

亚表面异质缺陷对功能梯度材料表面温度场的影响*

马晓波[†] 王飞 陈德珍

(同济大学, 机械与能源工程学院, 上海 201804)

(2014年4月4日收到; 2014年5月23日收到修改稿)

基于双曲型热传导方程, 采用镜像法和波函数展开法, 求解了含亚表面异质圆柱缺陷的半无限功能梯度材料的表面温度场, 给出了功能梯度材料中热波散射的一般解. 分析了亚表面异质圆柱缺陷的几何参数(如埋藏深度)和热物理参数(如导热系数、热扩散长度、热扩散率及热弛豫时间等)对功能梯度材料表面温度场的影响. 温度波由调制的超短脉冲激光在功能梯度材料表面激发, 异质圆柱缺陷表面的边界条件为导热边界. 研究结果可望为功能梯度材料的红外热波无损检测、导热反问题提供计算方法和参考数据.

关键词: 功能梯度材料, 双曲型热传导方程, 表面温度场, 异质缺陷

PACS: 44.10.+i, 44.90.+c

DOI: 10.7498/aps.63.194401

1 引言

功能梯度材料(functionally graded material, FGM)是一种新型的复合材料, 其设计思想是通过连续控制材料各组分的含量分布, 弱化甚至消除各组分之间的界面, 使材料的宏观特性(如导热系数、比热和密度等)在空间位置上呈现梯度变化^[1,2]. FGM由于具有组成和显微结构梯度变化、适应环境和可设计的优点, 广泛应用于航天器热防护层和动力机械设备、核反应堆等的重要结构元件^[3], 功能梯度材料的可靠性就成为极其重要的问题.

红外热波无损检测技术常用于梯度材料的表征和安全评估^[4], 目前该技术常用超短脉冲激光作为热激励源. 在这种热作用时间短、瞬时热流密度高的极端热传导问题中, 傅里叶导热定律具有局限性, 而采用基于非傅里叶导热定律的双曲型热传导方程, 克服了热传播速度无限大假设的局限性^[5-7]. 国内外学者对傅里叶导热和非傅里叶导热问题做了详细的研究. Terron等^[8]基于傅里叶导热定律求解了含亚表面异质圆柱缺陷的材料的面

温度场的分布和相位变化. Atefi和Talaee^[9]基于非傅里叶导热定律, 采用分离变量法研究了稳态边界条件下无限长圆筒的温度场. Mishra等^[10]使用Boltzmann法求解了一维圆柱体和球体的非傅里叶热传导问题. Yu等^[11]等基于非傅里叶导热定律分别求解了不同热弛豫时间下均匀材料和功能梯度材料平板的热力耦合问题. Liu等^[12]将非傅里叶导热定律和热波模型应用在生物组织的温度场计算中, 得到生物组织在超声波辐照时要考虑热传播具有弛豫性的结论. Xu等^[13]利用非傅里叶导热定律和拉普拉斯变化详细求解了半无限介质的温度场问题. 赵伟涛等^[14]求解并分析了平板在任意周期表面热扰动作用下的非傅里叶热传导问题. 马晓波等^[15]基于非傅里叶导热定律给出了功能梯度材料亚表面圆球绝热缺陷的热波散射问题的一般解.

功能梯度材料(以金属陶瓷为例)在制备过程中经常会渗入SiO₂杂质^[16], 研究含杂质缺陷的功能梯度材料的表面温度场对材料的表征和安全评估具有重要意义. 本文基于非傅里叶导热定律, 采用双曲型热传导方程, 研究亚表面异质圆柱缺陷对

* 国家自然科学基金(批准号: 51276129)和高超声速冲压发动机技术重点实验室基金(批准号: 20130103007)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: maxiaobo-tj@163.com

功能梯度材料表面温度场的影响. 研究结果可望为梯度材料的红外热波无损检测提供计算方法和参考数据.

2 热波控制方程及其求解

研究介质为一个半无限的功能梯度材料结构, 其热物理特性在 x 方向上呈梯度变化. 半径为 a 的无限长圆柱杂质埋藏在距表面为 b 的深度上. 调制频率为 f 的周期超短脉冲激光沿 x 方向入射加热梯度材料表面, 导致物体内部形成热波过程, 如图 1 所示.

基于非傅里叶导热定律, 可以得到功能梯度材料内部的温度控制方程为

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right), \quad (1)$$

式中, T 为梯度材料介质内的温度; ∇ 为 Hamilton 算子, $\nabla = \frac{i\partial}{\partial x} + \frac{j\partial}{\partial y}$; λ , c_p , ρ 分别为功能梯度材料的导热系数 (W/(m·K))、定压比热 (J/(kg·K)) 和密度 (kg/m³); τ 为热弛豫时间 (ps).

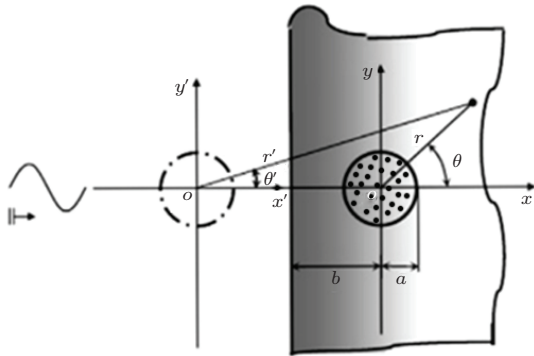


图 1 超短激光脉冲激励功能梯度材料示意图

梯度材料的密度和热弛豫时间设为常数, 导热系数和定压比热使用指数形式 [17,18]:

$$\begin{aligned} \lambda &= \text{Re}[\lambda_0 \exp(2\sigma x)]; \\ c_p &= \text{Re}[c_{p0} \exp(2\sigma x)], \end{aligned} \quad (2)$$

式中, λ_0 , c_{p0} 是复变量, 分别表示 $x = 0$ 时的复导热系数和复定压比热; σ 是材料的导热系数和比热的空间梯度分布参数, 用来表示材料的非均匀性, 复变量形式则为 $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$.

将 (2) 代入到 (1) 式中, 则可得如下方程:

$$\nabla^2 T + 2\sigma \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

式中, $D = \lambda/\rho c_p = \lambda_0/\rho c_{p0}$ 为常量, 表示物体的热扩散率 (m²/s); $c = \sqrt{D/\tau}$, 表示热波的传播速度 (m/s). 本文研究问题的周期稳态解, 设 $T = T_0 + \text{Re}[\vartheta \exp(-i\omega t)]$, 则温度控制方程 (3) 可化为如下形式:

$$\nabla^2 \vartheta + 2\sigma \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\omega}{D} \right) \vartheta = 0, \quad (4)$$

式中, T_0 为外界平均温度; ω 为圆频率, $\omega = 2\pi f$; $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位.

这样, 方程 (4) 的解为如下形式:

$$\vartheta = \exp(-\sigma x) u(x, y), \quad (5)$$

其中, 函数 $u(x, y)$ 满足如下方程:

$$\nabla^2 u + \kappa^2 u = 0, \quad (6)$$

式中,

$$\kappa = \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\omega}{D} - \sigma^2 \right)^{1/2} = \alpha + i\beta,$$

是波数的复变量表示; α , β 分别表示热波传播波数和吸收系数, 可取 $\alpha > 0, \beta > 0$, 即有

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{c^2} - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right]^2 + \left(\frac{\omega}{D} - 2\sigma_1\sigma_2 \right)^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right\}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{c^2} - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right]^2 + 4 \left(\frac{1}{\mu^2} - \sigma_1\sigma_2 \right)^2} + [k^2 - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)] \right\}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{c^2} - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right]^2 + \left(\frac{\omega}{D} - 2\sigma_1\sigma_2 \right)^2} - \frac{\omega^2}{c^2} + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right\}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{c^2} - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right]^2 + 4 \left(\frac{1}{\mu^2} - \sigma_1\sigma_2 \right)^2} - [k^2 - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)] \right\}}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $k = \omega/c$, 表示不考虑扩散效应时的热波波数. 当热波传播速度 $c \rightarrow \infty$ 和非均匀参数 $\sigma \rightarrow 0$ 时, $\alpha \rightarrow \sqrt{\omega/2D} = 1/\mu$, $\beta \rightarrow \sqrt{\omega/2D} = 1/\mu$, 热波波数则可简化为 $k = \alpha + i\beta \rightarrow (1 + i)/\mu$. 此时, 功能梯度材料基于非傅里叶导热定律的双曲型热传导方程退化为均匀材料基于傅里叶导热定律的抛物型热传导方程.

根据 (6), (7), (8) 式分析可得, 功能梯度材料中有

$$\vartheta e^{-i\omega t} = \vartheta_0 e^{-(\beta+\sigma_1)x} e^{i[(\alpha-\sigma_2)x-\omega t]}$$

形式的热波波动过程, 表示 x 方向上温度波的衰减振动幅值.

因此方程 (4) 所决定的功能梯度材料中热波散射场的一般解可描述为 [15]

$$\vartheta = \exp(-\sigma x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa r) \exp(in\theta), \quad (9)$$

式中, A_n 为亚表面圆柱缺陷产生的散射波模式系数, 由缺陷边界条件决定; $H_n^{(1)}(\cdot)$ 为复宗量第一类汉克尔 (Hankel) 函数.

3 热波入射的激发及总热波波场

热波由调制周期超短脉冲激光束在功能梯度材料表面激发, 设有一周期稳态热波在材料表面沿 x 轴正方向入射. 根据布洛赫 (Bloch) 波传播理论, 入射波可描述为

$$\begin{aligned} \vartheta_1^{(i)} &= \vartheta_0 \exp(-\sigma x) \exp(i\kappa b) \\ &\quad \times \exp[i(\kappa x - \omega t)] \\ &= \vartheta_0 \exp(-\sigma r \cos \theta) \exp(i\kappa b) \\ &\quad \times \exp[i(\kappa r \cos \theta - \omega t)], \end{aligned} \quad (10)$$

式中, ϑ_0 为热波入射的温度幅值; κ 为入射波的波数.

而半无限体边界的反射波可以用镜像法即虚拟镜像产生的散射波来描述. 对于虚拟镜像来说, 入射波沿 x' 轴负方向入射, 其表达式为

$$\begin{aligned} \vartheta_2^{(i)} &= \vartheta_0 \exp(\sigma x') \exp(i\kappa b) \exp[-i(\kappa x' + \omega t)] \\ &= \vartheta_0 \exp(\sigma r' \cos \theta') \exp(i\kappa b) \\ &\quad \times \exp[i(\kappa r' \cos \theta' + \omega t)]. \end{aligned} \quad (11)$$

在局部原像柱坐标系 (r, θ) 中亚表面圆柱产生的热波散射场为

$$\vartheta_1^{(s)} = \exp(-\sigma r \cos \theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa r)$$

$$\times \exp(in\theta) \exp(-i\omega t). \quad (12)$$

在局部镜像柱坐标系 (r', θ') 中镜像亚表面圆柱产生的热波散射场为

$$\begin{aligned} \vartheta_2^{(s)} &= \exp(\sigma r' \cos \theta') \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'_n H_n^{(1)}(\kappa r') \\ &\quad \times \exp(in\theta') \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (13)$$

式中, A_n, A'_n 分别为热波模式系数, 可以由亚表面缺陷的边界条件确定. 根据在边界面处

$$\vartheta_1^{(s)}(r, \theta) = \vartheta_2^{(s)}(r, \pi - \theta),$$

则可以得到 $A_n = A'_{-n}$.

根据格雷夫 (Graf) 加法定理 [19], 可将柱坐标系 (r', θ') 的热波表达式变换到 (r, θ) 中, 有如下关系:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} A'_n H_n^{(1)}(\kappa r') \exp(in\theta') \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} H_{m+n}^{(1)}(2\kappa b) \\ &\quad \times J_m(\kappa r) \exp(im\theta). \end{aligned} \quad (14)$$

$J_m(\cdot)$ 是贝塞尔 (Bessel) 函数.

这样, 梯度材料中热波总场应由入射场、散射场和边界面反射场叠加而成:

$$\vartheta = \vartheta_1^{(i)} + \vartheta_1^{(s)} + \vartheta_2^{(s)}. \quad (15)$$

功能梯度材料内异质圆柱缺陷简化为均匀材料, 故异质圆柱缺陷内的总热波波场为 [15]

$$\vartheta_{in} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(\kappa_0 r) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t), \quad (16)$$

式中, B_n 为异质圆柱缺陷的热波模式系数, κ_0 为异质圆柱缺陷内的热波波数,

$$\kappa_0 = \alpha_0 + i\beta_0;$$

$$\alpha_0 = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}k_0^4 + \frac{1}{\mu_0^4}} + \frac{1}{2}k_0^2};$$

$$\beta_0 = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}k_0^4 + \frac{1}{\mu_0^4}} - \frac{1}{2}k_0^2};$$

$$k_0 = k \left(\frac{D_0}{D} \right)^{-1/2} \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1/2};$$

τ, τ_0 分别是梯度材料和异质体的热弛豫时间; D, D_0 分别是梯度材料和异质体的热扩散率; $J_n(\cdot)$ 为贝塞尔 (Bessel) 函数.

研究亚表面圆柱缺陷的边界条件为导热边界. 异质缺陷与主材料的连接处应满足温度条件, 即温

度连续和热流密度连续, 用温度函数表示为如下形式:

$$\vartheta = \vartheta_{in}, \quad (17a)$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{n}} \right|_a = -\lambda_0 \left. \frac{\partial \vartheta_{in}}{\partial \mathbf{n}} \right|_a, \quad (17b)$$

式中, \mathbf{n} 表示亚表面圆柱缺陷的外法线方向.

4 热波模式系数的确定及温度分布

根据亚表面缺陷的边界条件确定热波模式系数. 将(15)和(16)式代入到(17)式中, 可以得到关于热波模式系数的无穷代数方程组

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n X_n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n Y_n = G, \quad (18a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n X_n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n Y_n = R, \quad (18b)$$

式中,

$$E_n = \exp(-\sigma a \cos \theta) H_n^{(1)}(\kappa a) e^{in\theta} + \exp(\sigma(a \cos \theta + 2b)) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} \times H_{m+n}^{(1)}(2\kappa b) J_m(\kappa a) e^{im\theta},$$

$$F_n = -J_n(\kappa_0 a) e^{in\theta},$$

$$P_n = \exp(-\sigma a \cos \theta) \times [(\sigma \cos \theta) H_n^{(1)}(\kappa a) - H_n^{(1)'}(\kappa a)] e^{in\theta} - \exp(\sigma(a \cos \theta + 2b)) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} H_{m+n}^{(1)}(2\kappa b) \times [(\sigma \cos \theta) J_m(\kappa a) + J_m'(\kappa a)] e^{im\theta},$$

$$Q_n = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) J_n'(\kappa_0 a) e^{in\theta},$$

$$G = -\vartheta_0 \exp[(i\kappa - \sigma)a \cos \theta + i\kappa b],$$

$$R = \vartheta_0 \exp[(i\kappa - \sigma)a \cos \theta + i\kappa b](i\kappa - \sigma) \cos \theta,$$

$$X_n = A_n, Y_n = B_n.$$

用 $e^{-is\theta}$ 乘以(18)式的两端, 并在区间 $(-\pi, \pi)$ 上积分, 可得如下无穷代数方程组

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{ns} X_n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{ns} Y_n = G_s, \quad (n, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (19a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{ns} X_n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_{ns} Y_n = R_s, \quad (n, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (19b)$$

式中,

$$E_{ns} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_n e^{-is\theta} d\theta,$$

$$F_{ns} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n e^{-is\theta} d\theta,$$

$$P_{ns} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n e^{-is\theta} d\theta,$$

$$Q_{ns} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n e^{-is\theta} d\theta,$$

$$G_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G e^{-is\theta} d\theta,$$

$$R_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R e^{-is\theta} d\theta.$$

在(19)式中, $E_{ns}, F_{ns}, P_{ns}, Q_{ns}$ 是 $s \times n$ 阶矩阵, X_n 和 Y_n 是 $s \times 1$ 阶矩阵, G_s 和 R_s 是 $s \times 1$ 阶常数矩阵, 即

$$\begin{Bmatrix} E_{ns} & F_{ns} \\ P_{ns} & Q_{ns} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_n \\ Y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_s \\ R_s \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

(20)式即为确定热波模式系数的矩阵方程.

这样, 功能梯度材料表面温度分布的表达式为

$$\vartheta = \exp(-\sigma r \cos \theta) \left[\vartheta_0 \exp(i\kappa(r \cos \theta + b)) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa r) \exp(in\theta) \right] + \exp(\sigma(r \cos \theta + 2b)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} \times A_n H_{m+n}^{(1)}(2\kappa b) J_m(\kappa r) e^{im\theta}, \quad (21)$$

式中,

$$r^2 = x^2 + y^2 = b^2 + y'^2,$$

$$\theta = \pi - \arctan(y/b); r' = r,$$

$$\theta' = \arctan(y'/b) = \arctan(y/b);$$

$$y = 0 - 4.$$

金属-陶瓷功能梯度材料和 SiO_2 的热物理参数见表 1.

取特征长度为亚表面圆柱的半径 a , 入射温度的幅值 $|\vartheta_0|$. 数值算例采用如下无量纲量: 无扩散行波波数 $ka=0.01-2.0$; 相对热扩散长度 $\mu/a=0.50-5.0$; 埋藏深度 $b/a=1.10-3.0$; 热弛豫时间比 $\tau_0/\tau=10-3500$; 导热系数比 $\lambda/\lambda_0=0.066-30$; 热扩散率比 $D/D_0=0.018-30$; 非均匀参数的实部和虚部分别是 $(\sigma_1 a)=0.01-1.0, (\sigma_2 a)=0.01-1.0$; 温度比 ϑ/ϑ_0 . 这时的无量纲复波数是 $\kappa a = \alpha a + i\beta a, \kappa_0 a = \alpha_0 a + i\beta_0 a$. 其中

$$\alpha a = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}[(ka)^2 - (\sigma_1 a)^2 + (\sigma_2 a)^2]^2 + \left[\left(\frac{a}{\mu}\right)^2 - (\sigma_1 a)(\sigma_2 a)\right]^2} + \frac{1}{2}[(ka)^2 - (\sigma_1 a)^2 + (\sigma_2 a)^2]},$$

$$\beta a = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}[(ka)^2 - (\sigma_1 a)^2 + (\sigma_2 a)^2]^2 + \left[\left(\frac{a}{\mu}\right)^2 - (\sigma_1 a)(\sigma_2 a)\right]^2} - \frac{1}{2}[(ka)^2 - (\sigma_1 a)^2 + (\sigma_2 a)^2]},$$

$$\alpha_0 a = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}(k_0 a)^4 + \left(\frac{a}{\mu_0}\right)^4} + \frac{1}{2}(k_0 a)^2}, \quad \beta_0 a = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}(k_0 a)^4 + \left(\frac{a}{\mu_0}\right)^4} - \frac{1}{2}(k_0 a)^2}.$$

表1 金属陶瓷功能梯度材料和二氧化硅的热物性参数 [11,16,20,21]

材料	参数	热弛豫时间 τ /ps	导热系数 λ /(W/(m·K))	比热容 C_p /(J/(kg·K))	密度 ρ /(kg/m ³)
金属陶瓷		0.005—0.144	1.78—37.411	411.7—989.5	3220—7800
二氧化硅		2.29—13.24	1.4—27	966	2200

5 数值算例

图2给出了含亚表面圆柱异质缺陷的材料表面温度变化曲线, 此时各参数取值 $f = 2$ Hz, $a = 0.65$ mm, $b = 0.69$ mm, $D = 18$ mm²/s, $D_0 = 0.1$ mm²/s, $\lambda = 60$ W·m⁻¹·K⁻¹, $\lambda_0 = 0.4$ W·m⁻¹·K⁻¹, 数值计算结果与文献 [8] 一致. 图3给出了 $y = 0$ 处梯度材料表面温度随波数的变化曲线, 各参数取值: $\sigma_1 a = 0.2$, $\sigma_2 a = 0$, $D/D_0 = 20$, $b/a = 2.0$, $\lambda/\lambda_0 = 20$, $\tau_0/\tau = 2500$. 从图3可以看出, 随着波数 ka 的增大, 温度的幅值整体呈增大趋势, 温度的波动性逐渐明显.

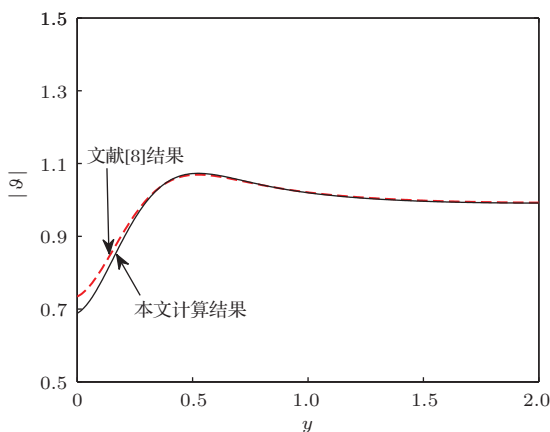


图2 材料表面温度分布

图4给出了梯度材料表面温度随波数的变化曲线, 各参数取值: $\sigma_2 a = 0$, $D/D_0 = 20$, $\mu/a = 1.0925$, $b/a = 1.12$, $\lambda/\lambda_0 = 20$, $\tau_0/\tau = 2500$. 其

中, 图4(a)中 $\sigma_1 a = -0.5$, 图4(b)中 $\sigma_1 a = 0.5$. 从图4可以看出, 材料中异质体的存在对材料表面温度的影响主要集中在异质体的正前方附近区域, 在远离异质体正前方处 ($y > 3$) 材料表面温度趋近于环境温度.

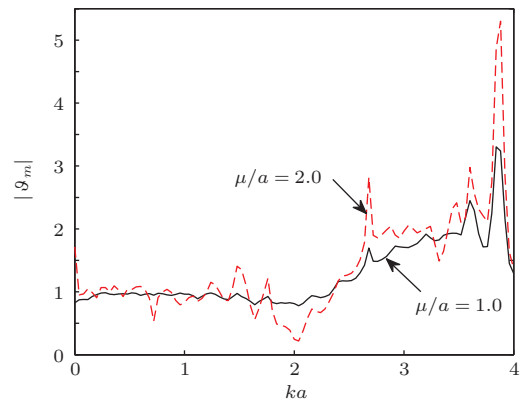


图3 材料 $y = 0$ 处温度随波数的变化

图5给出了梯度材料表面温度随非均匀参数的变化曲线, 各参数取值 $\sigma_2 a = 0$, $ka = 0.5$, $D/D_0 = 20$, $\mu/a = 1.0925$, $b/a = 1.12$, $\lambda/\lambda_0 = 20$, $\tau_0/\tau = 2500$. 从图5可以看出, 随着非均匀参数 σ_1 的增大, 材料的表面温度逐渐增大. 图6给出了 $y = 0$ 处梯度材料表面温度随非均匀参数 σ_1 和热扩散长度 μ/a 变化的曲线, 各参数取值 $\sigma_2 a = 0$, $ka = 0.5$, $D/D_0 = 20$, $b/a = 1.12$, $\lambda/\lambda_0 = 20$, $\tau_0/\tau = 2500$. 从图6可以看出, 当非均匀参数 $\sigma_1 < 0$ 时, 其对材料表面温度影响较小; 当 $\sigma_1 > 0$ 时, 随着非均匀参数 σ_1 的增大, 材料表面温度迅速显著增大.

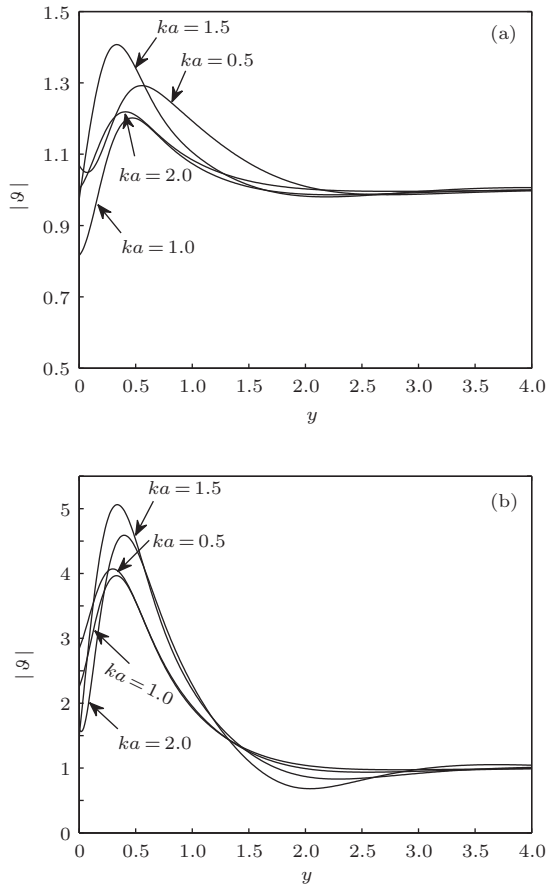


图4 不同波数影响下材料表面温度分布

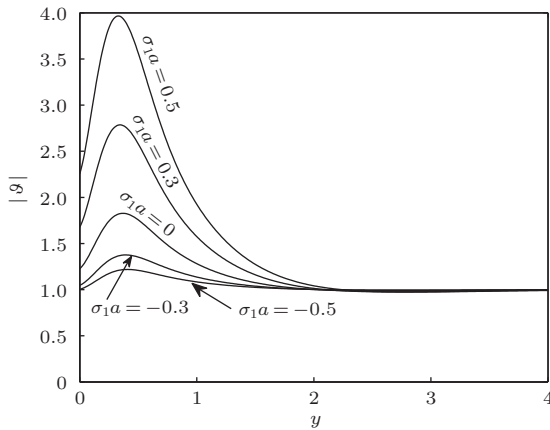


图5 材料表面温度分布随非均匀参数的变化

图7给出了梯度材料表面温度随埋藏深度的变化曲线,各参数取值 $\sigma_1 a = 0.5$, $\sigma_2 a = 0$, $ka = 1.0$, $D/D_0 = 20$, $\mu/a = 1.0925$, $\lambda/\lambda_0 = 20$, $\tau_0/\tau = 2500$.从图7可以看出,随着异质体埋藏深度的增加,材料表面温度及温度幅值随之减小.图8给出了梯度材料 $y = 0$ 处表面温度随埋藏深度的变化曲线,各参数取值 $\sigma_1 a = 0.5$, $\sigma_2 a = 0$, $D/D_0 = 20$, $\mu/a = 1.0925$, $\lambda/\lambda_0 = 20$,

$\tau_0/\tau = 2500$.从图8可以看出,随着异质体埋藏深度的增加,当入射波数较小时,材料在 $y = 0$ 处温度的波动性较弱;当入射波数较大($ka \geq 2.0$)时,材料在 $y = 0$ 处的温度波动性较强.即当异质体埋藏深度较大时,超短脉冲激光可能探测不到材料的亚表面缺陷.

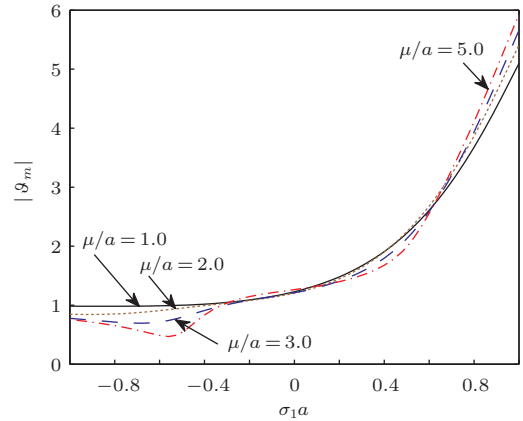


图6 材料 $y = 0$ 处温度随非均匀参数的变化

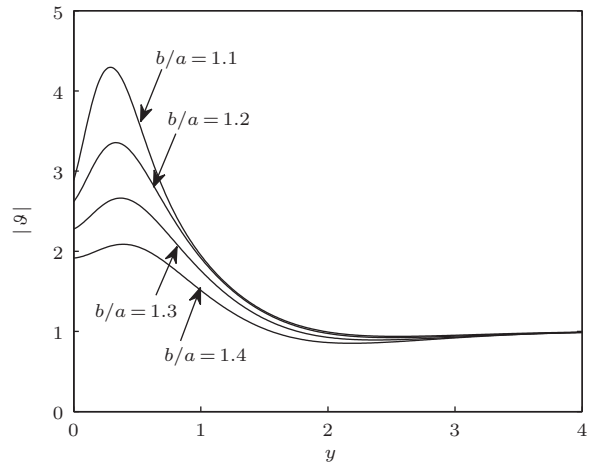


图7 材料表面温度随埋藏深度的变化

图9给出了梯度材料表面温度随热扩散长度的变化曲线,各参数取值 $\sigma_1 a = 0.5$, $\sigma_2 a = 0$, $ka = 1.0$, $D/D_0 = 20$, $b/a = 1.12$, $\lambda/\lambda_0 = 20$, $\tau_0/\tau = 2500$.从图9可以看出,随着热扩散长度 μ/a 的增大,材料表面温度的变化幅度和变化区域都随之增大.由于 $\mu = \sqrt{D/\pi f}$,故低频率的调制激光可以探测到较深的缺陷,但探测周期较长.图10给出了梯度材料表面温度随导热系数比的变化曲线,各参数取值 $\sigma_1 a = 0.5$, $\sigma_2 a = 0$, $ka = 1.0$, $D/D_0 = 20$, $\mu/a = 1.0925$, $b/a = 1.12$, $\tau_0/\tau = 2500$.从图10可以看出,导热系数比 λ/λ_0 的大小主要影响材料靠近异质体区域的温度幅值

的大小,对异质体正前方 $y = 0$ 处的温度影响较小.随着异质体导热系数的增加,异质体正前方材料表面温度增加.

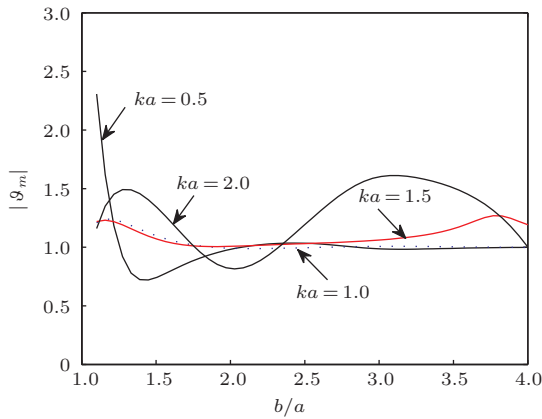


图8 材料 $y = 0$ 处温度随埋藏深度的变化

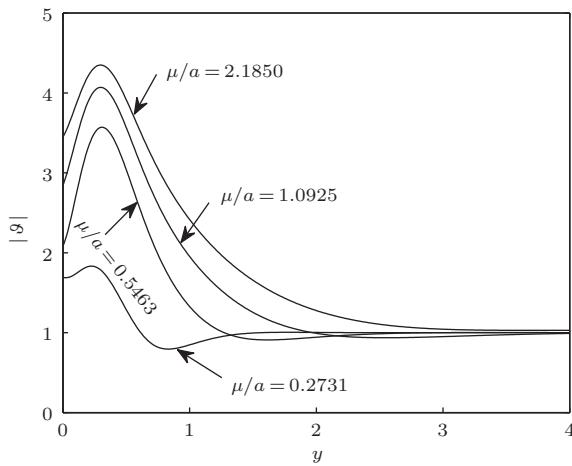


图9 材料表面温度随热扩散长度的变化

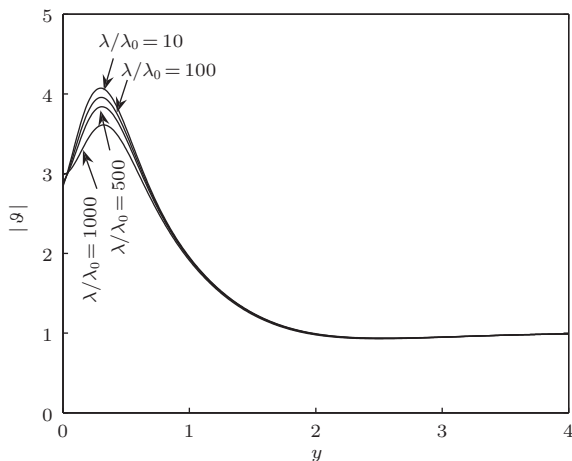


图10 材料表面温度随导热系数比的变化

图11给出了梯度材料表面温度随热扩散率比的变化曲线,各参数取值 $\sigma_1 a = 0.5$, $\sigma_2 a = 0$,

$ka = 1.0$, $\lambda/\lambda_0 = 20$, $\mu/a = 1.0925$, $b/a = 1.12$, $\tau_0/\tau = 2500$.从图11可以看出,随着热扩散率比 D/D_0 减小,即随着异质体热扩散率的增加,异质体正前方的材料表面温度增加.图12给出了梯度材料表面温度随热弛豫时间比的变化曲线,各参数取值 $\sigma_1 a = 0.5$, $\sigma_2 a = 0$, $ka = 1.0$, $\lambda/\lambda_0 = 20$, $\mu/a = 1.0925$, $b/a = 1.12$, $D/D_0 = 20$.从图12可以看出,随着热弛豫时间比 τ_0/τ 的增大,即随着异质体的热弛豫时间的增加,异质体正前方的材料表面温度会变小.

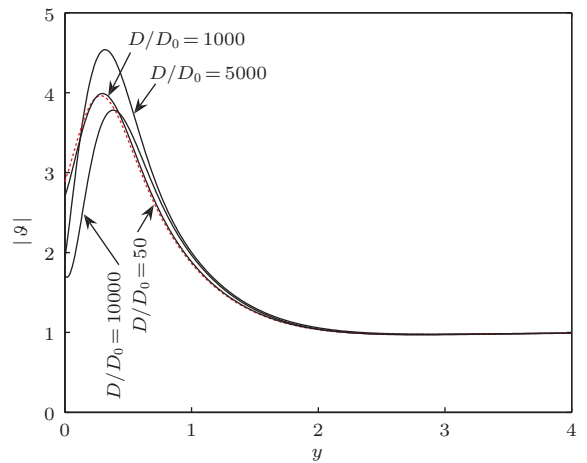


图11 材料表面温度随热扩散率比的变化

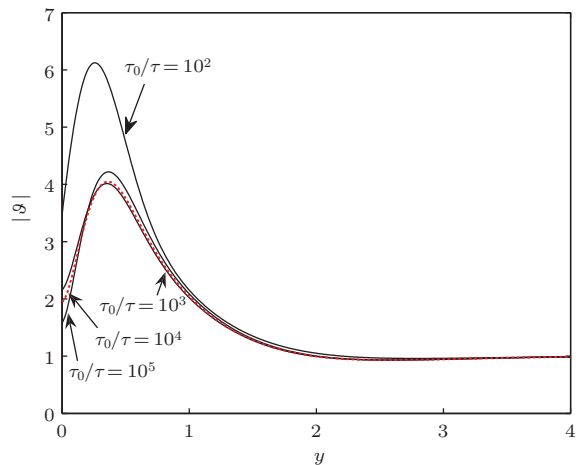


图12 材料表面温度随热弛豫时间比的变化

6 结论

基于非傅里叶导热定律和双曲型热传导方程,分析了亚表面异质圆柱缺陷对半无限功能梯度材料表面温度场的影响.得到以下结论:

- 1) 功能梯度材料亚表面圆柱异质体的存在主

要影响其正前方处材料的表面温度, 远离异质体正前方区域的温度趋近于环境温度, 因此可以通过材料表面温度的变化, 判定材料亚表面是否含有异质缺陷.

2) 功能梯度材料的非均匀参数对材料表面温度分布影响较大, 特别是当非均匀参数大于零时, 随着非均匀参数的增大, 材料表面温度的幅值随之显著增大, 对材料表面温度影响较明显.

3) 异质体的热物理参数(导热系数、热扩散长度、热扩散率和热弛豫时间)对材料表面温度有较大的影响, 即当材料亚表面存在异质缺陷时会影响材料表面温度的幅值大小.

4) 当材料亚表面缺陷埋藏深度较大时, 材料表面温度分布趋近于环境温度, 即当异质体埋藏深度较大时, 超短脉冲激光可能探测不到材料的亚表面缺陷.

当材料内部含有缺陷时, 热波会在缺陷与材料表面之间发生多重散射, 对材料的表面温度产生影响. 通过红外热波无损检测系统测量材料表面温度的变化, 可获取材料亚表面的缺陷情况达到检测和探伤目的. 研究成果可望为功能梯度材料的红外热波无损检测、导热反问题提供计算方法和参考数据.

参考文献

- [1] Asemi K, Ashrafi H, Salehi M, Shariyat 2013 *Acta Mech.* **224** 1849
- [2] Li Q H, Chen S S, Zeng J H 2013 *Chin. Phys. B* **22** 120204
- [3] Akbarzadeh A H, Chen Z T 2012 *Int. J. Thermophys.* **33** 1100
- [4] Chen D P, Xing C F, Zhang Z, Zhang C L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 024202 (in Chinese) [陈大鹏, 邢春飞, 张铮, 张存林 2012 物理学报 **61** 024202]
- [5] Wang Y Z, Song X N 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 234601 (in Chinese) [王颖泽, 宋新南 2012 物理学报 **61** 234601]
- [6] Guo Z Y, Cao B Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4273
- [7] Cattaneo C 1958 *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* **3** 83
- [8] Terron J M, Sanchez-Lavega A, Salazar A 2001 *J. Appl. Phys.* **89** 5696
- [9] Atefi G, Talaei M R 2011 *Arch. Appl. Mech.* **81** 569
- [10] Mishra S C, Sahai H 2012 *Int. J. Heat Mass Transfer* **55** 7015
- [11] Yu J G, Wu B, He C F 2010 *Int. J. Eng. Sci.* **48** 1709
- [12] Liu X Z, Zhu Y, Zhang F, Gong X F 2013 *Chin. Phys. B* **22** 024301
- [13] Xu H Y, Qi H T, Jiang X Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 014401
- [14] Zhao W T, Wu J H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 184401 (in Chinese) [赵伟涛, 吴九汇 2013 物理学报 **62** 184401]
- [15] Ma X B, Tan H P 2006 *J. Funct. Mater.* **37** 1507 (in Chinese) [马晓波, 谈和平 2006 功能材料 **37** 1507]
- [16] Bakkali A, Azrar L, Aljinaidi A A 2013 *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* **24** 1754
- [17] Gray L J, Kaplan T, Richardson J D 2003 *J. Appl. Mech.-T. ASME* **70** 543
- [18] Sutradhar A, Paulino G H, Gray L J 2002 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **26** 119
- [19] Wang Z X, Guo D R 1979 *Special Functions* (Beijing: Science Press) pp437-438 (in Chinese) [王竹溪, 郭敦仁 2003 特殊函数概论 (北京: 科学出版社) 第 437—438 页]
- [20] Wu Q R, Wu J Q 1996 *J. Inorg. Mater.* **2** 343 (in Chinese) [吴清仁, 吴建青 1996 无机材料学报 **2** 343]
- [21] Wu Q R, Liu Z Q 2003 *Thermal Physics of Inorganic functional materials* (Guangzhou: South China University of Technology Press) pp108-420 (in Chinese) [吴清仁, 刘镇群 2003 无机功能材料热物理 (广州: 华南理工大学出版社) 第 108—420 页]

Influence of inclusion in functionally graded materials on the surface temperature distributions*

Ma Xiao-Bo[†] Wang Fei Chen De-Zhen

(School of Mechanical Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

(Received 4 April 2014; revised manuscript received 23 May 2014)

Abstract

In this paper, based on the hyperbolic equation of heat conduction, utilizing the image method and the wave function expansion method, the temperature distributions on the surface of a functionally graded material (FGM) containing a cylindrical inclusion are investigated. According to the model of thermal waves, a general solution of scattered fields of thermal waves is obtained. Effects of different physical parameters (such as the depth of buried inclusion, the thermal conductivity, the thermal diffusion length, the thermal diffusivity, and the thermal relaxation time) on the distribution of temperature are analyzed. The thermal waves are excited on the surface of the FGM by a periodically modulated laser. A cylindrical defect is taken as an inclusion under a thermal conduction condition. Results are expected to provide calculation methods and reference data for infrared thermal wave nondestructive evaluation of an FGM and the inverse problems in mathematical physics.

Keywords: functionally graded material, hyperbolic equation of heat conduction, temperature distributions, cylindrical inclusion

PACS: 44.10.+i, 44.90.+c

DOI: [10.7498/aps.63.194401](https://doi.org/10.7498/aps.63.194401)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51276129), and the Open Project of the State Key Engine Laboratory of Aerospace Engineering (Grant No. 20130103007).

[†] Corresponding author. E-mail: maxiaobo-tj@163.com