

# 基于中国余数定理的欠采样下余弦信号的频率估计\*

黄翔东 丁道贤<sup>†</sup> 南楠 王兆华

(天津大学电子信息工程学院, 天津 300072)

(2014年4月25日收到; 2014年5月22日收到修改稿)

基于中国余数定理的重构算法的信号频率估计是近年来信号处理、电磁学以及光学等领域的前沿问题, 但目前这些研究仅限于对复指数信号做粗略频率估计. 因而, 本文把基于中国余数定理的频率估计从复指数信号粗估计拓展到实余弦信号精细估计领域, 其所提出的估计方案处理过程如下: 1) 对高频余弦波形进行过零点检测, 确定信号的相位信息; 2) 对各路欠采样信号做快速傅里叶变换, 并借助Candan估计器对各路谱峰值做频率校正以获取高精度余数估计, 基于此算出频偏值以做相位校正; 3) 用提出的基于相位特征分类方法对校正得到的余数做筛选; 4) 将筛选出的频率余数代入闭合形式的中国余数定理得到原信号频率的高精度估计. 此外, 本文还推导出了频率估计方差的理论表达式. 数据模拟实验验证了该表达式的正确性, 实验结果还反映了本文提出的方案具有高精度和高抗噪性能.

**关键词:** 中国余数定理, 欠采样, 频率估计, 余数筛选

**PACS:** 84.40.Ua, 43.58.Kr, 02.10.De, 43.60.Dh

**DOI:** 10.7498/aps.63.198403

## 1 引言

频率估计<sup>[1-9]</sup>在信号处理, 电磁学以及光学等领域一直是关键问题, 并因此产生了多种频率估计算法. 然而欠采样(即采样速率 $f_s$ 远小于2倍信号频率 $f_0$ )下的高精度频率估计一直是个难题, 因为奈奎斯特定理要求一个信号周期内采到2个以上样点, 随着信号频率升高, 必然要求其采样速率相应升高, 这就会对模数转换器(analog to digital converter, ADC)的转换速率、功耗以及硬件成本提出更高要求, 在某些特定场合(如 $f_s > 10^9$  samples/s的采样), 甚至是不可实现的. 从而只有引入信号处理新方法, 才能根本解决该问题.

为解决欠采样高频频率估计问题, 文献[10, 11]将古老的中国余数定理(chinese remainder theorem, CRT)引入该领域. CRT可解决这样一个问题: 为重构某未知整数 $N$ , 仅利用一组相互之间满

足互素关系的整数模值:  $M_1, \dots, M_L$ , 及相应的余数 $r_i$ (即满足 $r_i = N \bmod M_i, i = 1, \dots, L$ , ‘mod’表示模除操作)来估计 $N$ .

CRT重构算法主要分为两类: 余数数目冗余方法<sup>[1,12,13]</sup>和余数冗余方法<sup>[5,6,14-16]</sup>. 其中后者非常适用于欠采样速率估计, 特别是文献[16]提出新的余数冗余方法——闭合形式的CRT重构法是目前实现欠采样速率估计的最佳CRT算法, 这是因为该方法放宽了经典CRT要求 $L$ 个模值 $M_1—M_L$ 互素的限制, 允许其最大公约数(greatest common divider, gcd) $M = \text{gcd}\{M_1, \dots, M_L\}$ 为不等于1的正整数, 且文献[16]将CRT重构对象从整数域推广到整个实数域, 该方法对余数误差具有很高的鲁棒性. 故该方法已用于各种欠采样复指数频率估计场合(如合成孔径雷达系统的解相<sup>[4,6]</sup>等).

然而还未见文献报道解决欠采样下的实数余弦信号的频率估计问题. 因为该问题难度在于: 单频实余弦信号包含两个复指数谱成分, 每个成分都

\* 天津市应用基础及前沿技术研究计划重点项目(批准号: 10JCZDJC16100)和国家自然科学基金(批准号: 61271322)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: [ddx12316@163.com](mailto:ddx12316@163.com)

对应1个FFT(快速傅里叶变换, fast Fourier transform)谱峰, 故做  $L$  路FFT谱峰搜索后, 必然产生  $2L$  个余数, 怎样从中挑选出CRT所需的  $L$  个余数是个非常棘手的问题. 本文提出采用FFT谱相位校正作为余数筛选工具来解决该问题, 并结合闭合形式的CRT, 完成欠采样余弦信号频率估计.

此外需指出, 文献[4, 6]的CRT余数值是仅依据FFT谱峰搜索得到的, 由于FFT具有栅栏效应, 必然使得余数只能精确到整数倍的FFT频率分辨率, 不可避免会产生余数误差而降低估计精度. 故本文提出引入Candan内插估计器[17,18]将余数估计精确到小数而提高估计精度. 基于此还推导出最终的频率估计方差的理论表达式. 仿真实验验证了该表达式的正确性.

## 2 频率估计原理

### 2.1 余弦信号的CRT模型

对于高频余弦信号

$$x(t) = a \cdot \cos(2\pi f_0 t + \theta_0), \quad (1)$$

其中  $f_0$  为待测频率,  $\theta_0$  为初始相位. 对其做  $L$  路欠采样, 采样速率分别为  $f_{s1} \sim f_{sL}$ , 且  $f_{s1} \sim f_{sL}$  具有最大公约数  $N = \text{gcd}\{f_{s1}, \dots, f_{sL}\}$ . 为方便后续CRT重构, 每路采集  $N$  个样点, 从而各路采样信号为

$$x_i(n) = a \cdot \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_{si}} n + \theta_0\right), \quad n = 0, \dots, N-1; i = 1, \dots, L. \quad (2)$$

从而各路频率  $f_i$  与原信号频率  $f_0$  和采样速率  $f_{si}$  的关系可表示为

$$f_i = \frac{f_0}{f_{si}} = n_i + \frac{k_i}{N} + \frac{\delta_i}{N}, \quad 1 \leq i \leq L, \quad (3)$$

其中  $n_i$  是未知的折叠整数,  $k_i$  是从FFT峰值谱位置直接获取的整数,  $\delta_i$  是未知的小数, 满足

$$|\delta_i| \leq 0.5. \quad (4)$$

(3)式可以变形为

$$f_0 = n_i \cdot f_{si} + \frac{(k_i + \delta_i)}{N} \cdot f_{si}, \quad 1 \leq i \leq L. \quad (5)$$

观察(5)式可以发现, (3)式中的频率估计问题实质上就是CRT重构问题: 其中采样速率  $f_{si}$  对应于余数定理中的模值, 第二项则对应于CRT的余数值, 即

$$r_i = \frac{(k_i + \delta_i)}{N} \cdot f_{si}, \quad 1 \leq i \leq L. \quad (6)$$

从而余数集如下:

$$r = \{r_1, \dots, r_L\}. \quad (7)$$

从(5)式可看出,  $f_0$  取决于整数  $k_i$  和小数  $\delta_i$  的估计结果. 由于  $k_i$  可从FFT峰值谱直接获得, 而小数  $\delta_i$  无法直接确定. 因而本文提出引入谱校正求出  $\delta_i$ , 以提高频率估计的精度(文献[4]因舍弃了  $\delta_i$ , 而影响了频率估计精度).

### 2.2 频率估计方案

结合以上余弦信号CRT模型, 本文提出如图1所示的频率估计方案.

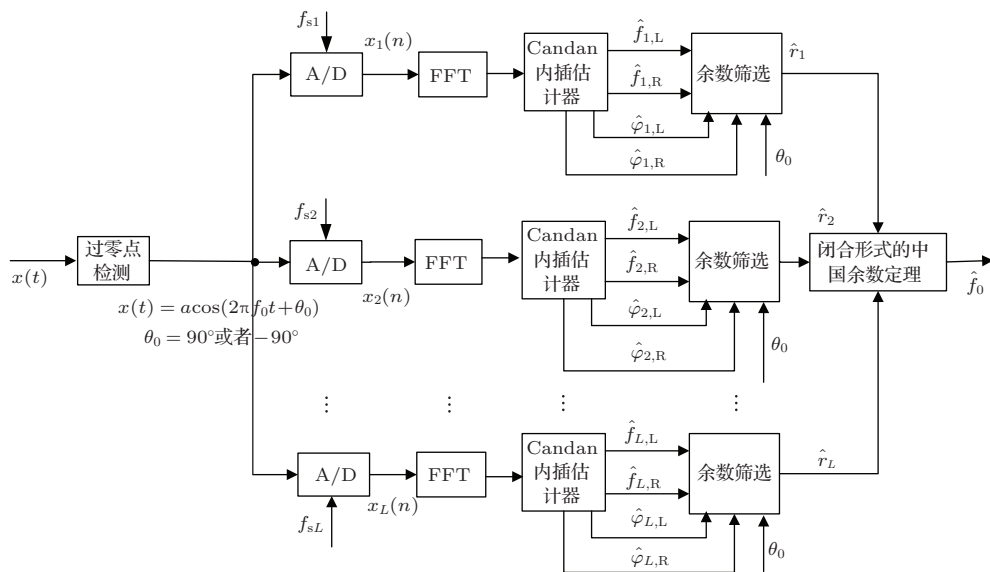


图1 频率估计方案

图 1 的处理步骤如下:

**步骤 1** 对高频模拟信号  $x(t)$  做过零点检测, 任取某过零点作为起始采样位置; 分别以  $L$  路欠采样速率  $f_{s1} \sim f_{sL}$  对  $x(t)$  做并行采样, 每路均采集  $N$  个样点.

**步骤 2** 对  $L$  路欠采样信号分别做 FFT; 用 Candan 估计器对各路 FFT 谱峰值做频率校正, 得到  $L$  对频率估计值  $\{\hat{f}_{i,L}, \hat{f}_{i,R}\}$  以及相应的相位校正正值  $\{\hat{\varphi}_{i,L}, \hat{\varphi}_{i,R}\}, (i = 1, \dots, L)$ .

**步骤 3** 余数筛选: 用过零点初始相位  $\theta_0$  做参考, 与每个相位对  $\{\hat{\varphi}_{i,L}, \hat{\varphi}_{i,R}\}$  做逐个比较, 以方便从每对频率估计值  $\{\hat{f}_{i,L}, \hat{f}_{i,R}\}$  中筛选出 1 个, 并将其转化为余数输出  $\hat{r}_i (i = 1, \dots, L)$ .

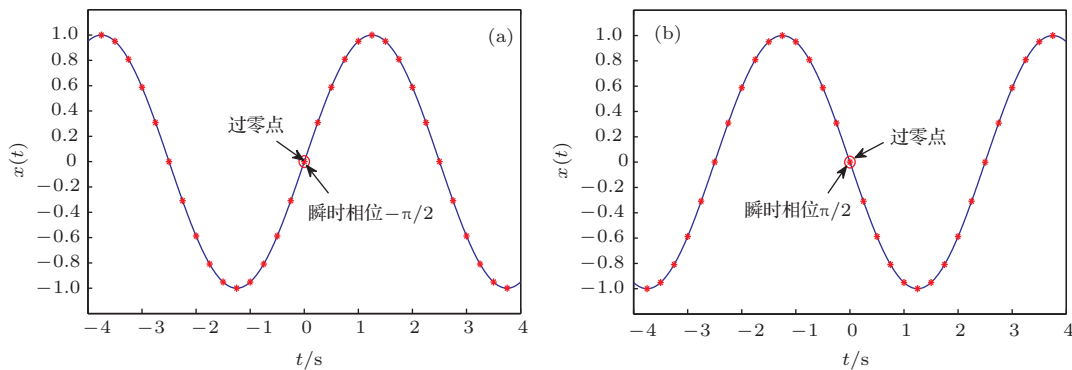


图 2 过零点检测示例 (a) 负波形到正波形过零; (b) 正波形到负波形过零

过零点处  $-\pi/2$  或  $\pi/2$  的瞬间相位值, 为后面的余数筛选提供相位参考. 而过零点类型很容易确定, 工程上仅需借助简单的触发电路即可实现.

### 3.2 谱校正

#### 3.2.1 引入谱校正的原因

本文的谱校正既包括频率校正, 又包括相位校正, 谱校正是非常重要的步骤, 出于以下两方面考虑而引入:

1) 为 CRT 提供精确的余数. 如 (3) 式所述, 由于 FFT 的栅栏效应, 若不做谱校正, 从各路 FFT 得到的频率估计值只能精确到整数  $k_i$ , 而丢弃小数  $\delta_i$ , 这必然导致无法提供精确的 CRT 余数. 因而必须做频率校正.

2) 为余数筛选提供准确相位信息. 如前所述, 余弦信号的欠采样频率估计必然涉及从每路 FFT 的两个谱峰中筛选出 1 个谱峰的问题, 而筛选依据就是相位信息. 同样由于 FFT 的栅栏效应, 直接从谱峰上获得的相位值是有误差的. 因而必须做相位

**步骤 4** 结合闭合形式的中国余数定理对筛选出的频率余数进行处理得到原信号频率的高精度估计  $\hat{f}_0$ .

下面对以上各子过程的方法与原理做详细分析.

## 3 频率估计子过程分析

### 3.1 过零点检测

对输入的模拟余弦信号  $x(t)$  而言, 过零点存在如图 2 所示的两种情况.

图 2(a) 对应的过零点瞬间相位为  $-\pi/2$ , 图 2(b) 对应的过零点瞬间相位为  $\pi/2$ .

校正.

为此, 下面以一实例来具体解释以上引入原因.

#### 3.2.2 直接 FFT 谱分析结果

例 1 直接对  $x(t) = 2\cos(2\pi f_0 t - \pi/2)$ ,  $f_0 = 1.5744 \times 10^3$  Hz, 以  $L=3$  路欠采样速率  $f_{s1} = 128$  Hz,  $f_{s2} = 192$  Hz,  $f_{s3} = 320$  Hz 做采样, 并且对每路采集到的  $N = \text{gcd}\{f_{s1}, f_{s2}, f_{s3}\} = 64$  个样点做 FFT, 其幅度谱和相位谱如图 3 所示.

由于各路都为单频余弦信号, 因而每路 FFT 峰值谱  $k=k^*$  (包括两个中心对称的峰值谱) 处的谱值包含信号全部信息, 其峰值幅度谱  $F_i(k^*)$  和相位谱  $\varphi_i(k^*)$  如表 1 所示.

从图 3 和表 1, 可发现直接由 FFT 获得的幅度谱和相位谱存在如下问题:

1) 幅度谱存在泄漏. 因受栅栏效应影响, 其频率估计只能精确到整数  $k^*$  倍的 FFT 频率精度上, 这必然给后续 CRT 重构带来余数误差.

表1 各路FFT谱峰值位置的相位值(过零点瞬间相位:  $-90^\circ$ )

信号路数	$i = 1$		$i = 2$		$i = 3$	
峰值位置 $k^*$	19	45	13	51	5	59
相位值 $\varphi_i(k^*)/(\circ)$	-54.9120	54.9120	-125.0880	125.0880	111.4407	-111.4407

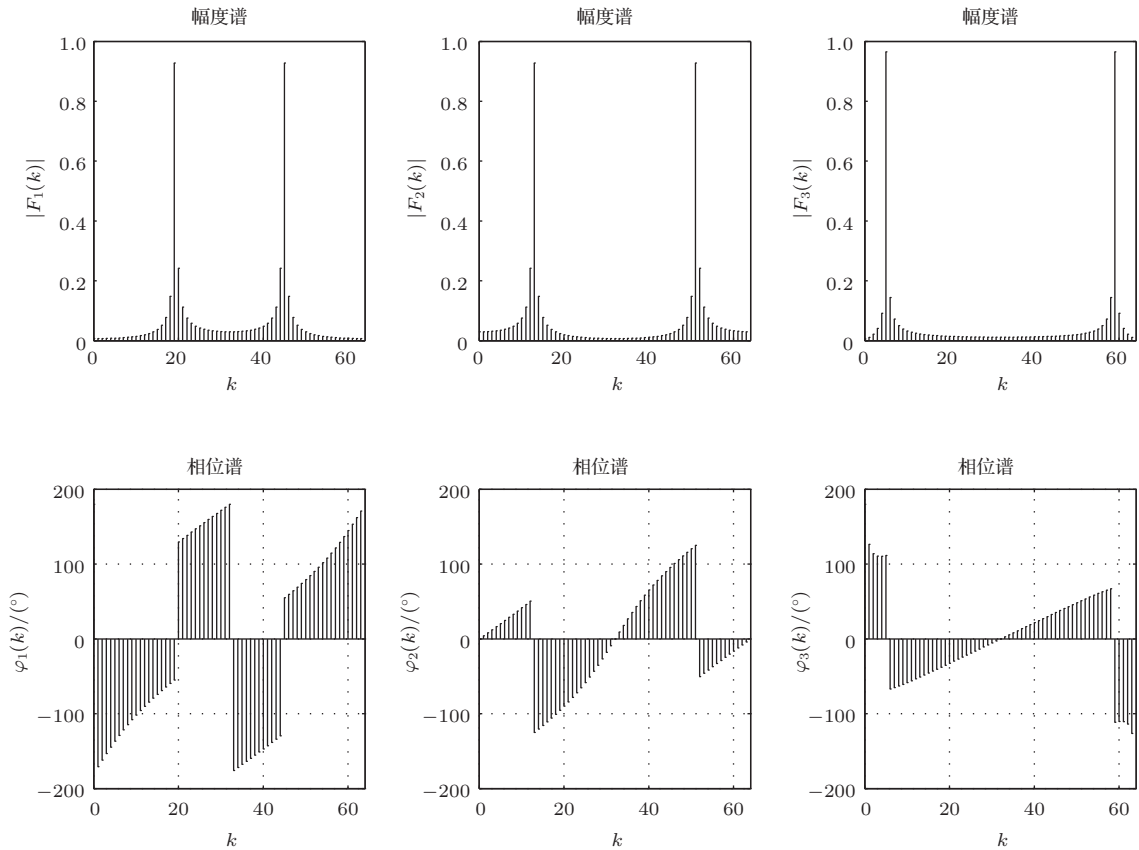


图3 每路采样信号的FFT分析谱图

2) 峰值谱的相位值很紊乱, 不等于真实相位值  $-90^\circ$ . 无法直接从  $2L$  个  $\varphi_i(k^*)$  值中, 筛选出 CRT 所需的  $L$  个余数位置.

因而需要引入谱校正解决以上两个问题.

### 3.2.3 基于Candan内插估计器的谱校正

本文用Candan内插估计器<sup>[17,18]</sup>对各路频率进行校正, 再利用频率校正获得的频偏值  $\hat{\delta}_i (i = 1, \dots, L)$ , 对相位做校正. 其校正流程如下所示:

**步骤1** 对样本做点数为  $N$  的FFT, 得到幅度谱  $F_i(k)$  和相位谱  $\varphi_i(k)$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ .

**步骤2** 利用  $k_i = k_i^*$  处峰值谱与左右两根旁谱线对频率偏差值<sup>[17,18]</sup>  $\hat{\delta}_i$  按下式作估计:

$$\hat{\delta}_i = \frac{\tan(\pi/N)}{\pi/N}$$

$$\times \text{Real} \left\{ \frac{F_i(k_i^* - 1) - F_i(k_i^* + 1)}{2F_i(k_i^*) - F_i(k_i^* - 1) - F_i(k_i^* + 1)} \right\}. \quad (8)$$

**步骤3** 根据频偏值  $\hat{\delta}_i$  进行频率校正和相位校正, 其校正后的归一化频率  $\hat{f}_i$  和相位估计  $\hat{\varphi}_i$  值<sup>[19]</sup> 分别为

$$\hat{f}_i = (k_i^* + \hat{\delta}_i)/N, \quad (9)$$

$$\hat{\varphi}_i = \varphi_i(k_i^*) - \frac{N-1}{N} \cdot \hat{\delta}_i \cdot \pi. \quad (10)$$

经过以上校正处理后, 则可计算出对应的CRT余数估计值为

$$\hat{r}_i = (k_i^* + \hat{\delta}_i) \cdot f_{si}/N, \quad i = 1, \dots, L. \quad (11)$$

需指出, 如前所述, 由于每路余弦信号FFT存在两个中心对称的峰值谱位置  $k_i^*$ , 这就决定由(11)式必然可算出两个余数估计值  $\hat{r}_i$  (其中只有1个为

CRT所需). 因此, 本文提出利用(10)式的相位校正结果做余数筛选.

### 3.3 基于相位校正的余数筛选

为说明余数筛选原理, 将(1)式的余弦信号表示为

$$x(t) = a \cdot \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) = a \cdot e^{j(2\pi f_0 t + \theta_0)} + a \cdot e^{-j(2\pi f_0 t + \theta_0)}. \quad (12)$$

从(12)式可看出, 理想情况下两峰值谱的相位值互为相反数, 即对应为两个聚类中心(其中 $\theta_0$ 对应过零点相位的聚类中心), 故仅需对校正后的相位值做分类判断, 即可完成余数筛选. 具体步骤如下:

- 1) 由过零点过渡情况, 确定过零点的瞬间相位 $\theta_0(+90^\circ$ 或 $-90^\circ)$ ;
- 2) 从每路两个相位校正中, 筛选出其中与过零点瞬间相位接近的相位值, 并记录其所处的半边频带(左半频带或右半频带).
- 3) 取出所筛选出的半边频带上的余数估计值作为CRT余数.

同样对于例1信号, 根据3.2节的谱校正得到的相位估计值分别为:  $\varphi_1(19) = -90.3228^\circ$ ,  $\varphi_1(45) = 90.3228^\circ$ ,  $\varphi_2(13) = -89.6772^\circ$ ,  $\varphi_2(51) = 89.6772^\circ$ ,  $\varphi_3(5) = 90.3434^\circ$ ,  $\varphi_3(59) = -90.3434^\circ$ . 本例中过零点初始相位为 $-90^\circ$ , 则筛选出的3路峰值谱位置分别为 $k_1^* = 19$ (左半频带),  $k_2^* = 13$ (左半频带),  $k_3^* = 59$ (右半频带), 对应的余数估计值为 $\hat{r}_1 = 38.3997$  Hz,  $\hat{r}_2 = 38.4005$  Hz,  $\hat{r}_3 = 294.4047$  Hz.

### 3.4 闭合形式中国余数定理处理过程

根据文献[16]提出的闭合形式的中国余数定理, 利用筛选出的余数估计值 $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_L$ , 以FFT点数 $N = \text{gcd}\{f_{s1}, \dots, f_{sL}\}$ 作为CRT所需的公约数, 以各路采样速率 $f_{s1}, \dots, f_{sL}$ 作为CRT所需的模值(相应的 $L$ 个互素整数为 $\Gamma_i = f_{si}/N, i = 1, \dots, L$ ). 则按照如下闭合形式的中国余数定理的算法步骤, 估计出高频信号频率值.

**步骤1** 从所给的余数 $\hat{r}_i, (1 \leq i \leq L)$ 计算参数 $\hat{q}_i, 2 \leq i \leq L$ 其中

$$\hat{q}_i = \left[ \frac{\hat{r}_i - \hat{r}_1}{N} \right], \quad 2 \leq i \leq L. \quad (13)$$

**步骤2** 计算 $\hat{q}_{i,1} \bar{\Gamma}_{i,1}$ 模除 $\Gamma_i$ 的余数:

$$\hat{\xi}_{i,1} = \hat{q}_{i,1} \bar{\Gamma}_{i,1} \bmod \Gamma_i, \quad 2 \leq i \leq L, \quad (14)$$

其中,  $\bar{\Gamma}_{i,1}$ 是 $\Gamma_1$ 关于 $\Gamma_i$ 的模逆, 可以提前算出.

**步骤3** 计算折叠整数 $\hat{n}_1$ 为

$$\hat{n}_1 = \sum_{i=2}^L \hat{\xi}_{i,1} b_{i,1} \frac{\gamma_1}{\Gamma_i} \bmod \gamma_1, \quad (15)$$

其中 $b_{i,1}$ 是 $\frac{\gamma_1}{\Gamma_i}$ 关于 $\Gamma_i$ 的模逆, 且 $\gamma_1$ 由

$$\gamma_i = \Gamma_1 \cdots \Gamma_{i-1} \Gamma_{i+1} \cdots \Gamma_L = \Gamma / \Gamma_i$$

定义, 其中 $\Gamma = \Gamma_1 \cdots \Gamma_L$ .

**步骤4** 计算其他折叠整数 $\hat{n}_i (2 \leq i \leq L)$ 为

$$\hat{n}_i = \frac{\hat{n}_1 \Gamma_1 - \hat{q}_{i,1}}{\Gamma_i}. \quad (16)$$

**步骤5** 计算各路高频估计值 $\hat{f}_{0i}, 1 \leq i \leq L$ , 取其平均作为最终频率估计 $\hat{f}_0$ , 即

$$\hat{f}_{0i} = \hat{n}_i N \Gamma_i + \hat{r}_i, \quad 1 \leq i \leq L, \quad (17)$$

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \hat{f}_{0i}. \quad (18)$$

文献[16]指出, 基于中国余数定理的最大可测频率为 $f_{\max} = \text{lcm}(f_{s1}, \dots, f_{sL})$ , 其中lcm (least common multiplier) 为最小公倍数.

例如, 将3.3节中筛选出的3个余数筛选值( $\hat{r}_1 = 38.3997, \hat{r}_2 = 38.4005, \hat{r}_3 = 294.4047$ )、公约数 $N = 64$ 及其3路模值( $f_{s1} = 128, f_{s2} = 192, f_{s3} = 320$ )代入以上CRT重构过程, 可得出重构值为 $1.5744 \times 10^3$  Hz.

## 4 性能分析

对于无噪情况, 本文引入相对误差来衡量估计精度; 对于有噪情况, 本文引入测量方差来衡量估计精度, 并且还推导出了测量方差的理论表达式. 其中, 相对误差定义如下:

$$\beta = \frac{|\hat{f}_0 - f_0|}{f_0} \times 100\%. \quad (19)$$

对于有噪情况, 由于(18)式的最终频率估计为各路CRT频率估计的平均, 而(17)式表明各路CRT频率估计又取决于各路余数估计, 另外, 各路余数是通过Candan频率估计器得到, 而从文献[18]易推知, 由Candan频率估计器算出的各路欠采样余数估计的方差表达式为( $i = 1, \dots, L$ )

$$\text{var}(\hat{r}_i) = \frac{[\tan^2(\pi/N) + 3 \tan^2(\pi \delta_i / N)]}{2\pi^2 \cdot N \cdot \rho} f_{si}^2, \quad (20)$$

其中  $\delta_i$  为各路频偏,  $\rho$  为如下式所示的信噪比:

$$\rho = 10^{\text{SNR}/10}, \quad (21)$$

其中 SNR 是以分贝 (dB) 为单位的信噪比. 故联立 (18) 式与 (20) 式, 并结合各路测量的相互独立性, 可推出最终频率估计  $\hat{f}_0$  的理论方差表达式为

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{f}_0) &= \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^L \text{var}(\hat{r}_i) \\ &= \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^L \frac{[\tan^2(\pi/N) + 3 \tan^2(\pi\delta_i/N)] f_{s_i}^2}{2\pi^2 \cdot N \cdot \rho}. \end{aligned} \quad (22)$$

下节仿真实验可验证 (22) 式的正确性.

## 5 仿真实验

### 5.1 无噪声情况下频率估计的相对误差计算

**实验 1** 选取待测的高频余弦信号为

$$x(t) = 2\cos(2\pi f_0 t - \pi/2),$$

令最大公约数  $N = 1024$ . 选用如下  $L = 3$  路的欠采样速率:  $f_{s1} = 2048$  Hz,  $f_{s2} = 5120$  Hz,  $f_{s3} = 7168$  Hz, 则根据中国余数定理, 最大可测频率为

$$\begin{aligned} f_{\max} &= \text{lcm}(f_{s1}, f_{s2}, f_{s3}) \\ &= 7.1680 \times 10^4 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

在  $(0, f_{\max}]$  范围内任意选取 6 个频率值  $f_0$ , 利用本文所提出的估计方案进行频率估计, 表 2 给出了未引入谱校正的频率估计相对误差  $\beta_1$ , 以及引入 Candan 内插校正之后的频率估计相对误差  $\beta_2$ .

表 2 频率估计相对误差结果统计

$f_0/\text{Hz}$	未校正情况 $\beta_1$	校正情况 $\beta_2$
$5.3888 \times 10^4$	$2.1930 \times 10^{-5}$	$3.2129 \times 10^{-9}$
$5.9545 \times 10^4$	$1.6096 \times 10^{-5}$	$1.9242 \times 10^{-10}$
$4.3430 \times 10^4$	$1.5549 \times 10^{-5}$	$1.8803 \times 10^{-10}$
$2.3138 \times 10^4$	$2.3130 \times 10^{-5}$	$8.7577 \times 10^{-9}$
$6.2075 \times 10^4$	$6.3583 \times 10^{-6}$	$1.1693 \times 10^{-11}$
$1.6206 \times 10^4$	$5.1291 \times 10^{-5}$	$2.3709 \times 10^{-10}$

从表 2 实验数据可发现: 在不做校正的情况, 相对误差  $\beta_1$  处于  $10^{-5}$  数量级; 而引入 Candan 内插校正后, 其相对误差  $\beta_2$  处于  $10^{-9}$  数量级 (即测量

精度提高 4 个数量级), 相比于  $10^4$  Hz 数量级的原信号频率, 几乎是完全可忽略的.

### 5.2 噪声条件下频率估计的均方误差估计

**实验 2** 选取待测余弦信号为

$$x(t) = 2\cos(2\pi f_0 t - \pi/2),$$

令待测频率固定为  $f_0 = 6000.6$  Hz, 最大公约数  $N = 256$ . 选用如下  $L = 3$  路的欠采样速率:  $f_{s1} = 512$  Hz,  $f_{s2} = 1280$  Hz,  $f_{s3} = 1792$  Hz, 则最大可测频率为

$$f_{\max} = \text{lcm}(f_{s1}, f_{s2}, f_{s3}) = 1.7920 \times 10^4 \text{ Hz};$$

实验中分别用 Quinn 估计器 [19], Macleod 估计器 [20], Jacobsen 估计器 [21] 以及 Candan 估计器 [17,18] 求出各路频率余数值及校正后的初相值, 再分别利用本文提出的基于相位特征的余数筛选方法和闭合形式的中国余数定理求出对应的频率估计值. 本实验的加噪条件为信噪比在 0—80 dB 之间变化的高斯白噪声, 对每种加噪情况进行 500 次的 Monte-Carlo 频率估计实验, 并统计与各种估计器对应的均方误差 (mean squared error, MSE), 如图 4 所示.

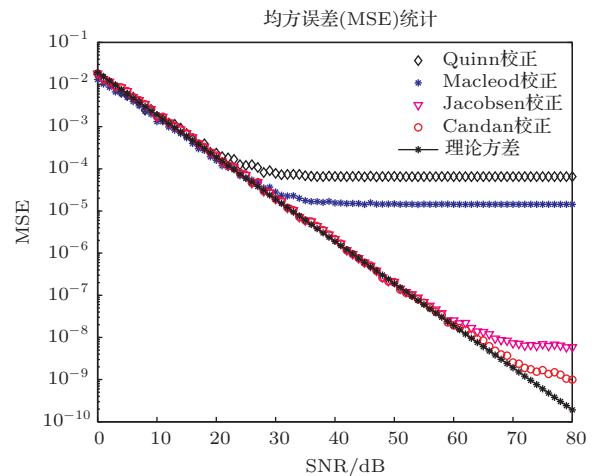


图 4 频率估计的均方误差 (MSE) 统计

从图 4 可总结如下规律:

1) 在 SNR > 30 dB 的区域, 结合 Candan 估计器、余数筛选和中国余数定理得到的欠采样频率估计均方误差曲线 ('o' 标记) 最低, Jacobsen 估计器次之, 然后是 Macleod 估计器, 最后是 Quinn 估计器; 在 SNR < 20 dB 的区域, Macleod 估计器的误差最小, 其他估计器 (包括 Candan 估计器) 的 MSE 差

距不大; 在  $20 \text{ dB} < \text{SNR} < 30 \text{ dB}$  的区域, 除 Quinn 估计性能变坏外, 其他几种估计器 (包括 Candan 估计器) 的 MSE 差距不大.

2) 需指出: 所有 MSE 曲线都存在信噪比阈值  $\text{SNR}_{\text{th}}$  (即当  $\text{SNR} > \text{SNR}_{\text{th}}$  时, MSE 不随信噪比增大而减小). 从图 4 可看出, Candan 估计器的  $\text{SNR}_{\text{th}}$  值最高, Jacobsen 估计器次之, 然后是 Macleod 估计器, Quinn 估计器的  $\text{SNR}_{\text{th}}$  值最低.  $\text{SNR}_{\text{th}}$  越高意味着估计方法的高精度性能的适用范围越大, 因而基于 Candan 估计器的欠采样频率估计方法具有最宽的抗噪声适用范围.

3) 从图 4 可看出, 在信噪比不太低的区域, 采用 Candan 估计器的频率估计的实测统计均方误差曲线与理论方差曲线几乎是符合的, 从而验证了 (22) 式的理论方差表达式的正确性.

因而从不同信噪比的估计精度、适用的动态范围和定量分析 MSE 的能力等多方面权衡, Candan 估计器结合余数筛选和中国余数定理的欠采样频率估计方案是最好的选择.

## 6 结 论

本文结合中国余数定理与基于相位分类的余数筛选方法实现了在低采样速率下对高频余弦信号的频率估计, 解决了文献 [4—6] 中 CRT 仅能重构复指数信号频率而无法重构余弦信号频率的问题. 此外, 通过引入谱校正对各路频率估计和相位估计分别进行了校正, 精确估计了文献 [4—6] 中舍弃的小数余数部分, 大大提高了估计精度. 由于本文提出的余数筛选方法方便快捷、简单高效, 且引用文献 [16] 的闭合形式的中国余数定理省去了复杂的搜索过程, 故本文的方案非常有利于实际工程实现, 具有广阔的应用前景.

另外可看出, 所选用的频谱校正方法 (本文用的是 Candan 内插校正法) 性能决定了最终的频率估计精度, 故提高频谱校正精度是下一步需要完善的工作.

## 参考文献

- [1] Xia X G, Liu K J 2005 *IEEE Signal Processing Letters* **12** 768
- [2] Chen Zh, Zeng Y Ch, Fu Zh J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 46 (in Chinese) [陈争, 曾以成, 付志坚 2008 物理学报 **57** 46]
- [3] Cong Ch, Li X K, Song Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 064301 (in Chinese) [丛超, 李秀坤, 宋扬. 2014 物理学报 **63** 064301]
- [4] Xia X G, Wang G Y 2007 *IEEE Signal Processing Letters* **14** 247
- [5] Li X W, Liang H, Xia X G 2009 *IEEE Trans. Signal Process* **57** 4314
- [6] Li X W, Xia X G 2008 *IEEE Signal Processing Letters* **15** 665
- [7] Qing H Y, Zhang Y N, Zhou Ch, Zhao Zh Y, Chen G 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 094301 (in Chinese) [青海银, 张援农, 周晨, 赵正予, 陈罡. 2014 物理学报 **63** 094301]
- [8] Cheng F, Wang Y Z 2012 *Chin. Phys. B.* **21** 070309
- [9] Bai Y F, Zhai Sh Q, Gao J R, Zhang J X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 034207
- [10] Mcclellen J H, Rader C M 1979 *Number Theory in Digital Signal Processing* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall)
- [11] Ding C, Pei D, Salomaa A 1996 *Chinese Remainder Theorem: Applications in Computing, Coding, Cryptography* (Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.) p24
- [12] Goldreich O, Ron D, Sudan M 2000 *IEEE Trans. Inf. Theory* **46** 1330
- [13] Guruswami V, Sahai A, Sudan M 2000 *Proceedings 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science Redondo Beach, CA, Nov 12–14, 2000* p159
- [14] Li G, Meng H D, Xia X G, Peng Y N 2008 *Sensors* **8** 1343
- [15] Li X W, Xia X G 2010 *IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP)* Dallas, TX, March 14–19, 2010 p2810
- [16] Wang W J, Xia X G 2010 *IEEE Transactions on Signal Processing* **58** 5655
- [17] Candan C 2011 *IEEE Signal Processing Letters* **18** 351
- [18] Candan C 2013 *IEEE Signal Processing Letters* **20** 913
- [19] Quinn B G 1994 *IEEE Transactions on Signal Processing* **42** 1264
- [20] Macleod M D 1998 *IEEE Transactions on Signal Processing* **46** 141
- [21] Jacobsen E, Kootsookos P 2007 *IEEE Signal Process. Mag* **24** 123

# Frequency estimation of undersampled sinusoidal signal based on Chinese remainder theorem\*

Huang Xiang-Dong Ding Dao-Xian<sup>†</sup> Nan Nan Wang Zhao-Hua

(School of Electronic Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

( Received 25 April 2014; revised manuscript received 22 May 2014 )

## Abstract

Frequency estimation based on the reconstruction algorithm of the Chinese remainder theorem(CRT) is one of the frontier focuses in the fields of signal processing, electromagnetism, and optics etc. However, the existing studies can only realize a rough frequency estimation of complex exponential signals. Hence this paper generalizes the CRT-based frequency reconstruction from a rough frequency estimation of complex exponential signals to the accurate frequency estimation of sinusoidal signals. The procedure of the proposed estimation scheme is as follows: (1) Detect zero crossing point on the original high-frequency sinusoidal waveform so as to determine the ideal phase information; (2) implement fast Fourier transform(FFT) to each path's undersampled signal, and then use Candan estimator to correct the frequencies at the peak FFT spectral bins so that the frequency biases can be extracted to realize phase correction; (3) use the proposed classification method based on phase features to screen the corrected remainders; (4) substitute the filtered frequency remainders into the closed-form robust Chinese remainder theorem to obtain the high-accuracy frequency estimation of the original signal. Additionally, this paper also deduces the theoretic expressions of the frequency estimation variance, which is also verified through numerical simulation. And the experimental results also reflect that the proposed scheme possesses high precision and high robustness to noise.

**Keywords:** Chinese remainder theorem, undersampled, frequency estimation, remainder screening

**PACS:** 84.40.Ua, 43.58.Kr, 02.10.De, 43.60.Dh

**DOI:** [10.7498/aps.63.198403](https://doi.org/10.7498/aps.63.198403)

---

\* Project supported by the Tianjin Key Project of Application Foundation and Frontier Technologies Plan (Grant No. 10JCZDJC16100), and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61271322).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [ddx12316@163.com](mailto:ddx12316@163.com)