, 对应的随机吸引子的协方差矩阵为  $D\mathbf{W}$ .

下面考虑映射系统的周期吸引子. 假设系统 (2) 在  $D = 0$  时存在一个周期  $k$  吸引子  $\Gamma = \{\bar{\mathbf{x}}_1 \cdots \bar{\mathbf{x}}_k\}$ , 显然各周期点满足

$$\begin{aligned} f(\bar{\mathbf{x}}_i) &= \bar{\mathbf{x}}_{i+1}, \quad i = 1, \cdots, k-1, \\ f(\bar{\mathbf{x}}_k) &= \bar{\mathbf{x}}_1. \end{aligned} \quad (6)$$

设周期点  $\bar{\mathbf{x}}_i$  处的随机敏感度函数为  $\mathbf{W}_i$ , 则各  $\mathbf{W}_i$  之间存在关系

$$\mathbf{W}_{i+1} = \mathbf{F}_i\mathbf{W}_i\mathbf{F}_i^T + \mathbf{Q}_i, \quad (7)$$

其中,

$$\mathbf{F}_i = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}_i), \quad \mathbf{Q}_i = \mathbf{S}_i\mathbf{S}_i^T, \quad \mathbf{S}_i = \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}_i).$$

根据周期  $k$  吸引子的特点, 易知

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{W}_{i+k}. \quad (8)$$

将 (7) 式连续应用  $k$  次、结合 (8) 式, 可知  $\mathbf{W}_1$  满足矩阵方程

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}\mathbf{W}\mathbf{B}^T + \mathbf{Q}, \quad (9)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{F}_k \cdots \mathbf{F}_2\mathbf{F}_1, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_k + \mathbf{F}_k\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{F}_k^T + \cdots \\ &\quad + \mathbf{F}_k \cdots \mathbf{F}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{F}_2^T \cdots \mathbf{F}_k^T. \end{aligned}$$

求解 (9) 式得到  $\mathbf{W}_1$  后, 可以通过 (7) 式进一步得到其他  $k-1$  个周期点的随机敏感度函数.

随机吸引子在各周期点附近的分布情况可以用置信椭圆来描述, 置信椭圆满足以下方程:

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i)^T \mathbf{W}_i^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i) = 2D \ln(1 - P), \quad (10)$$

其中  $P$  为椭圆的置信概率, 表示随机吸引子上的点以概率  $P$  落在椭圆内部. 由高斯分布的特点可知, 随机吸引子上的点大都集中在一个有限区域内. 因此只要将置信概率  $P$  取为一个很接近于 1 的值, 便可以通过 (10) 式的置信椭圆近似描述随机吸引子的分布.

#### 4 Hénon 映射噪声诱导间歇现象临界值估算

根据上一节的算法, 可以构造 (1) 式中 Hénon 映射在  $a = 1.25, b = 0.3$  时周期 7 吸引子的置信椭圆. 图 6 给出了当噪声强度  $D = 5 \times 10^{-6}$  时, 周期 7 吸引子的置信椭圆, 椭圆的置信概率为  $P = 99.9\%$ . 通过与图 3 (a) 进行比较可以看出, 置信椭圆的形状与随机吸引子的形状基本一致.

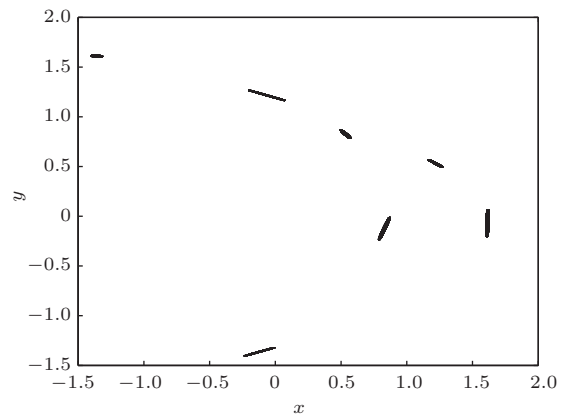


图 6 Hénon 映射周期 7 吸引子的置信椭圆

为了定量验证置信椭圆的准确性, 对随机 Hénon 映射计算  $10^6$  步, 并舍去前  $10^4$  步的点, 计算稳态响应的点落在 7 个置信椭圆中的概率, 得到此概率为 98.63%, 略小于 99.9%, 这是因为置信椭圆只是概率分布在吸引子附近的线性近似.

为了更清楚地将随机吸引子与置信椭圆进行对比, 在周期点 4 附近将置信椭圆放大, 并与数值模拟的结果进行比较, 可以看出, 几乎所有的点都在置信椭圆的内部.

下面考虑利用置信椭圆对 Hénon 映射噪声诱导间歇现象的临界值进行计算. 结合图 4(b) 和图 6 可以看出, 噪声使周期吸引子沿着混沌鞍不稳定流形的反方向逆流而上, 与混沌鞍本身的某一部分相碰撞后, 再沿着混沌鞍的不稳定流形访问周期吸引子及混沌鞍的其他部分. 因此, 在 Hénon 映射噪声诱导间歇现象中, 随机吸引子与混沌鞍 (而不是其稳定流形) 的直接相碰导致了该现象. 由于混沌不变集对噪声具有较好的鲁棒性, 因此忽略噪声对混沌鞍的扰动效果, 通过周期吸引子扩散后与确定性系统混沌鞍的相碰来估算临界值, 对 7 个周期点而言, 每个周期点  $i$  处的随机椭圆与混沌鞍相碰的噪声临界值  $D_i$  由下式确定:

$$D_i = \min \frac{(\mathbf{x}_{cs} - \bar{\mathbf{x}}_i)^T \mathbf{W}_i^{-1} (\mathbf{x}_{cs} - \bar{\mathbf{x}}_i)}{2 \ln(1 - P)}, \quad (11)$$

其中  $\min$  表示取最小值, 变量  $\mathbf{x}_{cs}$  为混沌鞍上的所有点, 实际计算中, 采用数值得到的有限个点来计算.

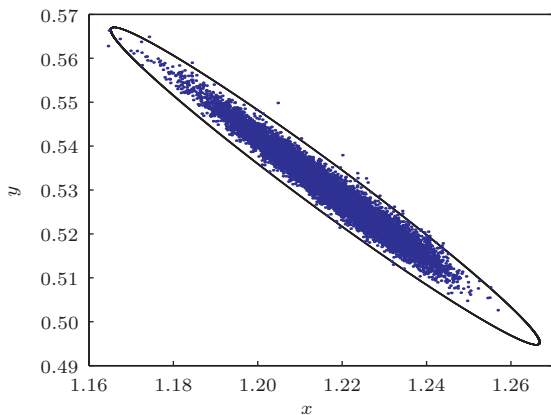


图 7 Hénon 映射周期 7 吸引子周期点 4 附近的随机状态和置信椭圆

仍取置信概率  $P = 99.9\%$ , 经计算, 得到  $D_c = 7.3 \times 10^{-6}$ . 该值与通过最大 Lyapunov 指数计算得到的临界值极为接近 (图 5(b)), 因此本文提出的方法是可行的.

## 5 结 论

本文首先使用全局分析手段和数值模拟研究了 Hénon 映射中噪声诱导间歇现象的机理, 发现噪声诱导的间歇响应由扩散后的周期吸引子和混沌鞍的不稳定流形组成. 通过计算系统最大 Lyapunov 指数随噪声强度的变化, 发现该现象存在一个噪声强度临界值. 之后, 基于随机敏感度函数法, 构造表征随机吸引子空间分布情况的置信椭圆, 通过检测周期吸引子置信椭圆与混沌鞍的碰撞来预测噪声诱导间歇现象的发生以及估算噪声强度临界值. 结果表明, 这是一种高效、可行的估算方法.

## 参考文献

- [1] Zhang X Y, Xu W, Zhou B C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060514 (in Chinese) [张晓燕, 徐伟, 周丙常 2011 物理学报 **60** 060514]
- [2] Zeng C H, Wang H, Wang H T 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050502
- [3] Buric N, Todorovic K, Vasovic N 2010 *Phys. Rev. E* **82** 037201
- [4] Du L, Xu W, Xu Y, Wang L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 050504 (in Chinese) [都琳, 徐伟, 许勇, 王亮 2012 物理学报 **61** 050504]
- [5] Feng J, Xu W, Gu R C, Di G G 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090507 (in Chinese) [冯俊, 徐伟, 顾仁财, 狄根虎 2011 物理学报 **60** 090507]
- [6] Tél T, Lai Y C, Gruiz M 2008 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **18** 509
- [7] Lai Y C, Liu Z, Billings L, Schwartz I B 2003 *Phys. Rev. E* **67** 026210
- [8] Tél T, Lai Y C 2010 *Phys. Rev. E* **81** 056208
- [9] Mil'shtein G N, Ryashko L B 1995 *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **59** 47
- [10] Bashkirtseva I A, Ryashko L B 2009 *Phys. Rev. E* **79** 041106
- [11] Jiang J 2012 *Chin. Phys. Letters* **29** 050503
- [12] Bashkirtseva I A, Ryashko L B, Tsvetkov I N 2010 *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis* **17** 501

# Noise-induced intermittency in Hénon map and estimation of critical strength of noise\*

Guo Kong-Ming<sup>1)</sup> Jiang Jun<sup>2)†</sup>

1) (School of Electromechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

2) (State Key Laboratory for Strength and Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

( Received 12 May 2014; revised manuscript received 1 June 2014 )

## Abstract

In this paper noise-induced intermittency phenomenon in Hénon map is studied. Through numerical simulation and global analysis the mechanism of noise-induced intermittency in Hénon map is revealed. By using stochastic sensitivity function method to detect whether there will be collisions between confidence ellipse of periodic attractor and chaotic saddle, a method to estimate the critical strength of noise is proposed. Results show that the noise-induced intermittency in Hénon map is caused by interactions between cycle attractor and unstable manifold of chaotic saddle, whereas the stochastic sensitivity function method can estimate the critical noise strength in intermittency phenomenon accurately.

**Keywords:** noise-induced intermittency, transient chaos, stochastic sensitivity function

**PACS:** 05.45.-a

**DOI:** [10.7498/aps.63.190503](https://doi.org/10.7498/aps.63.190503)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (NSFC) (Grant No. 11332008), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Ministry of Education of China (Grant No. K5051304012).

† Corresponding author. E-mail: [jun.jiang@mail.xjtu.edu.cn](mailto:jun.jiang@mail.xjtu.edu.cn)