

折射率梯度表面机理的研究*

刘晓波 施宏宇 陈博 蒋延生 徐卓 张安学†

(西安交通大学信息与通信工程系, 微波工程与光通信研究所, 西安 710049)

(2014年4月29日收到; 2014年5月31日收到修改稿)

本文构建了一种折射率梯度表面, 并利用几何光学法对其物理机理作了研究, 发现这种折射率梯度表面可以实现入射波到正常反射波, 异常反射波, 以及介质波的转换. 当入射点介质折射率大于某一阈值时, 异常反射波束方向角正弦值与入射波束方向角正弦值存在线性关系, 意味着平行入射的波经介质后将平行出射到空气; 而当折射率梯度常数大于某一阈值时, 任何方向入射的波在透射到介质后, 将发生全反射, 被束缚在介质中. 总而言之, 通过调节结构参数, 可以实现对波束方向与强度的人工调控, 从而提供了一种人工可控的全介质梯度表面的工程实现思路.

关键词: 折射率梯度表面, 几何光学法, 线性关系, 全反射

PACS: 42.25.Gy, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.63.214201

1 引言

超材料通常被定义为一种人工合成材料或者人工复合结构, 由于超材料可以实现传统材料所不能及的一些电磁特性, 因而受到日益关注. 尤其是在2008年, 首次出现了基于金属周期结构的完全超材料吸波体, 其宽带, 高吸收率, 极化无关等特性吸引了众多专家学者^[1,2]在此领域研究, 并取得成果.

在此基础上, 2011年出现了相位梯度表面的概念, 它是通过超材料构造一种特殊拓扑结构的表面, 使得入射到该表面的波束额外附加一个线性相位, 从而发生奇异的反射, 这种表面在实现物体的隐身, 能量的高效率转换等方面存在巨大潜力, 吸引了众多专家学者的研究. 孙颜颜等^[3]利用费马原理讨论了这种超材料相位突变界面所满足的广义反射与折射定律, 并作了仿真验证; Sun等^[4,5]利用等效电磁参数, 通过模式展开法对H形特殊结构排列而成的相位梯度表面作了研究; Yu等^[6,7]则是利用几何光学的方法对V形特殊结构排列而成的相位梯度表面作了研究; 而Wang等^[8]同样设计了

一种特殊结构排列而成的相位梯度表面, 并对其转化效率做了研究. 上述文章共同揭示了在相位梯度表面下, 可以实现对光束方向的调控, 并在一定条件下可以实现自由空间波到表面波的转换.

本文意在建立一种折射率梯度表面. 和上述学者所不同的是, 本文没有去构造拓扑结构的表面, 而是研究了折射率线性分布下的材料对入射波束的作用.

2 折射率梯度表面的理论分析

2.1 理论模型

本文建立了一种二维三层结构模型: 空气, 无耗介质(厚度为 d), 理想金属板. 其中, 入射波(记为I, 入射角为 θ_{i0})从空气入射至如下坐标系中空气介质分界面($x_0, 0$), 此时既有反射波(记为II, 反射角为 θ_{r0}), 也有透射到介质中的波(记为III, 透射角为 θ_{t0}); 对于波III, 其首先入射到($x_1, -d$)处发生反射, 之后又传播到空气介质分界面($x_2, 0$)发生透射(入射角为 θ_{i2} 透射角为 θ_{t2} 透射波记为IV). 如图1所示.

* 国家自然科学基金重点项目(批准号: 61331005)和国家自然科学基金(批准号: 61001039)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: anxuezhang@mail.xjtu.edu.cn

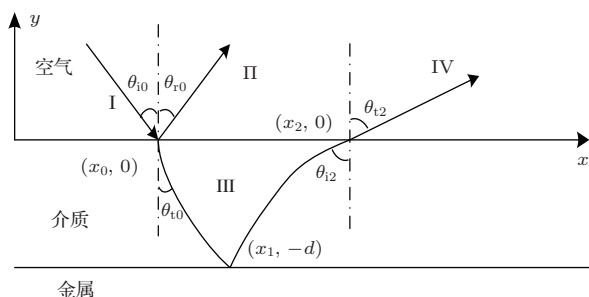


图1 折射率梯度表面模型示意图

其中, 介质折射率沿 x 方向满足梯度变化:

$$n(x) = 1 + \alpha * x, \quad (1)$$

式中, α 为折射率梯度常数.

1) 在空气介质分界面 $(x_0, 0)$ 处:

对波 II 而言, 根据反射定律, 反射角 θ_{r0} 满足

$$\theta_{r0} = \theta_{i0}. \quad (2)$$

对波 III 而言, 根据折射定律透射角 θ_{t0} 满足

$$\sin \theta_{t0} = \frac{\sin \theta_{i0}}{n(x_0)}, \quad (3)$$

式中, $n(x_0)$ 为 $x = x_0$ 处介质的折射率.

2) 对于从 $(x_0, 0)$ 至 $(x_1, -d)$ 的波 III, 设其轨迹方程为 $y_1(x)$.

波程满足:

$$S_1 = \int n ds = \int n(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2} dx.$$

据费马原理, 利用变分法可得

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{c_1}{\sqrt{n^2 - c_1^2}}, \quad (4)$$

式中 c_1 为常数.

利用 (1) 式及 $y_1(x_0) = 0$ 可得

$$y_1 = \frac{c_1}{\alpha} \left(\cosh^{-1} \left(\frac{n}{-c_1} \right) - \cosh^{-1} \left(\frac{n(x_0)}{-c_1} \right) \right). \quad (5)$$

利用 $\frac{dy_1}{dx}$ 的几何意义, 可得

$$-\frac{dy_1}{dx} = -\frac{c_1}{\sqrt{n^2 - c_1^2}} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{t0} \right). \quad (6)$$

利用 (3) 式, 对 (6) 式化简可得

$$c_1 = -\sqrt{n(x_0)^2 - \sin^2 \theta_{i0}}. \quad (7)$$

3) 对于从 $(x_1, -d)$ 至 $(x_2, 0)$ 的波 III, 设其轨迹方程为 $y_2(x)$.

同 (4), (5) 理可得

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{c_2}{\sqrt{n^2 - c_2^2}}, \quad (8)$$

$$y_2 = \frac{c_2}{\alpha} \left(\cosh^{-1} \left(\frac{n}{c_2} \right) - \cosh^{-1} \left(\frac{n(x_2)}{c_2} \right) \right), \quad (9)$$

式中 c_2 为常数.

利用金属板 $(x_1, -d)$ 处的反射条件, 可得

$$-\frac{c_1}{\sqrt{n(x_1)^2 - c_1^2}} = \frac{c_2}{\sqrt{n(x_1)^2 - c_2^2}},$$

化简得

$$c_2 = -c_1 = \sqrt{n(x_0)^2 - \sin^2 \theta_{i0}}. \quad (10)$$

4) 对于整个从 $(x_0, 0)$ 到 $(x_2, 0)$ 的波 III.

利用 $y_1(x_1) = y_2(x_1) = -d$ 边界条件, 可得

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{\alpha} \left(\cosh^{-1} \left(\frac{n(x_1)}{c_2} \right) - \cosh^{-1} \left(\frac{n(x_2)}{c_2} \right) \right) &= -d, \\ \frac{c_1}{\alpha} \left(\cosh^{-1} \left(\frac{n(x_1)}{-c_1} \right) - \cosh^{-1} \left(\frac{n(x_0)}{-c_1} \right) \right) &= -d. \end{aligned} \quad (11)$$

利用 (10) 式我们可以化简上述方程如下:

$$\ln \frac{n(x_2) + \sqrt{n(x_2)^2 - c_2^2}}{n(x_0) + \sqrt{n(x_0)^2 - c_2^2}} = \frac{2\alpha d}{c_2}. \quad (12)$$

同 (7) 式可得

$$\sqrt{n(x_2)^2 - c_2^2} = \sin \theta_{t2}. \quad (13)$$

则利用 (7), (13) 将 (12) 式化简可得

$$\begin{aligned} \ln \frac{\sin \theta_{t2} + \sqrt{n(x_0)^2 - \sin^2 \theta_{i0}} + \sin \theta_{t2}^2}{n(x_0) + \sin \theta_{i0}} \\ = \frac{2\alpha d}{\sqrt{n(x_0)^2 - \sin^2 \theta_{i0}}}. \end{aligned} \quad (14)$$

2.2 理论结果分析

1) 当 $d \rightarrow 0$ 或 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 等效于普通的金属板反射, 应有下式成立:

$$\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0}.$$

上式可由 (12) 式证明 (见附录 A1, A2)

2) 当入射点折射率较大时, 可以证明 (见附录 A3), (14) 式可化简为

$$\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0} + 2\alpha d. \quad (15)$$

但实际上, 通过数学内插, 可以对 (15) 式给出更弱的成立条件 (此条件已接近极限), 此时入射点介质折射率满足下式 (证明见附录 A4):

$$n(x) \geq n_t = \sin \theta_{i0} + 4\alpha d. \quad (16)$$

若满足以上条件, 则波IV的出射角与入射点无关, 这意味着平行入射在不同入射点的波经介质后, 波IV都将平行出射.

在(14)式中以 $2\alpha d$, $\sin \theta_{i0}$ 为参数, 绘制 $n \cdot \sin \theta_{t2}$ 的函数图像, 如图2和图3所示.

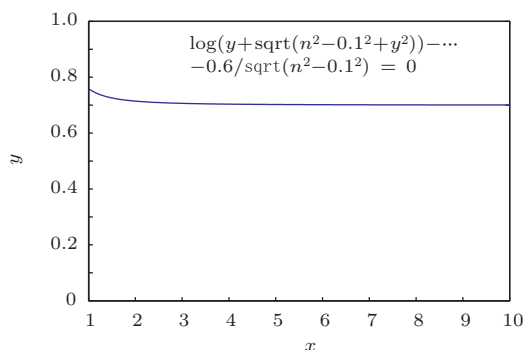


图2 $2\alpha d = 0.6$, $\sin \theta_{i0} = 0.1$ 时的 $n \cdot \sin \theta_{t2}$ 图像

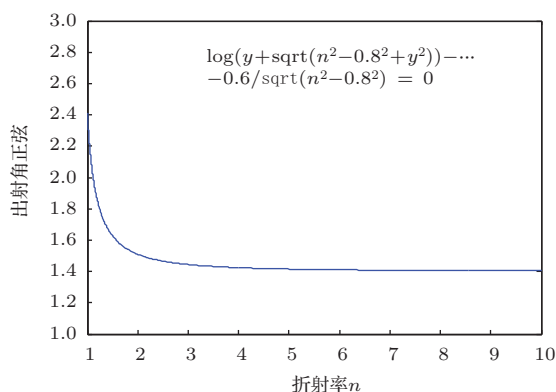


图3 $2\alpha d = 0.6$, $\sin \theta_{i0} = 0.8$ 时的 $n \cdot \sin \theta_{t2}$ 图像

从上述 $n \cdot \sin \theta_{t2}$ 的函数图像中得出, 当折射率 $n(x) \geq n_t$ 时, 波IV出射角正弦 $\sin \theta_{t2}$ 趋于常数, 与理论分析一致.

3) 实际上, 波III在 $(x_2, 0)$ 仍将发生反射, 然后返回介质, 如此循环. 对于此种情况, 利用前述结果及光路的可逆性, 可以认为 $(x_2, 0)$ 处的反射波是自空气中以入射角 θ_{t2} 入射到 $(x_2, 0)$ 处, 则 $\sin \theta_{t4}$, $\sin \theta_{t2}$ 同样满足(14)式. 推广下去, 在入射点折射率 $n(x) \geq n_t$ 时, 下式成立:

$$\begin{aligned} \sin \theta_{t,2m} &= \sin \theta_{t,2(m-1)} + 2\alpha d, \\ m &= 1, 2, 3 \cdots \end{aligned} \quad (17)$$

当 $\sin \theta_{t2} \geq 1$ 时, 从光学角度而言, 此时发生了全反射, 透入到介质中的波全部被束缚到介质内部.

4) 对于波IV, 作如下讨论:

当 $n(x) \geq n_t$ 时, $\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0} + 2\alpha d$, 即波I

平行入射, 波IV平行出射. 在不考虑强度前提下, 可以将波束在介质中传播引起的相位等效为某一表面对波的额外附加相位. 如图4所示

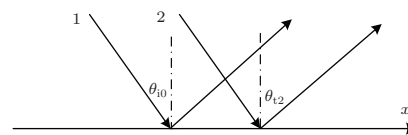


图4 波IV等效波轨迹图

设表面相位补偿为 $\phi(x)$ 根据费马原理有

$$e^{j\phi} e^{-jk\Delta x \sin \theta_{t2}} = e^{j(\phi + \Delta\phi)} e^{-jk\Delta x \sin \theta_{i0}}.$$

当 $\frac{1}{k} \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \right)_{\theta_{i0}} = -2\alpha d$, 即入射角下的附加相位梯度均为常数时, 下式成立:

$$\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0} + 2\alpha d.$$

上式正是(15)式, 说明此时波IV在介质中的波程与坐标之间存在线性关系, 从这种意义上说, 我们可以视波IV为异常反射波.

3 仿真验证

利用 comsol3.5a, 做如下仿真验证 (仿真结果与坐标的 y 向平移无关):

3.1 验证折射率梯度表面可以实现入射波到正常反射波II, 异常反射波IV, 以及介质波III 的转换

设计参数: 电场仅有 E_z 分量 (介质及上述结果均是极化无关); 频率 $f = 10$ GHz; 梯度常数 $\alpha = 1.1$; 介质厚度 $d = 0.08$ m; 入射角正弦 $\sin \theta_{i0} = 0.65$; 波源位置如图所示位于 y 轴 $0.16 \sim 0.48$ 之间.

理论预期: 此时入射点折射率满足 $n(x) \geq n_t$, 故 $\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0} + 2\alpha d = 0.826$, $\sin \theta_{t4} = \sin \theta_{t2} + 2\alpha d = 1.002$, 则介质中的波只发生一次出射. 同时利用(13)式, 计算可得波IV出射位置 $x_2 = 0.265$ m. 仿真结果如图5和图6所示.

图5为能流密度分布图, 图6为等位电场分布图. 从图5和图6中可以看出, 入射波在界面有较小的反射, 介质中的波向空气中透射了一次. 从图6中测量计算可知, 反射角正弦 $\sin \theta_{r0} = 0.63$, 出射角正弦 $\sin \theta_{t2} = 0.85$, 而异常反射波IV出射

位置 $x_2 = 0.29$ m, 与理论预期符合得很好, 而且此时主要能量在于波 IV.

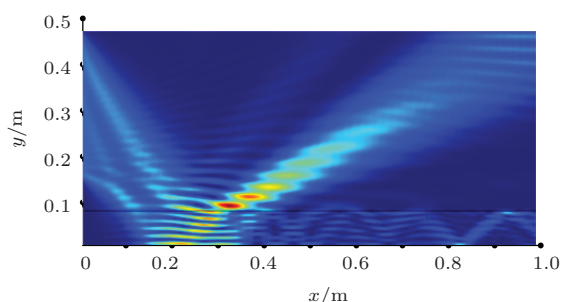


图5 (网刊彩色) 能流密度分布图

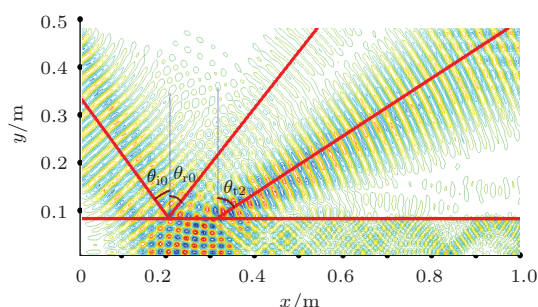


图6 (网刊彩色) 等位电场分布图

3.2 验证当理论值 $\sin \theta_{t2} \geq 1$ 时, 波 III 发生了全反射, 透入到介质中的波全部被束缚到介质内部

参数设计: 电场仅有 E_z 分量(介质及上述结果均是极化无关); 频率 $f = 10$ GHz; 梯度常数 $\alpha = 2.5$; 介质厚度 $d = 0.08$ m; 入射角正弦 $\sin \theta_{i0} = 0.65$; 波源位置如图所示位于 y 轴 0.16 — 0.48 之间.

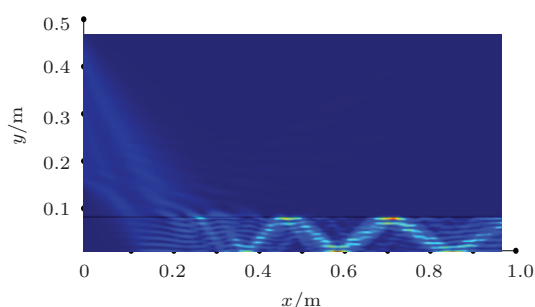


图7 (网刊彩色) 能流密度分布图

理论预期: 此时入射点折射率满足 $n(x) \geq n_t$, 故 $\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0} + 2\alpha d = 1.05$ 因而透入介质

的介质中的波 III 不会出射. 仿真结果如图 7 和图 8 所示.

图 7 为能流密度分布图, 图 8 为等位电场分布图. 从图 7 和图 8 中可以看出介质中的波 III 没有透射到空气中, 同时入射波在界面只有较小的反射, 故能量主要集中在介质中.

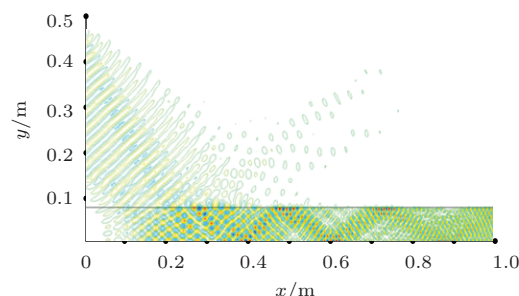


图8 (网刊彩色) 等位电场分布图

3.3 验证当 $n(x) \geq n_t$ 时, (15) 式不再成立, 异常反射波的出射角正弦应服从 (14) 式. 为了从实验上容易验证, 设计此时波 III 发生全反射

参数设计: 电场仅有 E_z 分量(介质及上述结果均是极化无关); 频率 $f = 100$ GHz; 梯度常数 $\alpha = 12.5$; 介质厚度 $d = 0.01$ m; 入射角正弦 $\sin \theta_{i0} = 0.65$; 波源位置如图所示位于 y 轴 0.012 — 0.02 之间.

理论预期: 由于入射点折射率不满足 $n(x) \geq n_t$, 故 (15) 式不再成立. 由 (14) 式解得 $\sin \theta_{t2} = 1.05$ 因此介质中的波不会再透射到空气中. 据 (10), (13) 式可得波 IV 第一次全反射位置 $x_2 = 0.029$ m. 而根据 (15) 式, $\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0} + 2\alpha d = 0.9$, 若此式成立, 应该看到和仿真 3.1 中一样明显的异常反射波. 仿真结果如图 9 和图 10 所示.

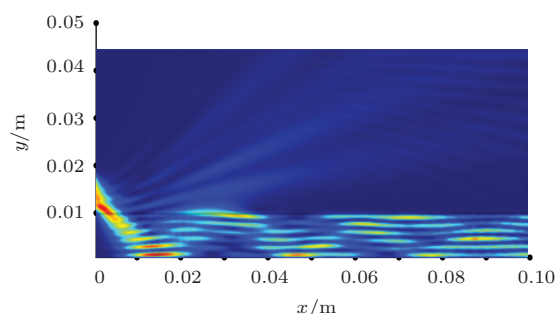


图9 (网刊彩色) 能流密度分布图

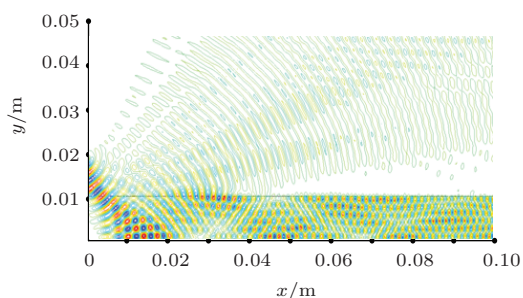


图 10 (网刊彩色) 等位电场分布图

图 9 为能流密度分布图, 图 10 为等位电场分布图. 从图 9 中可以看出, 此时入射波在界面有一些反射, 透入介质中的波没有再次出射到空气中, 第一次发生全反射的点 $(x_2, 0)$ 与理论预期基本一致, 而主要能量也被束缚在介质中.

4 结 论

通过研究折射率梯度表面对入射波束的作用, 我们可以得出如下结论:

1) 折射率梯度表面可以实现入射波到正常反射波, 异常反射波, 以及介质波的转换;

2) 当入射点介质折射率 $n(x) \geq n_t = \sin \theta_{i0} + 4\alpha d$ 时, 异常反射波束方向角与入射波束方向角满足 $\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0} + 2\alpha d$, 这意味着平行入射的波经介质后将平行出射;

3) 当折射率梯度常数满足 $2\alpha d \geq 1$ 时, 任何方向入射的波在透射到介质后, 将发生全反射, 被束缚在介质中.

总之, 通过调节结构参数, 可以实现对波束方向与强度的人工调控, 从而提供了一种人工可控的全介质梯度表面的工程实现思路. 在对波束的实际工程操作中, 如果实现连续介质到离散介质的转化, 则更切近于实际应用, 例如将适当的材料附着于飞机等物体表面, 可以减小其散射截面, 起到隐身的作用; 也可以将其附着于一些电磁波接受装置表面, 如此, 对不同方向的来波即可转化到预期方向, 从而达到高效率的接收等.

附录

A1. 当 $d \rightarrow 0$ 时, 归于一块金属板反射, 应有下式:

$$\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0}.$$

证明: (12) 式中 $2\alpha d$ 取有限值, 则 $\alpha \rightarrow \infty$,

$$c_2 = \sqrt{n(x_0)^2 - \sin^2 \theta_{i0}} \rightarrow \infty.$$

由 (12) 式可得

$$\ln \frac{n(x_2) + \sqrt{n(x_2)^2 - c_2^2}}{n(x_0) + \sqrt{n(x_0)^2 - c_2^2}} = \frac{2\alpha d}{c_2} \rightarrow 0,$$

因此,

$$\begin{aligned} \frac{n(x_2) + \sqrt{n(x_2)^2 - c_2^2}}{n(x_0) + \sqrt{n(x_0)^2 - c_2^2}} &= 1, \\ \frac{d + \alpha x_2 d + d \sin \theta_{t2}}{d + \alpha x_0 d + d \sin \theta_{i0}} &= 1, \end{aligned}$$

可得 $\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0}$.

A2. 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 材料归于一块空气介质, 应有 $\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0}$.

证明: (12) 式满足

$$\begin{aligned} \ln \frac{n(x_2) + \sqrt{n(x_2)^2 - c_2^2}}{n(x_0) + \sqrt{n(x_0)^2 - c_2^2}} &= \frac{2\alpha d}{c_2} \rightarrow 0, \\ \ln \frac{n(x_2) + \sqrt{n(x_2)^2 - c_2^2}}{n(x_0) + \sqrt{n(x_0)^2 - c_2^2}} &= \frac{2\alpha d}{c_2} \rightarrow 0, \\ \frac{n(x_2) + \sqrt{n(x_2)^2 - c_2^2}}{n(x_0) + \sqrt{n(x_0)^2 - c_2^2}} &= 1, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} n(x_2) &= n(x_0) \rightarrow 1, \\ \sin \theta_{t2} &= \sqrt{n(x_2)^2 - c_2^2} \sin \theta_{i0} = \sqrt{n(x_0)^2 - c_2^2}, \end{aligned}$$

得 $\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0}$.

A3. 当折射率 $n(x)$ 是一个大量时, $\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0}$.

证明:

$$\begin{aligned} &\ln \frac{\sin \theta_{t2} + \sqrt{n(x_0)^2 - \sin^2 \theta_{i0} + \sin^2 \theta_{t2}}}{n(x_0) + \sin^2 \theta_{i0}} \\ &= \frac{2\alpha d}{\sqrt{n(x_0)^2 - \sin^2 \theta_{i0}}}, \\ &\ln \frac{n(x_2) + \sin \theta_{t2} + \sin \theta_{i0} - \sin \theta_{i0}}{n(x_0) + \sin \theta_{i0}} \\ &= \frac{2\alpha d}{c_2} \rightarrow 0, \\ &\ln \left(1 + \frac{\sin \theta_{t2} - \sin \theta_{i0}}{n(x_0) + \sin \theta_{i0}} \right) = \frac{2\alpha d}{n(x_0)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

利用 $\ln(1+x) \sim x$, 得

$$\frac{\sin \theta_{t2} - \sin \theta_{i0}}{n(x_0) + \sin \theta_{i0}} = \frac{2\alpha d}{n(x_0)}.$$

在 $n(x)$ 是一个大量近似下, 有 $\sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0} + 2\alpha d$.

A4. 证明: 对于 (14) 式, 我们令 $n(x_0) = \sin \theta_{i0} + 4\alpha d \sin \theta_{t2} = \sin \theta_{i0} + 2\alpha d$.

我们可以计算此时 (15) 式成立的误差, 得

$$\frac{\text{左式} - \text{右式}}{\text{右式}} = \frac{\ln(0.5 + \sqrt{0.25 + \sigma^2}) - 0.5\sigma}{0.5\sigma},$$

式中

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sin \theta_{i0}}{2\alpha d}}};$$

满足: $0 \leq \sigma \leq 1$.

对上述误差式绘图可得:

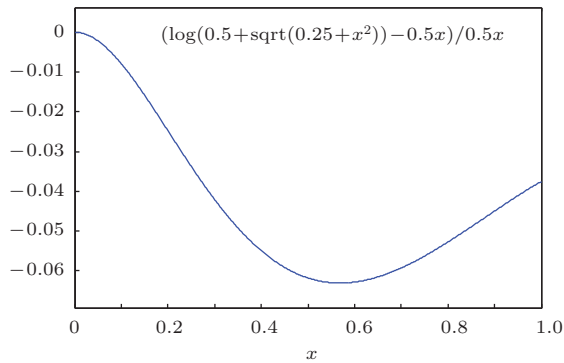


图 A1 误差分布图

从图 A1 可以看出, (15) 式在 6% 误差内成立, 可以认为此时 (15), (16) 成立.

参考文献

- [1] Huang Y J, Wen G J, Li J, Zhong J P, Wang P, Sun Y H, Gordon O, Zhu W R 2012 *Chin. Phys. B* **21** 117801
- [2] Yang Y J, Huang Y J, Wen G J, Zhong J P, Sun H B, Gordon O 2012 *Chin. Phys. B Phys. B* **21** 038501
- [3] Sun Y Y, Han L, Shi X Y, Wang Z N, Liu D H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 104201 (in Chinese) [孙颜颜, 韩璐, 史晓玉, 王兆娜, 刘大禾 2013 物理学报 **62** 104201]
- [4] Sun S L, He Q, Xiao S Y, Xu Q, Li X, Zhou L 2012 *Nature Materials* **11** 426
- [5] Xiao S Y, He Q, Qu C, Li X, Sun S L, Zhou L 2013 *Optical Express* **21** 22
- [6] Yu N F, Genevet P, KatsMA, Aieta F, Tetienne J P, Capasso F, GaburroZ 2011 *Science* **334** 333
- [7] Yu N F, Capasso F 2014 *Nature Materials* **13** 139
- [8] Wang J F, Qu S B, Ma H, Xu Z, Zhang A X, Zhou H, Chen H Y, Li Y F 2012 *Appl. Phys. Lett.* **101** 201104

Studies on the mechanism of refractive index gradient surface*

Liu Xiao-Bo Shi Hong-Yu Chen Bo Jiang Yan-Sheng Xu Zhuo Zhang An-Xue[†]

(Department of Information and Communication Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

(Received 29 April 2014; revised manuscript received 31 May 2014)

Abstract

These years, with the development of material fabrication technology, some new synthetic materials that have unique electromagnetic properties have come out, one of which, the gradient meta-surface constructed into a special topological structure, gains rising popularity among experts. This paper establishes a refractive index gradient meta-surface and discusses its physical mechanism in optics. Normal reflection, anomalous reflection, and transformation from plane wave to medium wave can be realized by using this meta-surface. If the refractive index is larger than some threshold, the sine value of the reflection angle will vary linearly with that of the incidence angle, implying that parallel incident waves will become parallel emergent waves. If refraction index gradient is larger than some threshold, the plane wave at any incidence angle will give out a total reflection inside the medium, in other words, it is bound within the medium. Therefore the control of direction and intensity of beams can be achieved by adjusting parameters, providing a new engineering implementation method of artificial controllable full-medium gradient meta-surface.

Keywords: refractive index gradient on the surface, geometrical optic method, linear relation, total reflection

PACS: 42.25.Gy, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.63.214201

* Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61331005), and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61001039).

[†] Corresponding author. E-mail: anxuezhang@mail.xjtu.edu.cn