

二元玻色-爱因斯坦凝聚体中 矢量孤子的转化行为^{*}

张蔚曦^{1)†} 张志强²⁾ 冉茂武¹⁾ 欧永康¹⁾ 何章明³⁾

1)(铜仁学院物理与应用科学系, 铜仁 554300)

2)(郑州科技学院基础教学部, 郑州 450064)

3)(湖南工业大学理学院, 株洲 412007)

(2014年4月2日收到; 2014年6月7日收到修改稿)

考虑种内和种间相互作用均为排斥作用, 研究了局限于谐振外部势阱中的二元玻色-爱因斯坦凝聚体中灰-灰和黑-黑孤子的动力学行为. 结果表明: 当谐振势阱的轴向囚禁频率为零时, 灰-灰和黑-黑孤子均能保持局域稳定; 而当轴向囚禁频率不为零时, 凝聚体中的原子向势阱中心聚集, 发现灰-灰孤子可以转化成亮-亮孤子.

关键词: 二元玻色-爱因斯坦凝聚, 矢量孤子, 外部囚禁势阱

PACS: 05.45.Yv, 03.75.Mn, 03.75.Lm

DOI: 10.7498/aps.63.200507

1 引言

以往的一些实验已成功地在玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)中观察到暗孤子(当暗孤子的最小密度处为零时也称黑孤子, 最小密度处不为零时称之为灰孤子)^[1]、亮孤子^[2]、涡旋^[3]等一系列非线性现象, 从而有关物质波孤子的研究成为BEC研究领域的热点之一^[4-10]. 理论上, 描述BEC物性是基于平均场近似下的Gross-Pitaevskii (GP)方程^[11-16]. 该方程中有两个可宏观观测的物理量: 描述原子间相互作用的S波散射长度和囚禁外部势阱. 研究表明: 原子间相互作用对BEC的性质有重要影响^[17-31]. 当原子间相互作用为排斥时, 即S波散射长度大于零, 可在凝聚体中观察到暗孤子, 并且凝聚体可以长时间稳定地存在. 当原子间相互作用为吸引时, 即S波散射长度小于零, 可在凝聚体中观察到亮孤子, 但是相互吸引作用的凝聚

体是不稳定的, 当其中的原子总数超过一定数量时, 凝聚体会产生崩塌现象. 而亮孤子的波包是由凝聚体组成的, 因此BEC中亮孤子在量子信息、原子激光方面有潜在的应用价值. 如果能在相互排斥作用的凝聚体中形成长时间的亮孤子, 那么BEC这一新的物质波的具体应用就为期不远了. Wang等^[31]证明: 单组分的BEC囚禁于tanh型势阱中时, 即使原子间相互作用为排斥, 也可以在BEC中观察到亮孤子. 在BEC实验中, 通常用谐振子或光晶格势阱来囚禁冷原子. 所以, 本文考虑谐振子势阱, 研究二元BEC中孤子的动力学行为演化.

二元BEC是由同种原子的不同超精细态、或两种同位素原子、或两种不同种类的冷原子形成的多组分凝聚体. 与单组分BEC相比, 二元BEC多了种间原子的耦合相互作用, 因此其中的非线性物质波的性质比单组分BEC中的更加复杂有趣. 例如, 即使二元BEC的种内是相互排斥(吸引)作用,

^{*} 国家自然科学基金地区科学基金(批准号: 61367003)、贵州省科技厅科学技术基金(批准号: J20122314)和河南省教育厅科学技术研究重点项目(批准号: 14B140014)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: zhangwxx@sina.com

但只要种间原子的相互吸引(排斥)作用足够强,仍可以在二元BEC的每个组分中都形成亮(暗)孤子^[4],这些分属不同组分的孤子也被称为矢量孤子.本文考虑的种内和种间相互作用都是相互排斥作用,研究了二元BEC的灰-灰和黑-黑孤子的动力学演化.结果表明:当谐振势阱的轴向囚禁频率为零时,灰-灰和黑-黑孤子保持局域稳定;而当轴向囚禁频率不为零时,凝聚体中的原子向势阱中心聚集,从而导致孤子靠近势阱边缘的背景密度减小,靠近势阱中心的背景密度升高,孤子的宽度减小,并且我们发现灰-灰孤子可以转化成亮-亮孤子的有趣现象.

2 局限于谐振势阱中二元BEC模型

基于平均场理论,二元凝聚体可以由一组GP方程来描述^[32-36]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1(r, T)}{\partial T} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M_1} \nabla^2 + V_{\text{ext}}^{(1)} + G_{11}|\Psi_1|^2 + G_{12}|\Psi_2|^2 \right] \Psi_1, \quad (1a)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2(r, T)}{\partial T} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M_2} \nabla^2 + V_{\text{ext}}^{(2)} + G_{12}|\Psi_1|^2 + G_{22}|\Psi_2|^2 \right] \Psi_2, \quad (1b)$$

其中 M_i 代表相应组分中原子的质量; Ψ_i 代表相应组分的宏观波函数,并且满足 $\int dr |\Psi_i(r)|^2 = N_i$, N_i 表示相应组分中原子的数目($i = 1, 2$);非线性系数 $G_{ii} = 4\pi\hbar^2 a_{ii}/M_i$, $G_{12} = 2\pi\hbar^2 a_{12}/M$ ($1/M = 1/M_1 + 1/M_2, i = 1, 2$).考虑二元凝聚体形成后被囚禁于频率不同谐振的外部势阱中,可设

$$V_{\text{ext}}^{(i)}(X, Y, Z) = \frac{M_i}{2} [\omega_{\perp(i)}^2 (Y^2 + Z^2) + \omega_i^2 X^2], \quad (2)$$

其中 ω_i 和 $\omega_{\perp(i)}$ 分别代表谐振势阱的轴向和横向囚禁频率,并有 $\omega_{\perp(i)} \gg \omega_i$ ($i = 1, 2$).为了研究二元准一维凝聚体中暗-暗孤子,考虑(1)式的解为

$$\Psi_i = \frac{\sqrt{N_i}}{\sqrt{\pi}a_{\perp}} \phi_i(X, T) \times \exp\left(-i\omega_{\perp(1)}T - \frac{Y^2 + Z^2}{2a_{\perp}^2}\right), \quad (3)$$

其中凝聚体的振动长度 $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/(M_1\omega_{\perp(1)})}$.将(3)式代入(1)式,再对 Y, Z 从零到正无穷积分,

可得

$$i\hbar \frac{\partial \phi_1(X, T)}{\partial T} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M_1} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + 2\hbar\omega_{\perp(1)}a_{11}N_1|\phi_1|^2 + \frac{\hbar\omega_{\perp(1)}M_1a_{12}N_2}{M}|\phi_2|^2 + \frac{M_1\omega_1^2}{2}X^2 \right] \phi_1, \quad (4a)$$

$$i\hbar \frac{\partial \phi_2(X, T)}{\partial T} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M_2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{2\hbar\omega_{\perp(1)}M_1a_{22}N_2}{M_2}|\phi_2|^2 \times \frac{\hbar\omega_{\perp(1)}M_1a_{12}N_1}{M}|\phi_1|^2 + \frac{M_2\omega_2^2}{2}X^2 \right] \phi_2. \quad (4b)$$

随后,引入无量纲化参量 $X = a_{\perp}x$, $T = 2t/\omega_{\perp(1)}$, $\phi_1 = u/a_{\perp}$, $\phi_2 = v/a_{\perp}$;代入方程(4)式中,有

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g_{11}|u|^2u - g_{12}|v|^2u - \frac{\omega_1^2}{\omega_{\perp(1)}^2}x^2u = 0, \quad (5a)$$

$$i\frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon g_{22}|v|^2v - \varepsilon g_{21}|u|^2v - \frac{\omega_2^2}{\varepsilon\omega_{\perp(1)}^2}x^2v = 0, \quad (5b)$$

其中

$$\begin{aligned} \varepsilon &= M_1/M_2, \\ g_{ii} &= 4a_{ii}N_i/a_{\perp}, \\ g_{12} &= 2a_{12}M_1N_2/(Ma_{\perp}), \\ g_{21} &= 2a_{12}M_2N_1/(Ma_{\perp}). \end{aligned}$$

3 二元BEC中孤子的传播特性和转化行为

基于当前的实验条件,考虑双组分凝聚体由 ^{85}Rb 和 ^{87}Rb 组成^[37,38],其中组分一是 ^{85}Rb 原子,组分二是 ^{87}Rb 原子.选取每个组分中的原子数为 $N_1 = N_2 = 2000$,考虑 ^{85}Rb 原子之间、 ^{87}Rb 原子之间、 ^{85}Rb 原子与 ^{87}Rb 原子之间的耦合作用都是相互排斥.相应的S波散射长度分别选取为 $a_{11} = 87a_B$, $a_{22} = 89a_B$, $a_{12} = 86a_B$ (a_B 是玻尔半径).简谐振阱的横向囚禁频率分别为 $\omega_{\perp(1)} = 2\pi \times 100 \text{ Hz}$ 和 $\omega_{\perp(2)} = 195\pi \text{ Hz}$.无量纲化后的单位长度和单位时间对应于实际物理量分别是 $1.6 \mu\text{m}$ 和 3.2 ms .由于这种情况下方程(5)是一个不可积系统,难以解析求解,因此我们使用数

值模拟研究其中的暗-暗孤子的动力学行为^[24], 选取如下初始条件:

$$u(x, 0) = b_1 \tanh[b_1 \cos a_1(x - c_1)] + i \sin a_1, \quad (6a)$$

$$v(x, 0) = b_2 \tanh[b_2 \cos a_2(x - c_2)] + i \sin a_2, \quad (6b)$$

其中 a_i , b_i 和 c_i 都是常数, $i = 1, 2$. 当 a_i 等于零时, 方程(6)表示的是黑-黑孤子; a_i 不为零时是灰-灰孤子.

为了对比, 首先计算轴向囚禁频率为零的情况, 即 $\omega_1 = \omega_2 = 0$. 相应的灰-灰孤子的动力学行为如图1(我们在此考虑 $c_1 = c_2$, 即两个组分的凝聚体重叠在一起, 从而组分二的孤子动力学行为与组分一的完全一致, 在图1中仅示出了组分一孤子的动力学行为)所示. 从图1中可看到: 在时间 t 从0变化到100的过程中, 灰孤子的幅度、宽度、位置和背景密度均未发生变化. 因此在谐振势阱轴向囚禁频率为零时, 灰-灰孤子可以保持局域稳定.

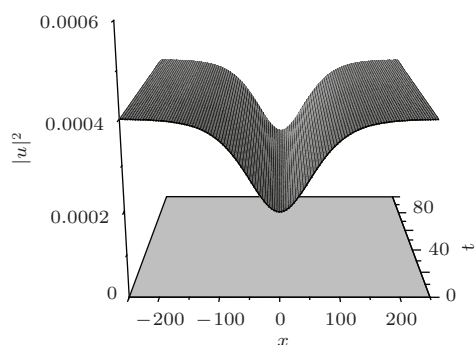


图1 谐振势阱轴向囚禁频率为零时灰-灰孤子的传播性质, 其中 $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $a_1 = 0.78$, $a_2 = 0.78$, $b_1 = 0.04$, $b_2 = 0.04$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$

计算了轴向囚禁频率为零时, 黑-黑孤子的动力学演化情况, 结果如图2所示. 在此, 我们仍考虑两个组分的凝聚体重叠在一起, 即 $c_1 = c_2$, 从而组分二的孤子动力学行为与组分一的完全一致, 图2中也仅示出了组分一孤子的动力学行为. 从图2中可见: 在时间 t 从0变化到100的过程中, 黑孤子的幅度、宽度、位置和背景密度均未发生变化. 因此在谐振势阱轴向囚禁频率为零时, 黑-黑孤子也能保持局域稳定.

为了研究谐振势阱对灰-灰孤子的影响, 选取 $\omega_1 = \omega_2 = 4\pi$ Hz, 结果如图3所示. 从图3(a)中可看到: 在 $t = 0$ 时刻, 组分一中的灰孤子的位置位

于 $x_1 = 0$, 其背景密度分布也均匀, 大小为0.0004; 随着时间推移到 $t = 30$ 时刻, 如图3(b)所示, 组分一中的灰孤子的位置仍位于 $x_1 = 0$, 但是其背景密度分布不再均匀, 与 $t = 0$ 时刻相比, 此时靠近势阱中心位置的背景密度在增加, 而势阱边缘的背景密度在减小, 同时孤子的宽度在减小, 这是因为在谐振势阱的作用下, 凝聚体中的原子将向势阱中心运动; 随着时间进一步推移到 $t = 50$ 时刻, 如图3(c)所示, 一个亮孤子出现在组分一中, 亮孤子的位置仍位于 $x_1 = 0$, 这是因为灰孤子的中心密度不为零, 即在孤子的中心位置有玻色原子分布, 在谐振势阱的作用下凝聚体中的原子不断向势阱中心运动, 原本在中心位置的玻色原子将产生一个刺激作用 (Bosonic stimulation)^[39], 从而导致中心的玻色原子越来越多, 使凝聚体中的灰孤子演化成了亮孤子; 随着时间推移到 $t = 60$ 时刻, 如图3(d)所示, 一个具有非常高幅度、非常窄宽度的亮孤子出现在凝聚体中, 此时, 亮孤子的背景密度分布趋近于零, 这是因为在势阱的作用下, 凝聚体中几乎全部集中到了势阱中心. 这种亮孤子在实现原子激光方面有潜在的应用价值. 同样的现象在组分二中也可以观察到.

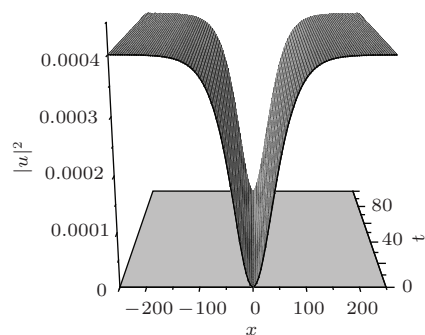


图2 谐振势阱轴向囚禁频率为零时黑-黑孤子的传播性质, 其中 $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, 其他参数与图1一致

在无轴向束缚时和有微弱轴向束缚时灰-灰孤子的行为显著不同, 为了获得这个显著不同的分界线, 我们计算了不同轴向囚禁频率下灰-灰孤子的转化行为, 如图4所示. 在 $t = 60$ 时刻, 当轴向囚禁频率 $\omega_2 \leq 2.8\pi$ Hz 时, 如图4(a)和(b)所示, 灰-灰孤子未能转化成亮-亮孤子; 而当轴向囚禁频率 $\omega_2 \geq 3.4\pi$ Hz 时, 如图4(c)和(d)所示, 灰-灰孤子已经转化成亮-亮孤子. 从上面的讨论可以得出, 灰-灰孤子转化成亮-亮孤子时, 轴向囚禁频

率的临界值可能位于 $[2.8\pi \text{ Hz}, 3.4\pi \text{ Hz}]$ 这个区间.

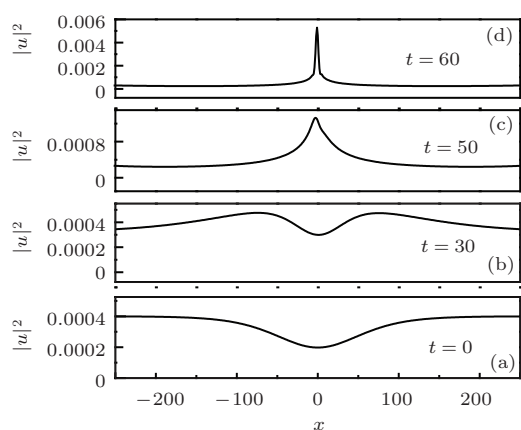


图3 谐振势阱中灰-灰孤子的转化行为, 其中 $\omega_1 = 4\pi \text{ Hz}$, $\omega_2 = 4\pi \text{ Hz}$, 其他参数与图1一致

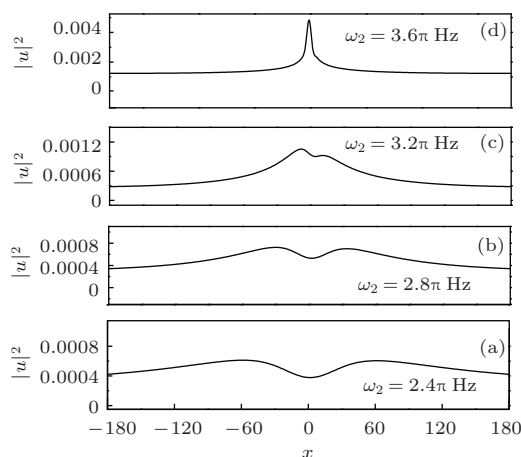


图4 不同轴向囚禁频率下灰-灰的转化行为, 其中 $\omega_1 = \omega_2$, $t = 60$, 其他参数与图1一致

为了研究谐振势阱对黑-黑孤子的影响, 同样选取 $\omega_1 = \omega_2 = 4\pi \text{ Hz}$, 结果如图5所示. 从图5(a)中可看到: 在 $t = 0$ 时刻, 组分一中的黑孤子的位置位于 $x_1 = 0$, 其背景密度分布也均匀的, 大小为 0.0004; 随着时间推移到 $t = 30$ 时刻, 如图5(b)所示, 组分一中的黑孤子的位置仍位于 $x_1 = 0$, 但是其背景密度分布不再均匀, 与灰孤子类似之处是由于凝聚体中的原子将向势阱中心运动, 从而靠近势阱中心位置的背景密度增加, 势阱边缘的背景密度减小, 孤子的宽度也在减小; 随着时间进一步推移到 $t = 50$ 时刻, 如图5(c)所示, 随着凝聚体中的原子继续向势阱中心运动, 一个宽度非常窄的黑孤子出现在 $x_1 = 0$ 位置, 与灰孤子不同的是, 黑孤子的中心密度为零, 因此不会产生玻色原子的刺激作用, 同时由于两边背景的相互排斥作用, 所以黑孤

子不能转换成亮孤子.

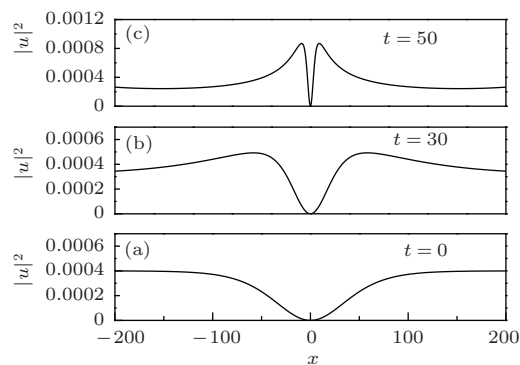


图5 谐振势阱中黑-黑孤子的动力学行为, 其中 $\omega_1 = 4\pi \text{ Hz}$, $\omega_2 = 4\pi \text{ Hz}$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, 其他参数与图1一致

4 结 论

考虑二元 BEC 囚禁于谐振势阱中, 本文数值模拟研究了其中的灰-灰和黑-黑孤子的动力学行为. 结果表明: 当谐振势阱轴向囚禁频率为零时, 灰-灰和黑-黑孤子都可以保持局域稳定; 而当谐振势阱轴向囚禁频率不为零时, 在谐振势阱的作用下, 凝聚体中的原子将向势阱中心运动, 从而导致灰-灰和黑-黑孤子靠近势阱边缘(中心)的背景密度降低(增高), 每个孤子的宽度减小; 随着凝聚体中原子继续向势阱中心运动, 灰-灰孤子会转换成亮-亮孤子, 但黑-黑孤子不会转换成亮-亮孤子. 我们相信这些有趣的结果还会为实验操控二元 BEC 中的孤子提供有益的参考价值.

参考文献

- [1] Burger S, Bongs K, Dettmer S, Ertmer W, Sengstock K 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5198
- [2] Strecker K E, Partridge G B, Truscott A G, Hulet R G 2002 *Nature* **417** 150
- [3] Matthews M R, Anderson B P, Haljan P C, Hall D S, Wieman C E 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 2498
- [4] Zhang X F, Hu X H, Liu X X, Liu W M 2009 *Phys. Rev. A* **79** 033630
- [5] Liu X X, Pu H, Xiong B, Liu W M, Gong J B 2009 *Phys. Rev. A* **79** 013423
- [6] Pu H, Bigelow N P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 1134
- [7] Huang G X, Li X Q, Szeftel J 2004 *Phys. Rev. A* **69** 065601
- [8] Wang D S, Hu X H, Liu W M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 023612
- [9] Yu H Y, Pan L X, Yan J R, Tang J Q 2009 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** 025301

- [10] Luo M, Bao C G, Li Z B 2008 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **41** 245301
- [11] Liu X X, Zhang X F, Zhang P 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 070306
- [12] Yan J R, Pan L X, Yu H Y, Ao S M 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 090301
- [13] Li L, Malomed B A, Mihalache D, Liu W M 2006 *Phys. Rev. E* **73** 066610
- [14] Cheng Y S 2009 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** 205005
- [15] Xiong B, Gong J B 2010 *Phys. Rev. A* **81** 033618
- [16] Xuan H N, Zuo M 2011 *Commun. Theor. Phys.* **56** 1035
- [17] Morsch O, Oberthaler M 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 179
- [18] Shrestha U, Javanainen J, Ruostekoski J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 190401
- [19] Hamner C, Chang J J, Engels P, Hoefer M A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 065302
- [20] He Z M, Wang D L, Ding J W, Yan X H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 230508 (in Chinese) [何章明, 王登龙, 丁建文, 颜晓红 2012 物理学报 **61** 230508]
- [21] Li L, Li Z D, Malomed B A, Mihalache D, Liu W M 2005 *Phys. Rev. A* **72** 033611
- [22] Zhao L C, He S L 2011 *Phys. Lett. A* **375** 3017
- [23] Wen L, Liu W M, Cai Y, Zhang J M, Hu J 2012 *Phys. Rev. A* **85** 043602
- [24] He Z M, Wang D L, Ding J W, Yan X H 2012 *Eur. Phys. J. D* **66** 139
- [25] Chen Z, Wu B 2010 *Phys. Rev. A* **81** 043611
- [26] Wu L, Li L, Zhang J F 2009 *Phys. Rev. A* **80** 013617
- [27] Xue J K, Peng P 2006 *Chin. Phys. B* **15** 1149
- [28] Zhang C W, Liu J, Raizen M G, Niu Q 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 054101
- [29] Huang G X, Velarde M G, Makarov V A 2001 *Phys. Rev. A* **64** 013617
- [30] Huang G X 2004 *Chin. Phys. B* **13** 1866
- [31] Wang S J, Jia C L, Zhao D, Luo H G, An J H 2003 *Phys. Rev. A* **68** 015601
- [32] Zhang X F, Yang Q, Zhang J F, Chen X Z, Liu W M 2008 *Phys. Rev. A* **77** 023613
- [33] Wu B, Liu J, Niu Q 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 034101
- [34] Li Z D, Li Q Y, Li L, Liu W M 2007 *Phys. Rev. E* **76** 026605
- [35] Li Z D, Li Q Y, He P B, Bai Z G, Sun Y B 2007 *Ann. Phys.* **322** 2945
- [36] He Z M, Wang D L, Zhang W X, Wang F J, Ding J W 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 3158
- [37] Papp S B, Pino J M, Wieman C E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 040402
- [38] Ronen S, Bohn J L, Halmø L E, Edwards M 2008 *Phys. Rev. A* **78** 053613
- [39] Miesner H J, Stamper-Kurn D M, Andrews M R, Durfee D S, Inouye S, Ketterle W 1998 *Science* **279** 1005

Transformation of vector solitons in two-species Bose-Einstein condensates^{*}

Zhang Wei-Xi^{1)†} Zhang Zhi-Qiang²⁾ Ran Mao-Wu¹⁾ Ou Yong-Kang¹⁾ He Zhang-Ming³⁾

1) (*Department of Physics and Application Science, Tongren University, Tongren 554300, China*)

2) (*Department of Basic Course, Zhengzhou College of Science and Technology, Zhengzhou 450064, China*)

3) (*College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412007, China*)

(Received 2 April 2014; revised manuscript received 7 June 2014)

Abstract

Considering the interspecies and intraspecies interactions as being repulsive, we study the dynamic behaviors of the gray-gray and black-black solitons in two-species Bose-Einstein condensates trapped in the harmonic external potentials. The results show that in the absence of the axial trapping frequencies, both the gray-gray and black-black solitons can keep localization stable. In the presence of the axial trapping frequencies, the gray-gray can be converted into bright-bright solitons.

Keywords: two species Bose-Einstein condensates, vector solitons, trapping potential

PACS: 05.45.Yv, 03.75.Mn, 03.75.Lm

DOI: [10.7498/aps.63.200507](https://doi.org/10.7498/aps.63.200507)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61367003), the Science and Technology Foundation of Guizhou Province, China (Grant No. J20122314), and the Research Foundation of Education Bureau of Henan Province, China (Grant No. 14B140014).

[†] Corresponding author. E-mail: zhangwxx@sina.com