

指向Lyapunov指数及其在单输入单输出系统故障检测中的应用*

杨东东[†] 马红光 徐东辉 刘浩淼

(第二炮兵工程大学, 西安 710025)

(2014年5月25日收到; 2014年7月17日收到修改稿)

针对单输入单输出系统的故障检测, 采用混沌振荡器作为激励源, 并利用非一致延迟时间法对被测系统输出时间序列进行相空间重构. 在相空间中平衡点附近定义了指向Lyapunov指数, 并用其对被测系统输出在相空间中平衡点附近特征结构进行分析, 实现了对单输入单输出系统的故障检测. 仿真结果表明, 被测系统的参数变化将会引起相空间中平衡点附近特征结构的改变, 指向Lyapunov指数对其变化敏感.

关键词: 混沌激励, 指向Lyapunov指数, 故障检测, 单输入单输出系统

PACS: 05.45.-a, 05.45.Ac, 05.45.Df, 06.60.Mr

DOI: 10.7498/aps.63.220505

1 引言

传统故障检测方法通过分析由被测系统输出的时域或频域信息来实现. 这种方法通常对被测系统施加传统激励信号(多音信号、白噪声信号等), 并且假定系统故障特征会反映到其输出时间序列之中^[1]. 相空间重构技术近年来成为故障检测领域的热点^[2,3]. 这种方法采用混沌信号作为激励信号, 并将系统输出的时域信号变换到相空间, 进而利用在相空间中设计的一些合适的特征量来实现对被测系统的故障检测. 例如, 利用一些混沌不变量(Lyapunov指数^[4]、分数维^[5]等), 或者在相空间中重新构造的一些对故障敏感的特征量(预测误差^[6,7]、吸引子局部特征^[8,9]、连续性^[10]等)以实现对被测系统的故障检测. 这种方法利用混沌系统对初值敏感的特性较大地提高了故障检测的精度和效率.

系统在相空间中平衡点附近的特征结构决定了其在相空间中的整体结构^[11]. 相空间中平衡点附近可以近似为一线性空间, 其Jacobian矩阵的特

征值与系统参数间有直接的联系. 系统参数的变化会引起相空间中平衡点附近特征结构的改变. 因而, 可以通过对平衡点附近相空间结构的分析实现对系统整体状态的判读.

本文在相空间中定义了指向Lyapunov指数的概念, 利用输出吸引子对被测系统在相空间中平衡点附近的特征结构进行分析, 进而实现了对被测系统的故障检测.

2 指向Lyapunov指数及其求解

2.1 指向Lyapunov指数

确定性动力系统相空间中平衡点附近的特征结构决定了其在相空间中的整体结构, 它与系统参数之间有密切的联系. 平衡点附近的特征结构主要体现在平衡点附近各个方向上发散速率的不同. 本文在平衡点附近定义了指向Lyapunov指数的概念, 并用其对系统在平衡点附近的这种特性进行研究.

假设一动力学系统的维数为3, 其平衡点位于 O , 如图1所示. x_1, x_2, x_3 分别代表系统的三个状

* 国家自然科学基金(批准号: 61174207)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: yd_xian@163.com

态. 现研究该系统在 x_1 - x_2 投影平面绕平衡点各个方向上的平均发散速率. 首先, 自平衡点 O 向外做射线 $\vec{OA}$, $\vec{OA}$ 与 x 轴的夹角为 α . 在 $\vec{OA}$ 上等间隔取点 $p_i, i = 1, \dots, N$.

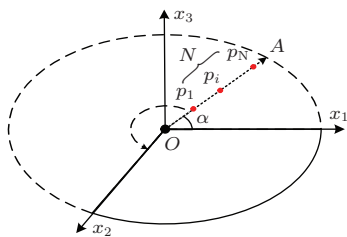


图1 x_1 - x_2 投影平面上做与 x_1 轴夹角为 α 的射线 $\vec{OA}$

其中每一个点 p_i 的坐标 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ 满足该动力系统 x_1 - x_2 平面的演化方程

$$\phi(t, \mathbf{x}_0) : \mathbf{x}(t_0) \rightarrow \mathbf{x}(t), \quad (1)$$

(1) 式描述了 x_1 - x_2 平面上相点的演化规律. 若参考轨迹 $\mathbf{x}(t)$ 在初始时刻 t_0 受到扰动而变为 $\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$, 则偏离矢量具有如下的演化规律:

$$\delta\mathbf{x}(t) = \phi(t, \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0). \quad (2)$$

(2) 式在 t 时刻的一个局部线性化逼近模型为

$$\delta\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\delta\mathbf{x}_0, \quad (3)$$

其中, $\Phi(t, t_0) = \partial\phi(t, \mathbf{x}_0)/\partial\mathbf{x}_0$ 为状态转移矩阵. 分布在参考轨迹 $\mathbf{x}(t)$ 球状邻域的点集经过一段时间 $\Delta T = t - t_0$ 的演化, 在某些方向将会延伸, 在某些方向将会收缩, 形成一个椭球体, 如图2所示.

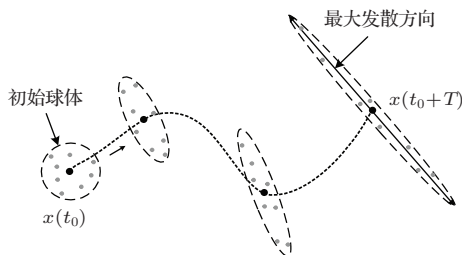


图2 状态轨线球状邻域的演化

矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 包含了上述球状邻域局部流形延伸、收缩及旋转的全部信息. 在 p_i 点处轨线经时间 $\Delta T = t - t_0$ 演化后偏离的大小可由如下的局部逼近模型表示:

$$\|\delta\mathbf{x}(t)\|^2 = \delta\mathbf{x}_0^*[\Phi(t, t_0)^*\Phi(t, t_0)]\delta\mathbf{x}_0, \quad (4)$$

其中, $\|\cdot\|$ 是 R^n 中的矢量的模. A^* 为矩阵 A 的转置. 偏离量 $\delta\mathbf{x}_0$ 为列矢量, 得到对称矩阵

$$\mathbf{C} = \Phi(t, t_0)^*\Phi(t, t_0) \quad (5)$$

为有限时间右 Cauchy-Green 变形张量^[12], 它是对相空间局部结构变形的一个旋转独立的测量. $\mathbf{C}$ 是对称的, 正定的矩阵, 它有两个实的正的特征值 λ_1, λ_2 . 它们对应的特征向量分别为 $\mathbf{v}_1$ 及 $\mathbf{v}_2$. 可以得到 $\lambda_1\mathbf{v}_1$ 及 $\lambda_2\mathbf{v}_2$ 在 p_i 点处沿 $\vec{OA}$ 射线方向上的分量 $\mathbf{v}_{\vec{OA}}$ 的模为

$$\|\mathbf{v}_{\vec{OA}}\| = |(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2)\mathbf{e}_{\vec{OA}}|, \quad (6)$$

其中, $\mathbf{e}_{\vec{OA}}$ 为 $\vec{OA}$ 射线方向的单位矢量. 则 p_i 点处沿 $\vec{OA}$ 射线方向的发散指数定义如下:

$$\sigma_i = \begin{cases} \frac{1}{|\Delta T|} \ln \sqrt{\|\mathbf{v}_{\vec{OA}}\|} & \mathbf{v}_{\vec{OA}}\mathbf{e}_{\vec{OA}} \geq 0 \\ -\frac{1}{|\Delta T|} \ln \sqrt{\|\mathbf{v}_{\vec{OA}}\|} & \mathbf{v}_{\vec{OA}}\mathbf{e}_{\vec{OA}} < 0 \end{cases}, \quad (7)$$

其中 $\Delta T = t - t_0$, 为轨线演化时间. 对于图1所示的 p_1 至 p_N , 分别求取对应位置最大的发散值 $\sigma_1, \dots, \sigma_N$, 对其求平均得到对应角度为 α 的指向 Lyapunov 指数 λ_α 为

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i. \quad (8)$$

对平衡点 O 附近不同 α 角度的射线方向分别求取 λ_α , 可以得到 x_1 - x_2 平面上的 λ_α 曲线. 在系统的各个投影平面分别求取 λ_α 曲线可以得到 λ_α 曲线族. λ_α 曲线族反映了系统在相空间各个投影平面上平衡点处沿各个方向的平均发散速率, 反映了相空间中平衡点附近的特征结构.

2.2 指向 Lyapunov 指数的数值计算

指向 Lyapunov 指数求解过程中最重要的步骤是确定相点 p_i 处的状态转移矩阵 $\Phi(t_0 + \Delta T, t_0)$. 当系统模型已知时, 可以通过在相点 p_i 处对系统模型局部线性化, 达到对 $\Phi(t_0 + \Delta T, t_0)$ 求解的目的. 当系统模型未知, 而仅能实时测得系统某一状态时, 可以先利用相空间重构方法得到相空间轨线, 进而通过轨线近似计算得到状态转移矩阵. 本文利用 Martin 提出的方法, 利用相空间轨线实现对状态转移矩阵 $\Phi(t_0 + \Delta T, t_0)$ 的求解^[13].

如图3所示, 在相空间中分别寻找 $p_i = (x_1, x_2)$ 附近距其 δq 的点 $q_1(x_1 + \delta q, x_2)$, $q_2(x_1 - \delta q, x_2)$, $q_3(x_1, x_2 + \delta q)$, $q_4(x_1, x_2 - \delta q)$ 及其各自在相轨线上的最近邻点 $n_i, i = 1, 2, 3, 4$. 各邻点 n_i 之间的时间间隔要大于时间窗 τ_W , 以避免自相关^[14]. 状态转移矩阵 Φ 可以近似通过这些点所在的轨线计算得到.

$$\Phi(t_0 + \Delta T, t_0) = \begin{bmatrix} \frac{x_{1n_1}(t_0 + \Delta T) - x_{1n_2}(t_0 + \Delta T)}{x_{1n_1}(t_0) - x_{1n_2}(t_0)} & \frac{x_{1n_3}(t_0 + \Delta T) - x_{1n_4}(t_0 + \Delta T)}{x_{2n_3}(t_0) - x_{2n_4}(t_0)} \\ \frac{x_{2n_1}(t_0 + \Delta T) - x_{2n_2}(t_0 + \Delta T)}{x_{1n_1}(t_0) - x_{1n_2}(t_0)} & \frac{x_{2n_3}(t_0 + \Delta T) - x_{2n_4}(t_0 + \Delta T)}{x_{2n_3}(t_0) - x_{2n_4}(t_0)} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中, $(x_{1n_i}(t), x_{2n_i}(t))$ 为 x_1 - x_2 平面上 n_i 点在 t 时刻的坐标. 在得到状态转移矩阵 $\Phi(t_0 + \Delta T, t_0)$ 后, 将其代入 (4)–(8) 式, 即可最终求解得到该投影平面上的指向 Lyapunov 指数曲线.

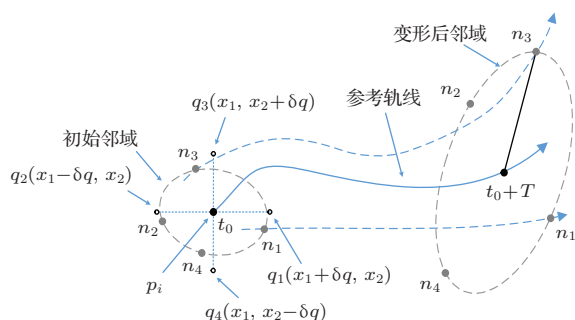


图3 状态转移矩阵求法

3 基于指向 Lyapunov 指数的单输入单输出系统故障检测

3.1 故障检测系统动力学模型

图4所示单输入单输出系统故障检测模型可以看作一斜积流模型(skew product flow formulation)^[15], 它由混沌振荡器及单输入单输出被测系统两部分组成. 其中混沌振荡器为定义在空间 P 上的一个自治动力学系统, 其状态演化方程 $p(t) = \theta_t(p)$ 满足:

- 1) $\theta_0(p) = p$, 对于所有的 $p \in P$;
- 2) $\theta_{s+t} = \theta_s(\theta_t(p))$, $s, t \in T$;
- 3) 映射 $(t, p) \rightarrow \theta_t(p)$ 连续.



图4 单输入单输出系统故障检测模型

被测系统受激励 $p(t)$ 的作用为非自治动力学系统, 其具有上循环映射^[15] $\varphi: T_0^+ \times P \times X$ 满足:

- 1) $\varphi(0, p, x) = x$, 对于所有的 $(p, x) \in P \times X$;
- 2) $\varphi(t + s, p, x) = \varphi(t, \theta_s(p), \varphi(s, p, x))$ 对于所有的 $s, t \in T_0^+$, $(p, x) \in P \times X$;
- 3) 映射 $(t, p, x) \rightarrow \varphi(t, p, x)$ 连续.

整体系统(包含混沌振荡器及被测系统)可以看作一定义在 $H = P \times X$ 上的自治动力学系统, 其状态演化方程 $\pi: T_0^+ \times P \times X \rightarrow P \times X$ 具有如下形式:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \pi_t(\omega) = \pi(t, (p, x)) \\ &= (\theta_t(p), \varphi(t, p, x)), \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\omega \in P \times X$.

3.2 故障检测原理

由混沌振荡器的性质可知其平衡点 p_E 满足

$$p_E = \theta_t(p_E). \quad (11)$$

而被测系统的平衡点 x_E 满足

$$x_E = \varphi(t, 0, x_E). \quad (12)$$

由 (10) 式可知, 整体系统的平衡点 ω_E 满足

$$\begin{aligned} \omega_E &= (\widehat{p}_E, \widehat{x}_E) = \pi(t, (\widehat{p}_E, \widehat{x}_E)) \\ &= (\theta_t(\widehat{p}_E), \varphi(t, \widehat{p}_E, \widehat{x}_E)), \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\widehat{p}_E = \theta_t(\widehat{p}_E)$, 由于可能存在 $p'_E \subseteq p_E$ 满足

$$\varphi(t, p'_E, x) \neq 0, \quad (14)$$

使得 $\widehat{p}_E \neq p_E$, 故 $\widehat{p}_E \subseteq p_E$.

另外, 由 (13) 式可得,

$$\widehat{x}_E = \varphi(t, \widehat{p}_E, \widehat{x}_E), \quad (15)$$

施加激励后, 被测系统平衡点 $\widehat{x}_E$ 为激励信号部分或全部平衡态 $\widehat{p}_E$ 的函数. 在 $\widehat{p}_E$ 作用下, $\widehat{x}_E$ 的个数可能增加、减小或保持不变. 当激励信号平衡态位于原点时, 由 (12) 和 (15) 式可知 $\widehat{x}_E = x_E$. 在平衡点附近局部线性化后, $\widehat{x}_E$ 附近空间结构将与 x_E 附近空间结构相对应. 此时, 整个系统的平衡点为激励系统平衡点部分结构 $\widehat{p}_E$ 与激励系统平衡态下被测系统平衡点 $\widehat{x}_E$ 的空间组合. 它既包含了激励系统平衡点附近的结构信息, 又包含了被测系统平衡点附近的结构信息. 被测系统对激励系统平衡点附近空间结构进行了扩展. 如图5所示. $E_P^s(0)$, $E_P^u(0)$ 分别代表 P 空间平衡点附近的稳定子空间

及不稳定子空间. $E_X^s(0)$, $E_X^u(0)$ 分别代表 X 空间上平衡点附近的稳定子空间及不稳定子空间.

系统在其状态空间中平衡点附近可以近似为一线性空间, 表征其平衡点结构的 Jacobian 矩阵的特征值与系统参数间有直接联系^[11]. 系统参数的变化会引起相空间中平衡点附近特征结构的变化. 因而, 可通过对平衡点附近特征结构的分析实现对系统参数的分析. 由前面分析可知, 由被测系统输出重构得到的相空间在平衡点附近包括两部分: 激励系统平衡点附近特征结构及被测系统平衡点附近特征结构. 在保持同一混沌信号激励下, 激励系统在相空间平衡点处特征结构保持不变. 因而, 输出相空间在平衡点附近结构的改变主要由被测系统平衡点附近特征结构的改变引起.

由 2.1 节可知, 指向 Lyapunov 指数可以对相空间中平衡点附近各个方向上的特征结构进行分析. 因而, 可以在保持同一混沌信号激励下, 通过对被测系统输出相空间在各个投影平面上的指向 Lyapunov 指数的分析达到对被测系统状态评估的目的.

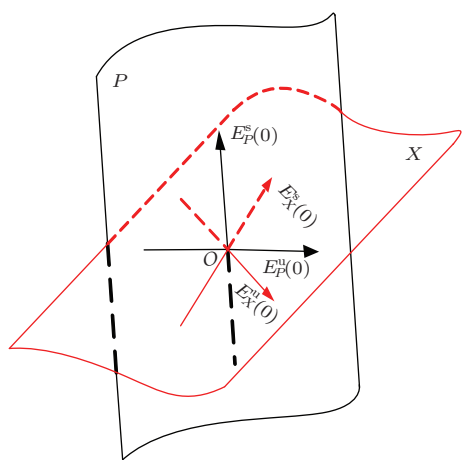


图5 被测系统对激励系统平衡点附近的扩展

3.3 混沌激励信号的选择

混沌激励信号的选择必须满足以下要求.

要求1 被测系统平衡点受到所施加混沌信号的充分激励. 在此定义为: 若被测系统维数为 m , 在混沌信号激励下, 若其状态空间在 $m-1$ 维不同投影平面上状态轨线能够遍历其投影平面上平衡点的周围空间, 则被测系统各状态将均能反映到轨线上. 此时, 被测系统平衡点附近的相空间可以扩展到输出相空间的平衡点附近, 被测系统

受到混沌激励信号的充分激励. 假设激励系统具有 n_1 个平衡点属于 $\widehat{p}_E$, 分别设为 $\{O_1^E, \dots, O_{n_1}^E\}$, 被测系统在 $\widehat{p}_E$ 作用下存在 n_2 个平衡点, 分别设为 $\{O_1^S, \dots, O_{n_2}^S\}$. 若被测系统平衡点中有 n_2' 个平衡点受到混沌信号的充分激励, 则输出相空间中将会包含 $n_1 \times n_2'$ 个平衡点. 若与所关注被测系统参数相关联的平衡点受到充分激励, 则其参数变化将会引起输出相空间平衡点附近特征结构的改变.

要求2 输出吸引子能够遍历输出相空间中平衡点附近的相空间结构. 在此定义为: 假设对输出时间序列重构时选取嵌入维为 m , 则需在 $m-1$ 个不同投影平面平衡点附近形成稠密轨线. 此时, 将便于求解指向 Lyapunov 指数. 并且, 由于 $m-1$ 个不同投影平面包含了输出相空间中所有的状态量, 因而此时得到的指向 Lyapunov 指数能够反映系统所有参数的变化.

以上两点保证了输出吸引子在平衡点附近的特征结构能够包含被测系统在平衡点附近的特征信息. 通常选取单涡结构混沌系统产生信号作为激励信号, 它在平衡点附近能够形成单涡稠密轨线, 并且由于单涡结构具有近似的各向同性, 因而能够减小计算得到的各角度对应指向 Lyapunov 指数之间的相对误差.

4 仿真实验

本文利用图6所示的基本共射极晶体管放大电路作为测试对象, 对所提方法进行验证. 其中, 混沌振荡器的输出经归一化后作为被测系统的激励信号. 电阻 R_L 上电压作为输出用来对被测系统的状态进行分析. 被测电路系统的状态方程可以简写成如下微分方程形式:

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt} &= -13 \times (2.79 + U_1 + V_S), \\ \frac{dU_2}{dt} &= 1.12 \times 10^{-12} + 1.055 \times 10^{-10} \\ &\quad \times e^{-\frac{500}{13}(U_1+U_2+V_S)} - 15.4 \times U_2, \\ \frac{dU_3}{dt} &= 144.58 - 2.1 \times 10^{-10} \\ &\quad \times e^{-\frac{500}{13}(U_1+U_2+V_S)} - 12.05 \times U_3, \quad (16) \end{aligned}$$

其中, U_1 , U_2 , U_3 为动态元件 C_1 , C_2 , C_3 两端电压, V_S 为混沌振荡器输出. 最终得到 R_L 上的输出电压

U_o 为

$$U_o = 7.229 - 1.05 \times 10^{-11} \times e^{-\frac{500}{13}(U_1+U_2+V_S)} - 0.6 \times U_3. \quad (17)$$

零输入下, 被测电路平衡点对应于直流工作点为

$$\mathbf{U}_E = (U_{1E}, U_{2E}, U_{3E}) = (-2.79, 2.1, 6.6). \quad (18)$$

晶体管放大电路的激励信号由 Rossler 混沌振荡器产生^[16]. 它具有如下的形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c) \end{cases}, \quad (19)$$

其中, 参数设置为 $a = 0.2$, $b = 0.4$, $c = 5.7$. Rossler 系统的 x_2 变量经归一化后作为输出用来对晶体管放大电路进行激励. 混沌激励及其在相空间中的轨线如图 7 所示.

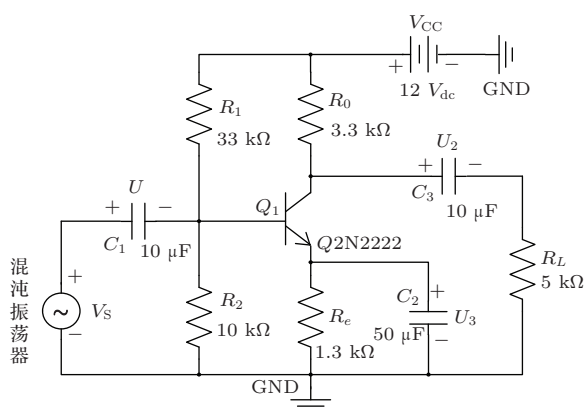


图 6 共射极晶体管放大电路

Rossler 系统具有惟一平衡点 $\mathbf{x}_E$ 位于原点. 由 3.2 节分析可知, 被测电路系统平衡点在该激励系统作用下保持不变. 此时, 整体系统在相空间中具

有惟一平衡点 $\mathbf{w}_E = (\mathbf{x}_E, \mathbf{U}_E)$. 将 $\mathbf{w}_E$ 代入(??)式可知, 平衡点处系统输出 $U_{OE} = 0$. 因而, 输出重构后相空间中平衡点位于原点.

Rossler 信号的相空间轨线在平衡点附近均匀分布. 因而, 用其作为激励信号时, 便于在被测系统状态空间中平衡点附近形成稠密单涡轨线. Rossler 信号激励下, 晶体管放大电路在其状态空间中平衡点附近的轨线分布如图 8 所示.

由(16)式可知, 被测系统状态空间的维数为 $m = 3$. 在图 8 中, 被测系统状态轨线在其 $m - 1 = 2$ 个投影平面上能够遍历平衡点附近空间 (U_1 - U_2 平面及 U_1 - U_3 平面). 因而, 被测系统平衡点附近完整的状态空间结构将会扩展到输出平衡点附近.

非一致延迟时间相空间重构方法利用非等间隔的延迟时间实现对一维时间序列的相空间重构, 提高了相空间重构的精度^[17]. 本文利用 Nickkawde^[18] 提出的指向微分法对输出时间序列计算得到的延迟时间为 $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = (0, 9, 96)$. 此时, 得到输出在相空间中的吸引子及其在各个投影平面上的投影如图 9 所示.

可以看到, 输出吸引子在 x_1 - x_2 及 x_2 - x_3 平面上的投影在平衡点附近均具有单涡结构. 由于重构时嵌入维为 3, 利用这两个单涡结构计算得到的指向 Lyapunov 指数将能完整反映被测系统参数的变化.

当被测系统参数发生变化时, 会引起平衡点附近特征结构的改变, 因而会影响到由输出吸引子计算得到的指向 Lyapunov 指数曲线. 图 10 所示为 $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ 及 $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ 时, 根据输出吸引子在 x_1 - x_2 及 x_2 - x_3 平面上的投影计算得到的指向 Lyapunov 指数曲线.

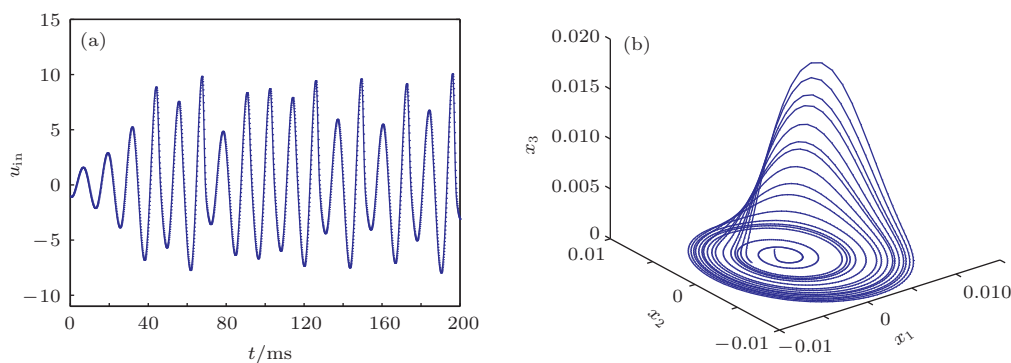


图 7 (a) Rossler 振荡器的输出; (b) 输出在相空间中轨线

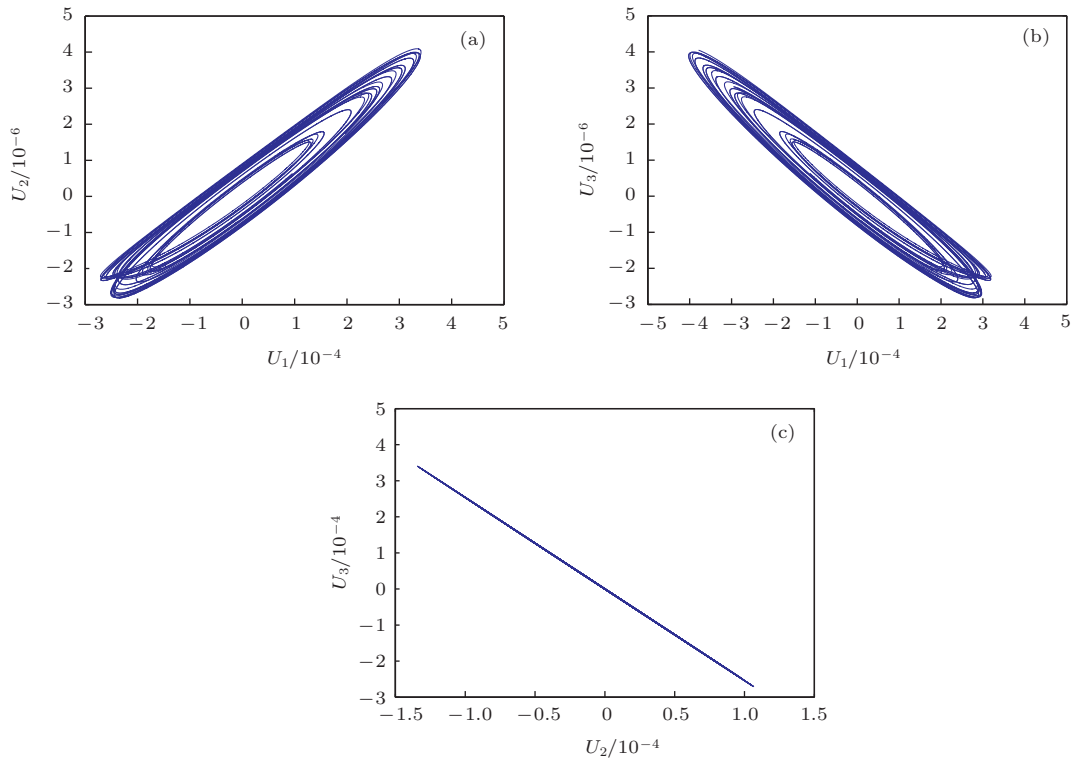
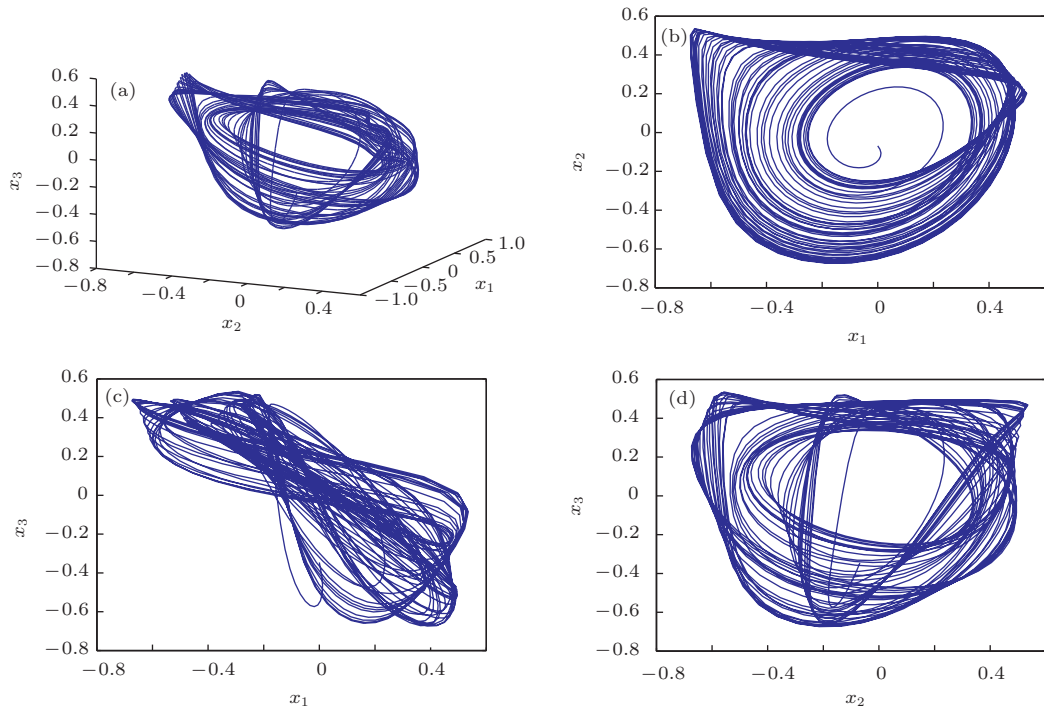

 图8 被测系统状态轨线在各个投影平面的投影 (a) U_1 - U_2 ; (b) U_1 - U_3 ; (c) U_2 - U_3


图9 (a) 输出吸引子; (b)–(d) 输出吸引子在各个投影平面上的投影

可以看到, R_2 参数的变化将会改变相空间中平衡点附近某些方向上的发散速率. 在 x_1 - x_2 平面, 指向 Lyapunov 指数在 A_1 , A_2 区域增大, 说明沿 A_1 , A_2 方向区域的发散速率增大. 而在 x_2 - x_3 平

面, R_2 变化对指向 Lyapunov 指数的影响主要分布在 B_1 , B_2 及 B_3 区域. 其中, 沿 B_1 区域方向发散速率减小, 而沿 B_2 及 B_3 区域方向的发散速率增大.

不同参数变化对平衡点附近空间结构的

影响不同, 因而对指向 Lyapunov 指数的影响也不同. 图 11 所示为 C_2 取 50 μF 和 100 μF 时对应不同投影平面上指向 Lyapunov 指数曲线. A_i , $i = 1, \dots, 5$ 及 B_j , $j = 1, \dots, 4$ 分别对应不同投影平面上指向 Lyapunov 指数曲线受 C_2 参数变化影响区域.

利用相空间中稠密分布的轨线对指向 Lyapunov 指数进行求解时存在一定的误差. 因而, 计算得到的指向 Lyapunov 曲线具有较小的波动. 为了更好地研究参数变化对指向 Lyapunov 指数的影响, 首先对求解得到的指向 Lyapunov 指数曲线进

行拟合处理. 由于计算得到指向 Lyapunov 指数首端 (0°) 及尾端 (360°) 对应的值应当是连续的, 因而在对指向 Lyapunov 指数曲线进行拟合时为了避免边界效应, 首先对指向 Lyapunov 指数曲线两端进行如下形式的 45° 扩展处理:

$$[\lambda_{315^\circ}, \lambda_{316^\circ}, \dots, \lambda_{359^\circ}, \lambda_{0^\circ}, \lambda_{1^\circ}, \dots, \lambda_{360^\circ}, \lambda_{1^\circ}, \lambda_{2^\circ}, \dots, \lambda_{45^\circ}]. \quad (20)$$

当 $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ 时, 由输出吸引子求得的指向 Lyapunov 指数曲线及对其利用 30 阶多项式拟合得到的曲线如图 12 所示.

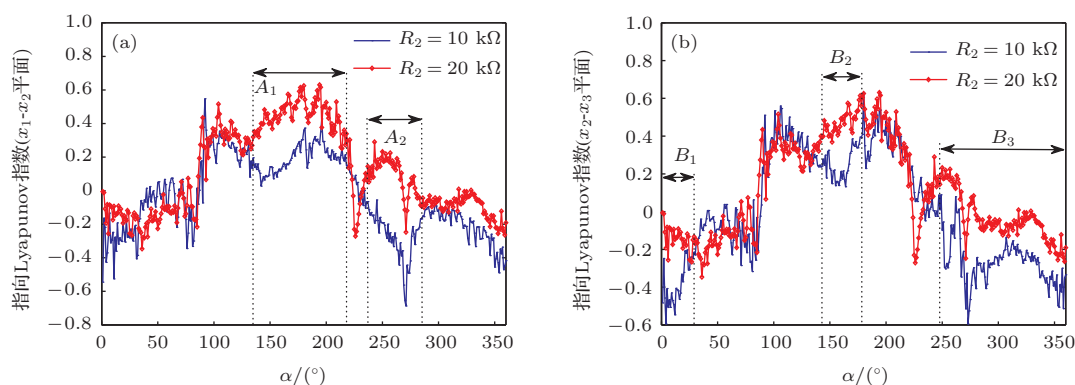


图 10 (网刊彩色) $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ 及 $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ 时计算得到的指向 Lyapunov 指数 (a) x_1-x_2 平面; (b) x_2-x_3 平面

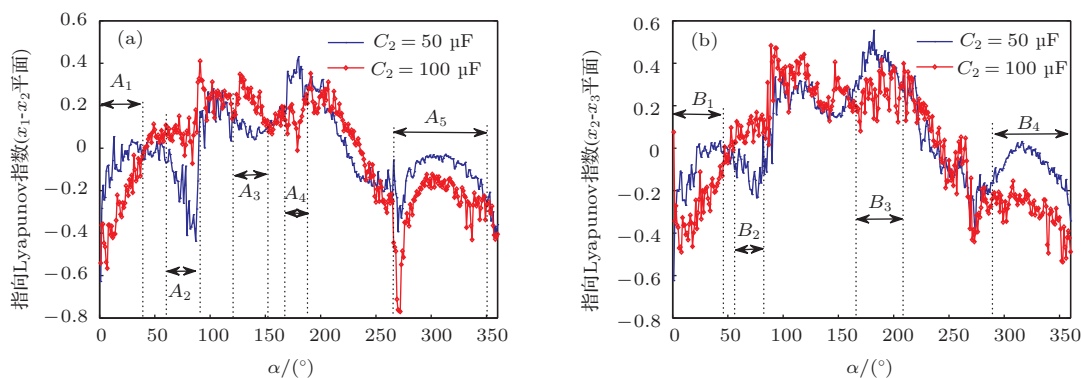


图 11 (网刊彩色) $C_2 = 50 \mu\text{F}$ 及 $C_2 = 100 \mu\text{F}$ 时计算得到的指向 Lyapunov 指数 (a) x_1-x_2 平面; (b) x_2-x_3 平面

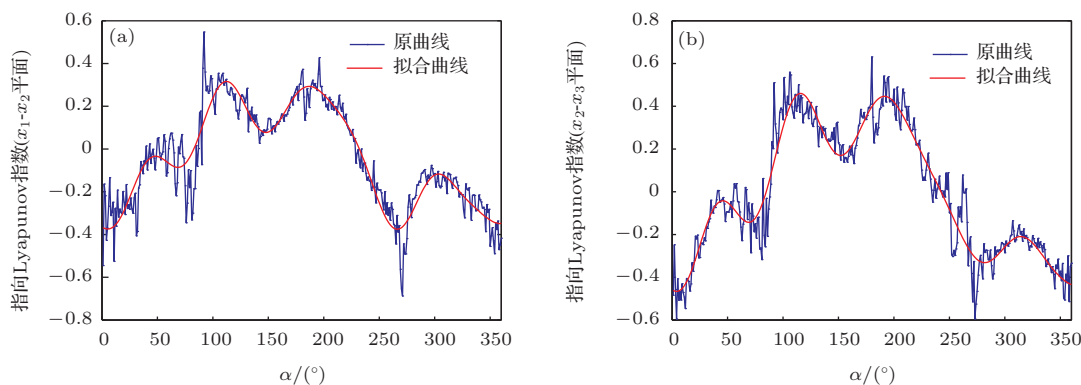


图 12 (网刊彩色) $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ 时求得的指向 Lyapunov 指数曲线及其拟合曲线 (a) x_1-x_2 平面; (b) x_2-x_3 平面

由图 12 可以看出, 拟合后曲线近似表示了各个方向上指向 Lyapunov 指数的大小. 当 R_2 为 $1 \text{ k}\Omega : 1 \text{ k}\Omega : 25 \text{ k}\Omega$ 时求得的各投影平面上的指向 Lyapunov 指数拟合曲线如图 13 所示. 其中, p_i , $i = 1, 2, 3, 4$ 及 d_i , $i = 1, 2, 3, 4$ 分别为正常状态下 ($R_2 = 10 \text{ k}\Omega$), 拟合指向 Lyapunov 指数曲线上对应的极大值及极小值.

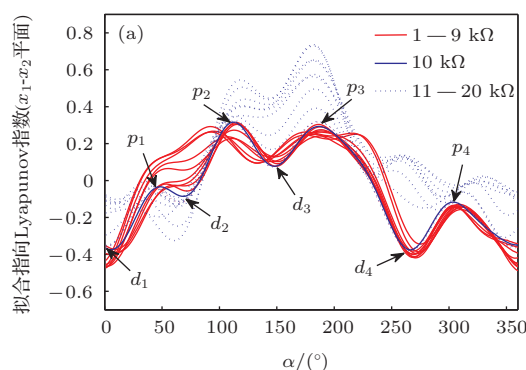


图 13(a) 所示为 R_2 变化时 x_1-x_2 平面求得的拟合指向 Lyapunov 指数曲线. 可以看到, 当 R_2 减小时, 其对指向 Lyapunov 指数曲线的主要影响是 d_2 的增大及 p_3 的向右偏离. 而当 R_2 增大时, 其对指向 Lyapunov 指数曲线的主要影响是 d_2 的减小、 p_2 和 p_3 的增大、 p_4 的向左偏离及其附近新的波峰波谷的出现.

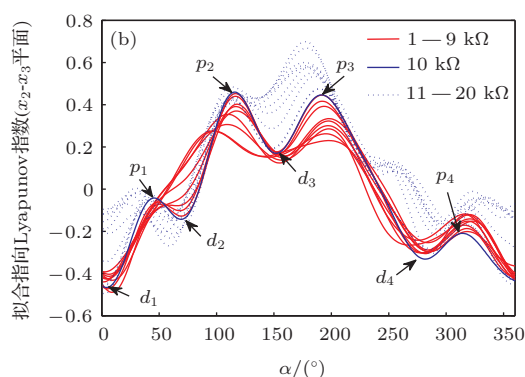


图 13 (网刊彩色) $R_2 = 1 \text{ k}\Omega : 1 \text{ k}\Omega : 10 \text{ k}\Omega$ 时求得的拟合指向 Lyapunov 指数曲线 (a) x_1-x_2 平面; (b) x_2-x_3 平面

图 13(b) 所示为 R_2 变化时 x_1-x_2 平面求得的拟合指向 Lyapunov 指数曲线. 可以看到, 当 R_2 减小时, 其对指向 Lyapunov 指数曲线的主要影响是 d_2 的增大及 p_2 和 p_3 的减小. 而当 R_2 增大时, 其对指向 Lyapunov 指数曲线的主要影响是 p_3 的增大、 p_4 的向左偏离增大及其附近新的波峰波谷的出现.

由 R_2 变化对指向 Lyapunov 指数曲线的影响可知, 参数变化对平衡点附近空间结构的影响主要是各个方向上发散速率的增大、减小及主要发散方向的偏离. 反映在指向 Lyapunov 指数曲线上为极值的增大、减小及极值的偏离. 互相关函数能够描述两信号之间的相互关系, 即两信号波形的相似程度及时间轴上的位置差别 [19], 因而适合对求得的指向 Lyapunov 指数曲线进行差别分析.

将 $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ 时, 由系统输出计算得到的指向 Lyapunov 指数作为基准 Lyapunov 指数, 分别求取 $R_2 = 1 \text{ k}\Omega : 1 \text{ k}\Omega : 10 \text{ k}\Omega$ 时的指向 Lyapunov 指数曲线, 并将它们与 $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ 时得到的结果进行相关处理. 计算得到相关系数的变化情况如图 14 所示.

由图 14 可以看到, 随着故障等级的增大, 相关系数逐渐降低. 因而, 本方法可以有效地对被测系统实施故障检测.

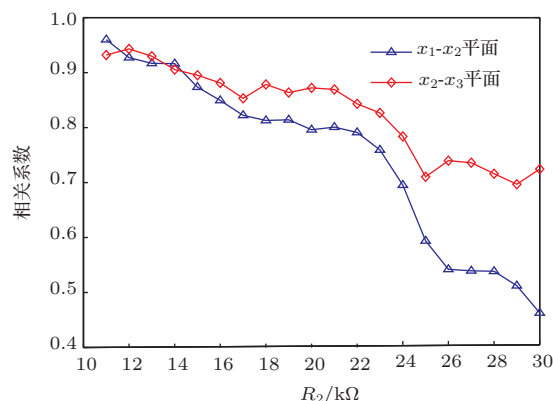


图 14 相关系数相对于 R_2 的变化

5 结 论

利用相空间重构技术实现对被测系统的故障检测的关键是要在相空间中找到一种对故障敏感的特征量. 指向 Lyapunov 指数能够反映系统在相空间中平衡点附近的特征结构, 与系统参数之间有密切的联系, 因而可以用来实现对被测系统的故障检测. 由于被测系统各元件的故障对平衡点附近特征结构影响不同, 因而对由输出计算得到的指向 Lyapunov 指数的影响也不尽相同. 同时, 被测系统某个元件发生渐变时, 指向 Lyapunov 指数曲线也有相应的渐变规律. 可以通过对这些信息的分析实现对被测系统故障元件的进一步定位.

参考文献

- [1] Isermann R, Balle P 1997 *Control Eng. Pract.* **5** 709
- [2] Logan D, Mathew J 1996 *Mech. Syst. Signal Pr.* **10** 241
- [3] Yang D D, Ma H G, Xu D H, Feng X W 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 120508 (in Chinese) [杨东东, 马红光, 徐东辉, 冯晓伟 2014 物理学报 **63** 120508]
- [4] Li Q H, Tan J Y 2011 *Chin. Phys. B* **20** 040505
- [5] Mandelbrot B B 1985 *Phys. Scripta* **32** 257
- [6] Nichols J M, Todd M D, Wait J R 2003 *Smart. Mater. Struct.* **12** 580
- [7] Todd M D, Erickson K, Chang L, Lee K, Nichols J M 2004 *Chaos* **14** 387
- [8] Xia H C, Zhan Y Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1299 (in Chinese) [夏恒超, 詹永麒 2004 物理学报 **53** 1299]
- [9] Nichols J M, Trickey S T, Todd M D, Virgin L N 2003 *Meccanica* **38** 239
- [10] Nichols J M, Nichols C J, Todd M D, Seaver M, Trickey S T, Virgin L N 2004 *Smart. Mater. Struct.* **13** 241
- [11] So P, Ott E, Sauer T 1997 *Phys. Rev. E* **55** 5398
- [12] Branicki M, Wiggins S 2005 *Physica D* **212** 271
- [13] Tanaka M L, Ross S D 2009 *Nonlinear Dynam.* **58** 1
- [14] Kugiumtzis D 1996 *Physica D* **95** 13
- [15] Melbourne I, Stuart A M 2011 *Nonlinearity* **24** 1361
- [16] Rossler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
- [17] Judd K, Mees A 1998 *Physica D* **120** 273
- [18] Nichkawde C 2013 *Phys. Rev. E* **87** 022905
- [19] Li W 1990 *J. Stat. Phys.* **60** 823

Directional Lyapunov exponent and its application to fault detection of the single input single output system*

Yang Dong-Dong[†] Ma Hong-Guang Xu Dong-Hui Liu Hao-Miao

(The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

(Received 25 May 2014; revised manuscript received 17 July 2014)

Abstract

In this paper, for the fault detection of a single-input single-output (SISO) system, we use chaotic oscillator to generate the excitation of the system under test (SUT), and use non-uniform method to reconstruct the phase space of the output time series. Directional Lyapunov exponent is defined around the equilibrium point in the phase space, and it is used to analyze the eigen-structure of the output phase space around its equilibrium point, thus the fault detection of the SISO system is realized. The simulation results show that parameter changes of the SUT will affect the phase space structure around its equilibrium point, and the directional Lyapunov exponent is sensitive to these changes.

Keywords: chaotic excitation, directional Lyapunov exponent, fault detection, single input single output system

PACS: 05.45.-a, 05.45.Ac, 05.45.Df, 06.60.Mr

DOI: 10.7498/aps.63.220505

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61174207).

† Corresponding author. E-mail: yd_xian@163.com