

带有分数阶阻尼的压电能量采集系统相干共振*

李海涛 秦卫阳† 周志勇 蓝春波

(西北工业大学工程力学系, 西安 710072)

(2014年5月23日收到; 2014年6月30日收到修改稿)

研究了含分数阶阻尼的双稳态能量采集系统的相干共振. 建立了带有分数阶阻尼的轴向受压梁压电能量采集系统动力学模型. 对于分数阶方程, 采用 Euler-Maruyama-Leipnik 方法进行求解, 计算了不同阻尼阶数下的能量采集系统的信噪比、响应均值、跃迁数目等统计物理量. 结果表明: 此压电能量采集系统在随机激励下可以实现相干共振, 阻尼阶数对相干共振的临界噪声强度和相干共振幅值有很大影响.

关键词: 分数阶阻尼, 随机激励, 能量采集系统, 相干共振

PACS: 05.40.-a, 77.65.j

DOI: 10.7498/aps.63.220504

1 引言

随着无线传感器的低耗能、微型化发展, 常规供电装置已经不适应技术革新, 如何提高环境振动能量采集效率成为当前的研究热点^[1]. 传统振动能量采集系统的研究基于线性振动理论, 由此带来的缺陷是仅在较窄的频带达到最大功率输出, 无法与随时间变化的宽频激励相匹配. 为了克服线性能量采集系统的这一缺陷, 在能量采集系统设计中越来越关注非线性因素^[2-6].

双稳态能量采集系统和同类装置相比, 能利用势能函数的双势阱特点提高能量采集效果. Masana 和 Daqaq^[2-4] 研究了轴向载荷作用下屈曲梁压电能量采集系统. 当轴向载荷达到临界载荷时, 屈曲压电梁会呈现双稳态势. 通过与线性以及单稳态同类装置比较, 系统在大幅激励和低频情况下具有良好的能量采集效果. 孙舒和曹树谦^[5] 建立了磁斥力作用下的双稳态压电悬臂梁能量采集模型. 磁铁之间的斥力使系统呈现双稳态势, 实验证明低频的大幅激励导致系统产生逃离势阱的混沌运动. Firstwell 等^[6] 提出了带有端部质量块的

竖直悬臂梁压电能量采集模型, 该模型中质量块的重力作为轴向载荷导致竖直悬臂梁呈现双稳态. 实验表明, 当端部载荷达到临界时, 系统能量采集效果较好.

微弱周期力和噪声共同作用的非线性双稳态系统, 当噪声增大到一定强度时, 呈现信噪比达到峰值的现象——随机共振. 利用随机共振原理, 可以将带有周期与随机激励的系统能量集中输出^[7,8]. 进一步, Cao 等^[9] 研究发现, 在自治系统中增加噪声强度依然会激发高的信噪比, 因此周期信号并非随机共振的必要条件. 这种现象被研究者称为相干共振. Litak 等^[10] 根据相干共振原理, 发现在一定条件下, Gauss 白噪声激励能增大双稳态悬臂梁能量采集系统的功率输出.

当前, 对于压电能量采集系统的非线性动力学研究, 模型中的阻尼一般采用线性形式. 由于压电材料受到疲劳和黏弹性的影响, 长时间的应力会导致压电效应的衰减遵循分数次幂特性, 实践证明这种本构关系用分数阶微积分刻画更为准确^[11]. 分数阶微积分经历了 300 多年的发展, 目前在对非线性动力学行为影响方面取得了较多的成果^[12-15]. 申永军等^[12,13] 用平均法分析了带有分数阶导数的

* 国家自然科学基金 (批准号: 11172234) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: qinweiyang@yahoo.com.cn

duffing系统的主共振, 结果表明, 导数阶数既影响系统的等效刚度, 也影响等效阻尼. Cao等^[14]通过分岔图、相图以及Poincare截面图研究了一类带有分数阶阻尼的能量采集系统的非线性动力学行为, 发现当阻尼阶数从0.2变化到1.5时, 系统经历倍周期分岔和混沌运动. Litak等^[15]分析了带有分数阶阻尼duffing系统的相干共振, 发现相干共振的临界噪声强度随着阻尼阶数的增加而增大.

本文通过引进分数阶阻尼来刻画压电材料的幂率记忆性, 全面诠释能量采集系统的相干共振现象. 建立了考虑分数阶阻尼的压电能量采集系统的数学模型, 通过Kramers逃逸率和Euler-Maruyama-Leipnik方法数值模拟了参数 α 和阻尼阶数 q 对响应的影响, 证明了相干共振的出现, 得到了一些有意义的结论.

2 模型描述

在考虑欧拉梁一阶模态近似的前提下, 轴向受压的屈曲梁双稳态压电能量采集系统(图1(a))简化为一对受压的斜支撑弹簧模型(图1(b)). Cao等^[16]与Tian等^[17,18]研究了不考虑压电效应的斜

支撑弹簧振子, 重点分析了混沌、余维2分岔等非线性动力学行为. 根据牛顿第二定律和基尔霍夫定律得到了压电能量采集系统的集总参数方程:

$$\begin{cases} mX'' + f_d(X) \\ + 2kX \left(1 - \frac{L}{\sqrt{X^2 + l^2}} \right) \\ + \Theta V = mu'' \\ CV' + \frac{V}{R} - \Theta X' = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

其中: “'”表示对“ τ ”的导数, m 为压电振子的质量, X 为质量块的相对位移, k 为等效刚度, $f_d(X)$ 为阻尼力, L 为弹簧原长, l 为振子质心到支点的水平距离, u 为外界的振动源位移, Θ 为机电耦合系数, C 为等效电容, R 为电路中的电阻, V 为电阻两端的电压.

已经证明, 在长时间的应力作用下, 压电材料释放电荷会因为疲劳而遵循时间的分数次幂规律, 而分数阶导数比整数阶导数更能准确刻画压电材料长时间的记忆特性和迟滞特性^[11,14,19,20]. 压电材料作为能量采集系统中的重要部分, 其长时间的动力学行为应当准确地描述, 因此耦合方程(1)中阻尼力应当表示为 $f_d(X) = c \cdot D^q X$, c 为阻尼系数.

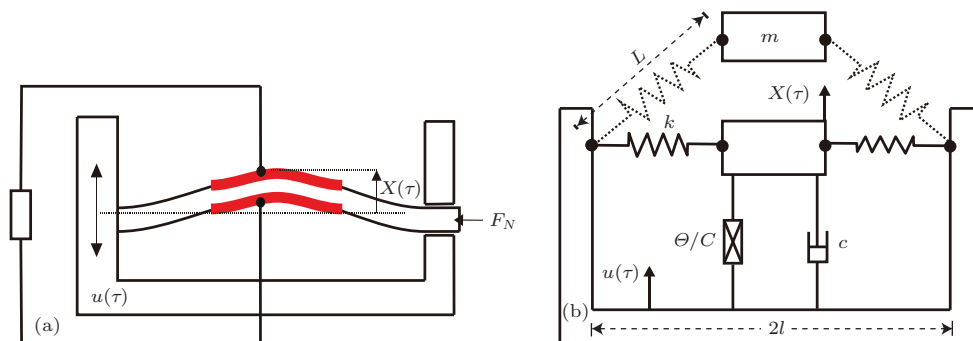


图1 (a) 屈曲梁双稳态压电能量采集系统模型; (b) 等效集总参数数学模型

分数阶导数的定义很多, 常见的有Caputo定义, Riemann-Liouville定义以及Grunwald-Letnikov定义, 这些定义在通常情况下相互等价^[21]. 为了方便数值计算, 将 $D^q X$ 表示成Grunwald-Letnikov分数阶导数, 即

$$D^q X = \frac{d^q X}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(\Delta\tau)^q} \times \sum_{j=0}^{\left[\frac{\tau-a}{\Delta\tau} \right]} (-1)^j \binom{q}{j} X(\tau - \Delta\tau) \right]. \quad (2)$$

在方程(2)中, $\left[\frac{\tau-a}{\Delta\tau} \right]$ 表示整数部分, 其中 $\Delta\tau$ 表示积分步长, a 为任意小于 τ 的参数. 值得注意的是, 若 a 等于0的时候, 分数阶导数表示对整个时间轨迹的记忆. 其中二项式系数可以表示成

$$\begin{aligned} \binom{q}{j} &= \frac{q(q+1)(q+2) \cdots (q+j-1)}{j!} \\ &= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(q+j-1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

带有分数阶阻尼的压电能量采集系统方程表示成:

$$\begin{cases} mX'' + cD^q X + 2kX \left(1 - \frac{L}{\sqrt{X^2 + l^2}}\right) \\ + \Theta V = mu'' \\ CV' + \frac{V}{R} - \Theta D^q X = 0 \end{cases} \quad (4)$$

引进参数 c_v , 令 $X = Lx, u = Ly, V = c_v v, \tau = \sqrt{\frac{2k}{m}}t$ 对 (4) 式进行无量纲化:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\xi D^q x + x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) \\ + \theta v = \ddot{y} \\ \dot{v} + \eta v - \beta D^q \dot{x} = 0 \end{cases}, \quad (5)$$

其中

$$2\xi = c/(2k), \quad \alpha = l/L, \quad \theta = c_v m \Theta / (2k),$$

$$\eta = \sqrt{\frac{m}{2k}} / (RC), \quad \beta = \sqrt{\frac{m}{2k}} \Theta L / (C c_v),$$

$\ddot{y}$ 表示外部激励. 在本文中假设外部激励 $\ddot{y}$ 为零均值宽带平稳 Gauss 白噪声过程 $f(t)$ ^[22], 满足

$$\begin{aligned} \langle f(t) \rangle &= 0, \\ \langle f(t)f(t + \Delta t) \rangle &= 2D\delta(\Delta t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 D 为 Gauss 白噪声的强度, δ 为单位脉冲函数, Δt 是时移.

3 数值模拟

方程 (5) 中的无理项恢复力表示成

$$F(x) = -x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right),$$

势能函数表示成

$$U(x) = \frac{x^2}{2} - \sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha.$$

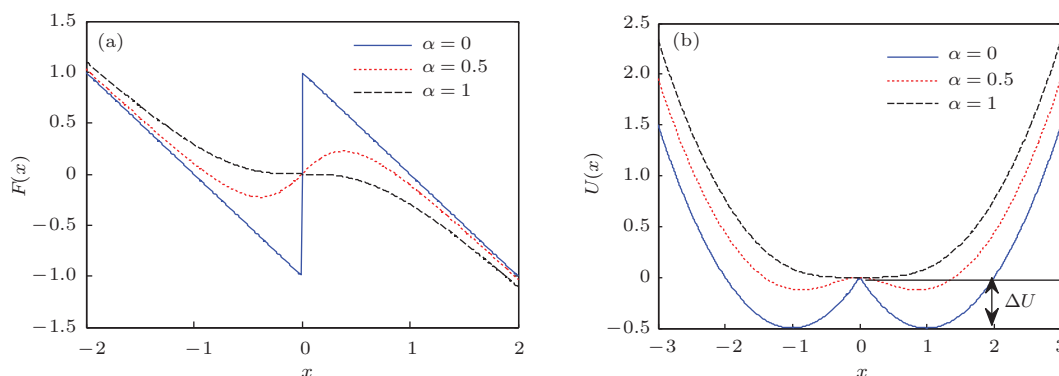


图2 (网刊彩色) (a) 恢复力函数; (b) 势能函数

如图2所示, 当 $\alpha = 0$ 时, 系统的恢复力呈现不连续的跳跃, 势能函数出现两个标准的势阱和非光滑的势垒, 有两个稳定平衡点和一个不稳定平衡点; 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 系统具有光滑形式的恢复力, 势能函数呈现两个标准的势阱和势垒, 有两个稳定平衡点和一个不稳定平衡点; 当 $\alpha \geq 1$ 时, 系统具有光滑形式的恢复力, 势能函数呈现一个标准的势阱, 只有一个稳定的平衡点, 所以系统在 $\alpha = 1$ 处发生亚临界叉形分岔. 从图2(b)中可以看出, 随着参数 α 的逐渐增大, 不稳定平衡点和稳定平衡点之间的势垒高度差 ΔU 逐渐减小, 意味着系统发生穿越势垒的大幅运动所需要的激励能量也同步减少.

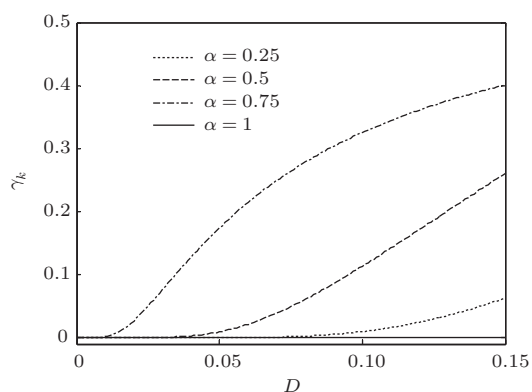
在双稳态系统中, 噪声引起逃离势阱的速率可以由著名的 Kramers 逃逸率给出^[23]

$$r_k = \frac{\omega_s \omega_u}{4\pi\xi} \exp\left(-\frac{\Delta U}{D}\right), \quad (7)$$

其中 $\omega_s = \sqrt{U(x_s)}$, $\omega_u = \sqrt{U(x_u)}$ 分别为在稳定平衡点和不稳定平衡点处的振动角频率, 由此得到能量采集系统的 Kramers 逃逸率

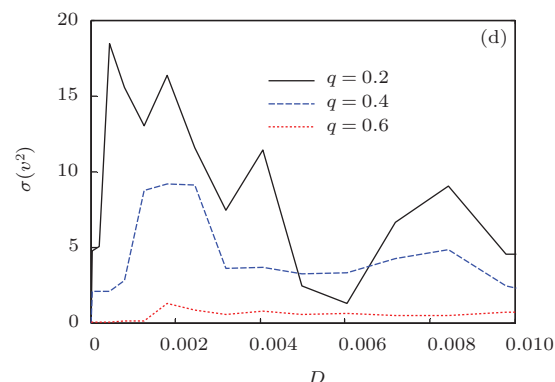
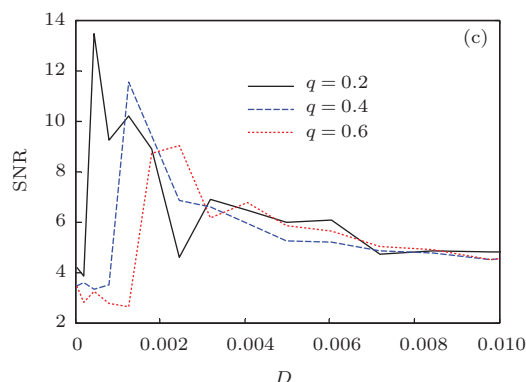
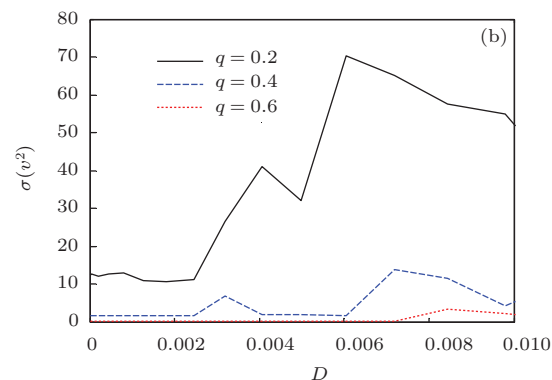
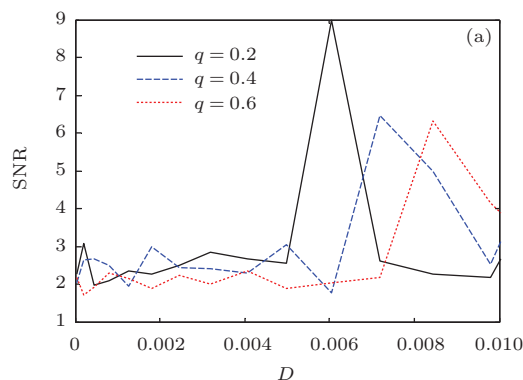
$$\begin{aligned} r_k &= \frac{\sqrt{(1 - \alpha^2) \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)}}{4\pi\xi} \\ &\times \exp\left(-\frac{(\alpha - 1)^2}{2D}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

图3为 $\xi = 0.15$, α 分别取 0.25, 0.5, 0.75, 1 时关于噪声强度 D 的 Kramers 逃逸率曲线. 其中, 在 $0 \leq \alpha < 1$ 范围内随着 α 的逐渐增大, Kramers 逃逸率明显增加, 使得能量采集系统停留单个势阱中的驻留时间减少. 因此可以通过增大参数 α , 减少系统驻留时间, 增大穿越势阱的速率来提高能量采集效率.

图3 不同参数 α 时关于 D 的Kramers逃逸率

Euler-Maruyam方法是求解随机微分方程的常用算法, 而含有分数阶导数的微分方程可以使用Euler-Leipnik数值算法^[21]进行求解. 因此基于Grunwald-Letnikov展开, 文中随机分数阶微分方程采用Euler-Maruyama-Leipnik方法求解. 算法如下:

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + y_{n-1}\Delta t, \\ z_n &= (\Delta t)^{-q} \left(x_n - \sum_{j=0}^n c_j^{(q)} x_{n-j-1} \right), \\ y_n &= y_{n-1} - (F(x_{n-1}) + 2\xi z_{n-1} \\ &\quad + \theta v_{n-1})\Delta t + \sqrt{2D}f_n\sqrt{(\Delta t)}, \end{aligned} \quad (9)$$

图4 (网刊彩色) 系统响应随噪声强度 D 变化 (a) $\alpha = 0.25$ 时信噪比; (b) $\alpha = 0.25$ 时输出电压方差; (c) $\alpha = 0.75$ 时信噪比; (d) $\alpha = 0.75$ 时输出电压方差

$$v_n = v_{n-1} + (\beta z_{n-1} - \eta v_{n-1})\Delta t,$$

其中 x_n , y_n , v_n 分别是经过积分步长 Δt 离散的位移、速度和电压, z_n 表示带有记忆特性的分数阶阻尼, f_n 是正态分布的随机数, 另外二项式系数 $c_j^{(q)}$ 满足以下迭代关系:

$$c_0^{(q)} = 0, c_j^{(q)} = \left(1 + \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)}. \quad (10)$$

系统(5)中由于阻尼和激励共同作用, 总能量平衡在一个特定的水平. 当能量值大于势能函数中的势垒高度差时, 系统将摆脱势阱的束缚呈现双阱动力学行为. 因此随着Gauss白噪声激励强度的增加, 摄入的能量使系统越过势垒产生大幅度的位移响应.

图4中, $\xi = 0.15$, $\theta = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\eta = 0.01$, 阻尼阶数 q 分别选取0.2, 0.4和0.6, 选取了10组Gauss白噪声激励, 再对通过Euler-Maruyama-Leipnik方法得到的响应进行统计平均. 计算过程中噪声强度 D 的取值范围为0.0—0.01, 积分步长 $\Delta t = 0.005$. 图4(a), (c)分别为 α 选取0.25和0.75时关于噪声强度的信噪比(SNR)曲线 ($\text{SNR} = \sigma_x/\sigma_f$ ^[10,15], σ_x , σ_f 分别表示激励和响应

的标准差), 图中信噪比曲线的峰值所对应的噪声强度就是发生相干共振的临界值. 从图 4(a), (c) 中可以看出, 随着阻尼阶数 q 增加, 出现相干共振的临界噪声强度变大, 并且信噪比的峰值呈现降低趋势. 比较图 4(a), (c) 可以得到随着参数 α 逐渐增加, Kramers 逃逸率逐渐增大, 导致相干共振的临界噪声强度逐渐减小. 图 4(b), (d) 分别为 α 选取 0.25 和 0.75 时输出电压的方差随噪声强度的变化趋势. 可以看出, 当阻尼的阶数较低时, 由于在噪声强度较小时达到相干共振, 电压输出功率保持较高水平. 随着阻尼的阶数升高, 达到相干共振需要的噪声强度逐渐增大, 系统阻尼耗散的能量增加, 导致电压输出功率降低.

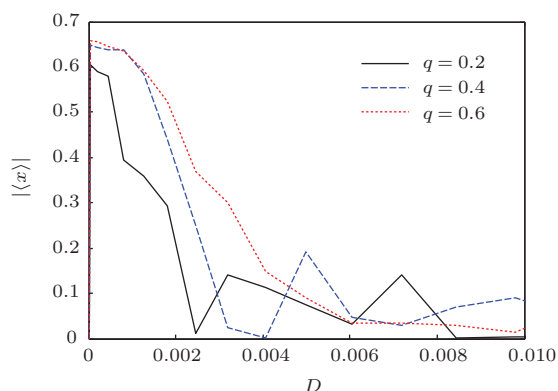
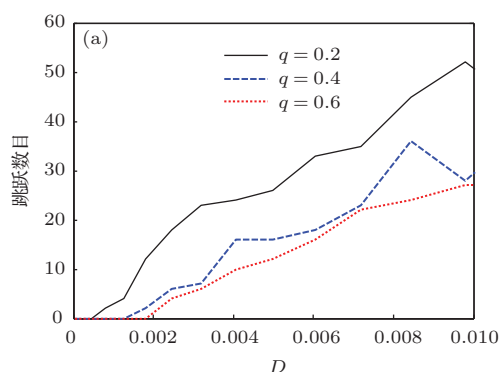


图5 (网刊彩色) 系统位移响应均值随噪声强度变化

图 5 为 $\alpha = 0.75$, 阻尼阶数 q 分别选取 0.2, 0.4 和 0.6 时的位移响应均值 $|\langle x \rangle|$ 随着噪声强度的变化趋势. 由于 $x = 0$ 处于不稳定平衡位置, $|\langle x \rangle| \approx 0$ 表示达到稳态时系统穿越势垒做双阱大振幅运动,



而 $|\langle x \rangle| \approx \sqrt{7/16}$ 表示达到稳态时系统围绕一个平衡点做单阱小振幅运动. 从图 5 中可以看出, 随着阻尼阶数的逐渐增加, 系统实现双阱大振幅运动所需要的噪声强度也增加.

双稳态系统在相干共振发生时, 穿越势阱的大幅位移响应被称为相干跳跃. 系统发生相干跳跃的临界噪声强度和阻尼阶数密切相关. 如图 6(a) 所示, 随着噪声强度逐渐增加, 不同阻尼阶数的系统的相干跳跃数目都随之增大. 然而当噪声强度一定时, 相干跳跃数目随着阻尼阶数的增大而减少. 图 6(b) 为利用最小二乘法 (least square method) 拟合得到发生相干跳跃的临界噪声强度关于阻尼阶数的函数曲线, 其函数关系式表示如下:

$$D(q) = -0.0039q^2 + 0.0057q - 0.00019515. \quad (11)$$

可见, 阻尼阶数是影响相干跳跃以及相干共振的重要因素. 阻尼阶数越小达到相干共振所需要的噪声强度越小, 所获得的能量采集效率越高.

图 7(a)–(f) 是系统在噪声强度为 $D = 0.0013$ 的时间历程图和相平面图. 在低噪声强度情况下, 较小的阻尼阶数 (如 $q = 0.2$) 时可以看到相干跳跃现象, 而随着阻尼阶数增大 ($q = 0.4, q = 0.6$) 时, 相干跳跃现象消失, 系统始终围绕一个平衡点做单阱运动. 图 7(g)–(h) 是噪声强度为 $D = 0.01$ 的时间历程图和相平面图. 在较大噪声强度情况下, 由于激励输入能量增大, 即使阻尼阶数很高, 系统也依然会产生频繁的相干跳跃现象.

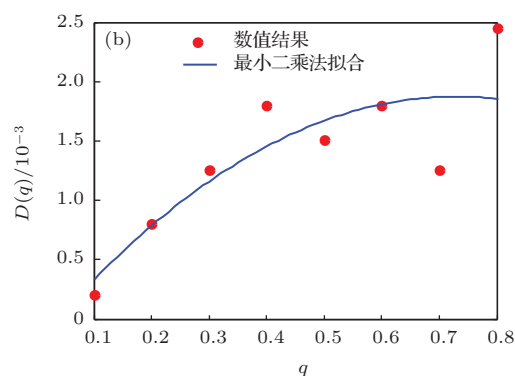


图6 (网刊彩色) (a) 不同阻尼阶数情况下跳跃数目和噪声强度之间的关系; (b) 发生相干跳跃的临界值和阻尼阶数之间的关系

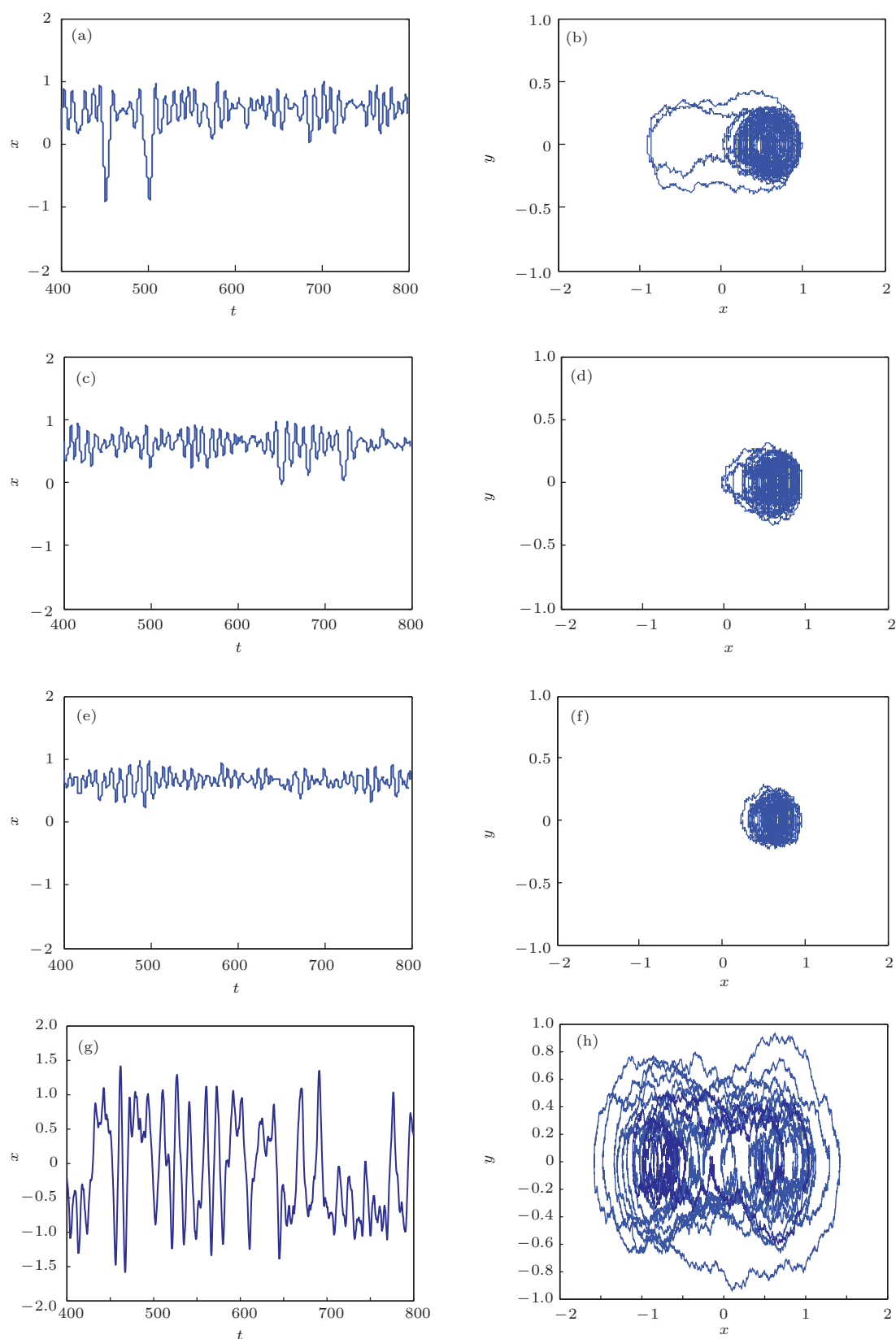


图7 (a) $D=0.0013, q=0.2$ 时间历程图; (b) $D=0.0013, q=0.2$ 相平面图; (c) $D=0.0013, q=0.4$ 时间历程图; (d) $D=0.0013, q=0.4$ 相平面图; (e) $D=0.0013, q=0.6$ 时间历程图; (f) $D=0.0013, q=0.6$ 相平面图; (g) $D=0.01, q=0.6$ 时间历程图; (h) $D=0.01, q=0.6$ 相平面图

4 结 论

为了提高压电能量采集系统的采集效率和功率输出, 本文研究了带有分数阶阻尼项的非线性能量采集系统的相干共振. 得到了以下结论:

1) 由于相干共振的作用, 带有分数阶阻尼的能量采集系统存在随机激励强度临界值, 当达到临界状态时, 信噪比和能量输出将迅速增加;

2) 随着参数 α 逐渐增加, 能量采集系统的势能函数的势垒降低, 系统逃离势阱的速率增大, 发生相干共振的临界噪声强度逐渐减小;

3) 分数阶阻尼阶数不仅影响导致相干共振的临界噪声强度, 而且还影响相干共振幅值; 随着阻尼阶数的降低, 相干共振发生的临界噪声强度减小, 相干共振幅值以及能量采集效率都得到增大.

参考文献

- [1] Harne R L, Wang K W 2013 *Smart. Mater. Struct.* **22** 023001
- [2] Masana R, Daqaq M F 2011 *J. Vib. Acoust.* **133** 011007
- [3] Masana R, Daqaq M F 2011 *J. Sound. Vib.* **330** 6036
- [4] Masana R, Daqaq M F 2012 *J. Appl. Phys.* **111** 044501
- [5] Sun S, Cao S Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210505 (in Chinese) [孙舒, 曹树谦 2012 物理学报 **61** 210505]
- [6] Friswell M I, Ali S F, Adhikari S, Lees A W, Bilgen O, Litak G 2012 *J. Intellig. Mater. Syst. Struct.* **23** 1505
- [7] McInnes C R, Gorman D G, Cartmell M P 2008 *J. Sound Vib.* **318** 655
- [8] Chen Z S, Yang Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 074301 (in Chinese) [陈仲生, 杨拥民 2011 物理学报 **60** 074301]
- [9] Cao Z J, Li P F, Hu G 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 882
- [10] Litak G, Friswell M I, Adhikari S 2010 *Appl. Phys. Lett.* **96** 214103
- [11] Kumar G S Prasad G 1993 *J. Mater. Sci.* **28** 2545
- [12] Shen Y J, Yang S P, Xing H J, Gao G S 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **17** 3092
- [13] Shen Y J, Yang S P, Xing H J, Ma H X 2012 *Int. J. Nonlin. Mech.* **47** 975
- [14] Cao J Y, Zhou S X, Inman D J, Chen Y Q 2014 *Nonlinear Dyn.* **1320** 6
- [15] Litak G, Borowiec M 2014 *Nonlinear Dyn.* **77** 681
- [16] Cao Q, Wiercigroch M, Pavlovskaja E E, Grebogi C, Thompson J M T 2008 *Phil. Trans. R. Soc. A* **366** 635
- [17] Tian R L, Cao Q J, Yang S P 2010 *Nonlinear Dyn.* **59** 19
- [18] Tian R L, Yang X W, Cao Q J, Wu Q L 2012 *Chin. Phys. B* **21** 020503
- [19] Vinogradov A M, Schmidt V H, Tuthill G F 2004 *Mech. Mater.* **36** 1007
- [20] Guyomar D, Sebald G 2012 *Sensor Actuat A: Phys.* **189** 74
- [21] Petras I 2011 *Fractional-Order Nonlinear System: Modeling, Analysis and Simulation* (Berlin: Springer Publications) p19
- [22] Hanggi P, Talkner P, Borkovec M 1990 *Rev. Mod. Phys.* **62** 251
- [23] Leng Y G, Lai Z H 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 020502 (in Chinese) [冷永刚, 赖志慧 2014 物理学报 **63** 020502]

Coherence resonance of piezoelectric energy harvester with fractional damping^{*}

Li Hai-Tao Qin Wei-Yang[†] Zhou Zhi-Yong Lan Chun-Bo

(Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072 China)

(Received 23 May 2014; revised manuscript received 30 June 2014)

Abstract

In this paper, we investigate the coherence resonance of a piezoelectric energy harvester of beam subjected to an axial force. The fractional damping is considered. First, a nonlinear model of the energy harvesting system with fractional damping and random excitation is set up. The coupling equations of dynamics and electrics are derived. Euler-Maruyama-Leipnik method is used to solve the fractional order differential equations. The signal-to-noise ratios, mean responses, and other statistical quantities under the damping forces with different orders are computed. The results obviously show the appearance of coherence resonance. It can be seen that the reduction of fractional order not only reduces the critical value of noise level, thus leading to coherence resonance, but also increases the amplitude on the occurrence of coherence resonance. So it is possible to maximize harvest power for a given density or variance of random excitation by varying system parameters.

Keywords: fractional damping, random excitation, energy harvesting system, coherence resonance

PACS: 05.40.-a, 77.65.j

DOI: [10.7498/aps.63.220504](https://doi.org/10.7498/aps.63.220504)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11172234).

[†] Corresponding author. E-mail: qinweiyang@yahoo.com.cn