

基于 Coulomb 摩擦效应的一类非线性相对转动系统的混沌研究

刘爽 田松涛 王振臣 李建雄

Chaos of a kind of nonlinear relative rotation system based on the effect of Coulomb friction

Liu Shuang Tian Song-Tao Wang Zhen-Chen Li Jian-Xiong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 064501 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.064501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.064501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I6>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一类含三势阱 Mathieu-Duffing 振子的相对转动系统的分岔和混沌

Bifurcation and chaos of some relative rotation system with triple-well Mathieu-Duffing oscillator

物理学报.2014, 63(17): 174502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.174502>

一类两自由度参激系统在常数激励下的响应研究

Constant-excitation caused response in a class of parametrically excited systems with two degrees of freedom

物理学报.2014, 63(13): 134501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.134501>

一类含时变间隙的强非线性相对转动系统分岔和混沌

Bifurcation and chaos of some strongly nonlinear relative rotation system with time-varying clearance

物理学报.2014, 63(7): 074501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.074501>

一类含 Mathieu-Duffing 振子的相对转动系统的分岔和混沌

Bifurcation and chaos in some relative rotation systems with Mathieu-Duffing oscillator

物理学报.2013, 62(23): 234501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.234501>

一类非线性相对转动系统的混沌运动及多时滞反馈控制

Chaos and the control of multi-time delay feedback for some nonlinear relative rotation system

物理学报.2013, 62(9): 094502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.094502>

基于Coulomb摩擦效应的一类非线性相对转动系统的混沌研究*

刘爽¹⁾²⁾ 田松涛^{1)†} 王振臣¹⁾ 李建雄¹⁾²⁾

1)(燕山大学, 工业计算机控制工程河北省重点实验室, 秦皇岛 066004)

2)(国家冷轧板带装备及工艺工程技术研究中心, 秦皇岛 066004)

(2014年7月18日收到; 2014年9月9日收到修改稿)

研究一类非线性相对转动系统在负载Coulomb摩擦效应下的混沌运动行为. 根据Lagrange方程建立一类含非线性负载Coulomb摩擦阻尼的两个质量相对转动系统的动力学方程. 利用Cardano公式讨论自治系统的特征值, 在此基础上, 应用待定系数法给出系统同宿轨道的存在性, 并借助Silnikov定理研究了系统的混沌行为. 最后数值模拟了给定参数下系统的混沌运动, 并给出在Coulomb摩擦阻尼变化下系统由周期、倍周期通向混沌的途径, 验证了理论分析的正确性.

关键词: 相对转动系统, 混沌, Coulomb摩擦, 同宿轨道

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.64.064501

1 引言

转动是自然界中比较普遍的物理现象, Carmeli^[1,2]于1985和1986年创建了转动相对论力学理论, 1996年, Luo^[3,4]建立了转动相对论分析力学理论, 并成功应用于动力系统的对称性与守恒量等研究^[5-7]. 同时, 基于相对性原理, 相对转动系统在解析计算、稳定性、分岔和混沌等方面也取得了重要研究进展^[8-11].

相对转动系统是工程实际中一种广泛存在的动力传递系统, 如轧钢机、涡轮式发电机等大型旋转机械, 此类系统包含多种非线性因素, 如刚度、间隙和阻尼等, 会导致系统发生分岔、混沌等^[12-15]复杂动力学行为. 很多专家学者从不同方面对其进行了深入研究, 侯东晓等^[16]考虑了材料的滞后特性, 研究了一类含Davidenkov滞后环的非线性相对转动系统的动力学特性; Siewe等^[17]在研究周期驱动下Rayleigh-Duffing振子的Melnikov

混沌运动时, 重点考虑了非线性阻尼扰动因素; Wang等^[18]则把间隙作为重要因素, 研究了一类齿轮转动系统的分岔和混沌.

此外, 在相对转动系统中, 摩擦阻尼是一个广泛存在且不容忽视的非线性因素, 这在大型旋转机械的研究中显得更为突出, 受到了不少专家学者的关注. 唐荣荣^[19]考虑了一类广义摩擦阻力和非线性弹性力, 研究了相对转动系统在不同激励下系统的近似解与稳定性问题; 刘爽等^[20]研究了一类含广义非线性负载摩擦阻尼的相对转动系统的Hopf分岔现象, 并对其进行了有效控制; Thomsen和Fidlin^[21]考虑了一类广义非线性黏滑摩擦力, 研究了传动系统黏滑振动幅值的近似解析.

本文在文献^[20]Hopf分岔研究的基础上, 提出一种Coulomb摩擦阻尼, 并进一步研究了系统在该阻尼作用下的混沌运动. 首先应用Lagrange方程建立一类含非线性负载Coulomb摩擦阻尼的两质量非线性相对转动系统的动力学方程; 其次利用

* 国家自然科学基金(批准号: 61104040)、河北省自然科学基金(批准号: E2012203090)和河北省高等学校创新团队领军人才培育计划项目(批准号: LJRC013)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: tian.song.tao@163.com

Cardano 公式讨论系统的特征值, 在此基础上, 应用待定系数法给出系统同宿轨道的存在性, 并借助 Silnikov 定理给出了系统存在混沌的判据^[22-24]; 最后数值模拟了给定参数下系统的混沌运动, 得到了 Coulomb 摩擦阻尼变化下的分岔图、最大 Lyapunov 指数图、相轨迹图和 Poincaré 截面图, 并给出系统由周期、倍周期通向混沌的途径, 验证了理论分析的正确性.

2 系统的非线性动力学方程

研究两质量非线性相对转动系统, 系统的动能和势能分别为

$$E = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} J_i \dot{\theta}_i^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2, \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2} K (\theta_1 - \theta_2)^2, \quad (2)$$

式中 $J_i (i = 1, 2)$ 为系统集中质量的转动惯量, $\theta_i (i = 1, 2)$ 为系统集中质量的扭转角, $\dot{\theta}_i (i = 1, 2)$ 为集中质量的角速度, K 为系统扭转刚度.

系统的 Lagrange 函数 L 为

$$L = E - U = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} K (\theta_1 - \theta_2)^2, \quad (3)$$

广义力矩为

$$Q_i = \sum_{j=1}^2 F_j^i \frac{\partial \theta_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2), \quad (4)$$

式中 $F_j^i = T_i + F_j^c$, F_j^c 为系统广义阻尼力, T_i 为广义外力矩, $q_j (j = 1, 2)$ 为广义坐标.

现考虑一类相对转动系统中广泛存在的 Coulomb 摩擦阻尼, 对于轧机主传动系统这一典型相对转动系统, 由文献^[25]可知, 在研究润滑油膜厚度 ε 模型和摩擦因数 μ 返算方法的基础上, 拟合得出了两者的定量关系如下:

$$\mu = a_0 + a e^{B\varepsilon\varepsilon}, \quad (5)$$

式中 a_0 为液体摩擦影响系数, a 为干摩擦影响系数; $B\varepsilon$ 为摩擦因数衰减指数.

为便于系统的动力学特性研究, 现重点考虑负载表面线速度 v_r 与摩擦因数的作用关系, 在一定条件下油膜厚度 ε 模型可表示为

$$\varepsilon = b_0 v_r + c_0, \quad (6)$$

式中 b_0 和 c_0 为相应常数.

将 (6) 式代入 (5) 式中, 得到

$$\mu = a_0 + a e^{-bv_r+c}, \quad (7)$$

式中 b 和 c 为相应的摩擦系数.

由 Coulomb 定律, 并结合 (7) 式可得负载 Coulomb 摩擦阻尼力矩 T_f 为

$$T_f = P\mu R = PRa_0 + PRa e^{-bv_r+c}, \quad (8)$$

式中 P 为轧制力, R 为负载半径, 则 $v_r = R\dot{\theta}_2$.

则系统的广义阻尼力 F_1^c, F_2^c 为

$$\begin{aligned} F_1^c &= -C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \\ F_2^c &= C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - T_f, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 C 为系统结构阻尼.

将 (1)–(4) 式和 (9) 式代入含耗散项的广义 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} + \frac{\partial F}{\partial \theta_i} = Q_i \quad (i = 1, 2), \quad (10)$$

得到

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K(\theta_1 - \theta_2) = T_1, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 - C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - K(\theta_1 - \theta_2) = -T_2 - T_f, \end{cases} \quad (11)$$

式中 $\ddot{\theta}_i (i = 1, 2)$ 为系统集中质量的角加速度, T_1 与 T_2 分别为转轴两端受到的加载力矩与负载力矩.

实际中不可避免地存在负载扰动, 现将负载力矩 T_2 分为恒定负载力矩 T_{20} 和负载扰动力矩 T_{21} , 即: $T_2 = T_{20} + T_{21}$. 假定加载力矩 T_1 为恒定值, 令 θ_{10} 与 θ_{20} 分别为恒定加载力矩 T_1 和 T_{20} 共同作用下造成的转轴两端的扭转角, φ_1 与 φ_2 分别为负载扰动力矩 T_{21} 作用下造成的转轴两端的扭转波动角, 不难得出:

$$\theta_1 = \theta_{10} + \varphi_1, \quad \theta_2 = \theta_{20} + \varphi_2, \quad (12)$$

$$\dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{20}, \quad \ddot{\theta}_{10} = \ddot{\theta}_{20} = 0. \quad (13)$$

将 (8), (12) 和 (13) 式代入 (11) 式中, 并将摩擦阻尼力矩 T_f 在稳定转速 $\dot{\theta}_{20}$ 处泰勒公式展开, 取前两项, 整理后得

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + K(\Delta\theta + \varphi_1 - \varphi_2) = T_1, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - C(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - K(\Delta\theta + \varphi_1 - \varphi_2) = -T_2 - PRa_0 \\ \quad - PR\mu_0 \left(1 - bR\dot{\varphi}_2 + \frac{b^2 R^2}{2} \varphi_2^2 \right), \end{cases} \quad (14)$$

其中 $\Delta\theta = \theta_{10} - \theta_{20}$, $\mu_0 = a e^{-bR\dot{\theta}_{20}+c}$.

当 $T_{21} = 0$, 即系统在恒定力矩 T_1 和 T_{20} 作用下运行时, 有 $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, 将此式代入 (14) 式中得

$$\begin{cases} K\Delta\theta = T_1, \\ K\Delta\theta = T_{20} + PRa_0 + PR\mu_0. \end{cases} \quad (15)$$

将 (15) 式代入 (14) 式, 并整理得到

$$\begin{cases} J_1\ddot{\varphi}_1 + C(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + K(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \\ J_2\ddot{\varphi}_2 - C\dot{\varphi}_1 + (C - Pb\mu_0R^2)\dot{\varphi}_2 \\ + \frac{P\mu_0b^2R^3}{2}\dot{\varphi}_2^2 - K(\varphi_1 - \varphi_2) = -T_{21}. \end{cases} \quad (16)$$

令 $c_1 = \frac{K}{J_1}$, $c_2 = \frac{C}{J_1}$, $c_3 = \frac{K}{J_2}$, $c_4 = \frac{C}{J_2}$,
 $c_5 = \frac{C - Pb\mu_0R^2}{J_2}$, $c_6 = \frac{P\mu_0b^2R^3}{2J_2}$, $F = \frac{T_{21}}{J_2}$, (16) 式可简化为

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + c_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \\ \ddot{\varphi}_2 - c_4\dot{\varphi}_1 + c_5\dot{\varphi}_2 + c_6\dot{\varphi}_2^2 \\ - c_3(\varphi_1 - \varphi_2) = -F. \end{cases} \quad (17)$$

上式是一类含负载 Coulomb 摩擦阻尼的两质量非线性相对转动系统在负载扰动力矩作用下的动力学方程, 是研究系统动力学行为的基础. 工程实际中温度、润滑等摩擦条件的变化会改变系统的摩擦阻尼, 从而影响整个系统的动力学行为. 下面基于此方程研究负载 Coulomb 摩擦阻尼作用下系统的混沌运动行为.

3 系统混沌特性分析

3.1 平衡点及特征值分析

令 $x_1 = \varphi_1 - \varphi_2$, $x_2 = \dot{\varphi}_1$, $x_3 = \dot{\varphi}_2$, 则方程 (17) 可化为如下等价一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -c_1x_1 - c_2x_2 + c_2x_3, \\ \dot{x}_3 = c_3x_1 + c_4x_2 - c_5x_3 - c_6x_3^2 - F. \end{cases} \quad (18)$$

在负载摩擦阻尼力作用下, 为研究系统受扰动后产生的响应, 在此令扰动力矩 $T_{21} = 0$, 则 $F = 0$, 得到如下三维自治系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -c_1x_1 - c_2x_2 + c_2x_3, \\ \dot{x}_3 = c_3x_1 + c_4x_2 - c_5x_3 - c_6x_3^2. \end{cases} \quad (19)$$

不难得出, 该系统的平衡点 $x_0^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ 有两个: $x_0(0, 0, 0)$, $x'_0\left(0, \frac{c_4 - c_5}{c_6}, \frac{c_4 - c_5}{c_6}\right)$. 系统在平衡点 x_0^* 处的 Jacobian 矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -c_1 & -c_2 & c_2 \\ c_3 & c_4 & -c_5 - 2c_6x_3^* \end{bmatrix}. \quad (20)$$

对于平衡点 $x_0(0, 0, 0)$, 有

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -c_1 & -c_2 & c_2 \\ c_3 & c_4 & -c_5 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其特征方程为

$$\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0, \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} p_1 &= c_2 + c_5, \\ p_2 &= c_2c_5 - c_2c_4 + c_1 + c_3, \\ p_3 &= c_1c_5 - c_1c_4. \end{aligned}$$

令 $\lambda = u - \frac{p_1}{3}$, 则 (22) 式变为

$$u^3 + pu + q = 0, \quad (23)$$

其中

$$p = p_2 - \frac{p_1^2}{3}, \quad q = p_3 - \frac{p_1p_2}{3} + \frac{2p_1^3}{27}.$$

由 Cardano 公式可知, 若满足:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \\ &< \min\left(\frac{p_1}{3}, -\frac{2p_1}{3}\right), \end{aligned} \quad (25)$$

则平衡点 x_0 是一个鞍焦点, 特征方程 (22) 存在一个实根 α 和一对共轭复根 $\beta \pm i\omega$, 且满足 $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $|\alpha| > \beta > 0$.

同理, 对于平衡点 $x'_0\left(0, \frac{c_4 - c_5}{c_6}, \frac{c_4 - c_5}{c_6}\right)$, 可用同样的方法验证其是否是一个鞍焦点.

3.2 同宿轨道分析

下面利用待定系数法讨论系统 (19) 通过平衡点 $x_0^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ 的同宿轨道.

当 $t > 0$ 时, 即考虑正向时间轨道, 此时令:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1^* + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{k\alpha t}, \\ x_2(t) = x_2^* + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{k\alpha t}, \\ x_3(t) = x_3^* + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k e^{k\alpha t}, \end{cases} \quad (26)$$

其中 a_k, b_k, d_k 为待定系数; α 为矩阵 \mathbf{A} 的负实根. 将 (26) 式代入系统 (19), 比较 $e^{k\alpha t}$ 相同次幂系数, 当 $k = 1$ 时, 可得

$$\begin{cases} a_1\alpha = b_1 - d_1, \\ b_1\alpha = -a_1c_1 - b_1c_2 + c_2d_1, \\ d_1\alpha = a_1c_3 + b_1c_4 - c_5d_1 - 2c_6d_1x_3^*, \end{cases}$$

即

$$(\alpha I - \mathbf{A}) \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = 0; \quad (27)$$

当 $k = 2$ 时, 有

$$(2\alpha I - \mathbf{A}) \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_6d_1^2 \end{bmatrix}; \quad (28)$$

同理, 当 $k \geq 3$ 时, 可以得出

$$(k\alpha I - \mathbf{A}) \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ d_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_6 \sum_{i+j=k} d_i d_j \end{bmatrix}. \quad (29)$$

由平衡点分析中可知, 若系统满足条件 (24) 和 (25) 式, 则 Jacobian 矩阵 \mathbf{A} 有惟一负特征根 α , 此时只有惟一的一个负数 α 使得 $\det(\alpha I - \mathbf{A}) = 0$, 由 (27) 式可知, (a_1, b_1, d_1) 有非零解, 并可由一个自由参数 ξ 表示. 由于 $\det(k\alpha I - \mathbf{A}) \neq 0 (k > 1)$, 则 $(a_k, b_k, d_k) (k > 1)$ 有与参数 ξ 有关的惟一解, 并可由下式确定:

$$\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ d_k \end{bmatrix} = (k\alpha I - \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_6 \sum_{i+j=k} d_i d_j \end{bmatrix}. \quad (30)$$

则 (26) — (30) 式确定了系统 (19) 的正向时间轨道 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$.

当 $t < 0$ 时, 求解过 $x_0^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ 的反向时间轨道, 令 $\tau = -t (t > 0)$, 系统 (19) 可变为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_2 & -c_2 \\ -c_3 & -c_4 & c_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_6 x^2 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

其中 $x'_1 = \frac{dx_1}{d\tau}, x'_2 = \frac{dx_2}{d\tau}, x'_3 = \frac{dx_3}{d\tau}$. 令:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = x_1^* + \sum_{k=1}^{+\infty} a'_k e^{-k\gamma\tau} \\ x_2(\tau) = x_2^* + \sum_{k=1}^{+\infty} b'_k e^{-k\gamma\tau} \\ x_3(\tau) = x_3^* + \sum_{k=1}^{+\infty} d'_k e^{-k\gamma\tau} \end{cases} \quad (32)$$

为系统的反向时间轨道, 其中 a'_k, b'_k, d'_k 为待定系数; γ 为待定负实数. 同 $t > 0$ 时类似, 把 (32) 式代入 (31) 式中, 比较 $e^{-k\gamma\tau}$ 相同次幂系数可得, 当 $k = 1$ 时,

$$(\gamma I - \mathbf{A}) \begin{bmatrix} a'_1 \\ b'_1 \\ d'_1 \end{bmatrix} = 0; \quad (33)$$

同理, 当 $k > 1$ 时, 可得

$$(k\gamma I - \mathbf{A}) \begin{bmatrix} a'_k \\ b'_k \\ d'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_6 \sum_{i+j=k} d'_i d'_j \end{bmatrix}. \quad (34)$$

令 $\gamma = \alpha$, 由于 $\det(\alpha I - \mathbf{A}) = 0$, 则上式有非零解 (a'_1, b'_1, d'_1) , 且可由一个自由参数 η 表示. 令 $\xi = \eta$, 显然 $a'_k = a_k, b'_k = b_k, d'_k = d_k$, 且 η 值可由 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 在 $t = 0$ 处的连续性确定. 又 $\det(k\alpha I - \mathbf{A}) \neq 0 (k > 1)$, 则 (a'_k, b'_k, d'_k) 可由下式惟一确定:

$$\begin{bmatrix} a'_k \\ b'_k \\ d'_k \end{bmatrix} = (k\alpha I - \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_6 \sum_{i+j=k} d'_i d'_j \end{bmatrix}. \quad (35)$$

(32) — (35) 式惟一确定了系统 (19) 的反向时间轨道 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$.

综合 $t > 0$ 和 $t < 0$ 两种情况, 系统通过平衡点 $x_0^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ 的同宿轨道可表示为

$$x_1(t) = \begin{cases} x_1^* + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{k\alpha t} & t \geq 0, \\ x_1^* + \sum_{k=1}^{+\infty} a'_k e^{-k\alpha t} & t < 0; \end{cases} \quad (36)$$

$$x_2(t) = \begin{cases} x_2^* + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{k\alpha t} & t \geq 0, \\ x_2^* + \sum_{k=1}^{+\infty} b'_k e^{-k\alpha t} & t < 0; \end{cases} \quad (37)$$

$$x_3(t) = \begin{cases} x_3^* + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k e^{k\alpha t} & t \geq 0, \\ x_3^* + \sum_{k=1}^{+\infty} d'_k e^{-k\alpha t} & t < 0; \end{cases} \quad (38)$$

其中 η 值由

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a'_k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \sum_{k=1}^{+\infty} b'_k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} d_k = \sum_{k=1}^{+\infty} d'_k$$

确定.

下面讨论由 (36), (37) 和 (38) 式给出的同宿轨道的一致收敛性. 根据 (29) 式, 由递推法可得

$$\begin{aligned} & \| (a_k, b_k, d_k)^T \|_{\infty} \\ & \leq \prod_{i=2}^k \| (i\alpha I - \mathbf{A})^{-1} \|_{\infty} \\ & \quad \times (k-1)c_6^k \| (a_1, b_1, d_1)^T \|_{\infty}^k. \end{aligned}$$

由于

$$\| (i\alpha I - \mathbf{A})^{-1} \|_{\infty} = O(k^{-1}) \leq M k^{-1},$$

其中 M 为一个足够大的正整数, 则有

$$\| (a_k, b_k, d_k)^T \|_{\infty} \leq \frac{M^k (k-1)}{k!} c_6^k \| (a_1, b_1, d_1)^T \|_{\infty}^k.$$

上式说明 $\sum_{k=1}^{\infty} \| (a_k, b_k, d_k)^T \|_{\infty}$ 是一致收敛的, 因此 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} |d_k|$ 也是一致收敛的, 即存在一个正整数 L , 使得

$$|a_k| \leq L, \quad |b_k| \leq L, \quad |d_k| \leq L.$$

因此当 $t > 0$ 时,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{k\alpha t}| \leq L \sum_{k=1}^{\infty} e^{k\alpha t},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k e^{k\alpha t}| \leq L \sum_{k=1}^{\infty} e^{k\alpha t},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_k e^{k\alpha t}| \leq L \sum_{k=1}^{\infty} e^{k\alpha t}$$

是一致收敛的. 同理可证当 $t < 0$ 时同宿轨道的表达式也是一致收敛的.

通过以上讨论, 可以得出如下结论:

若 (24), (25) 式同时成立, 则系统 (19) 的平衡点 $x_0^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ 是鞍焦点, 且该系统具有通过平衡点 x_0^* 的同宿轨道, 根据 Silnikov 定理可知, 此时系统 (19) 存在 Silnikov 型 Smale 马蹄意义下的混沌.

4 数值分析

令系统参数 $c_1 = 0.8$, $c_2 = -1.2$, $c_3 = 1.2$, $c_4 = 1.8$, c_5 与 c_6 随摩擦系数 b 的变化而变化, 保持其他参数不变, 通过改变摩擦系数 b 的大小, 得到 $b \in [0.0178, 0.0222]$ 时系统的分岔图和对应的最大 Lyapunov 指数图, 如图 1 和图 2 所示, 从图中可看出系统由倍周期分岔进入混沌运动的途径以及混沌运动的区域.

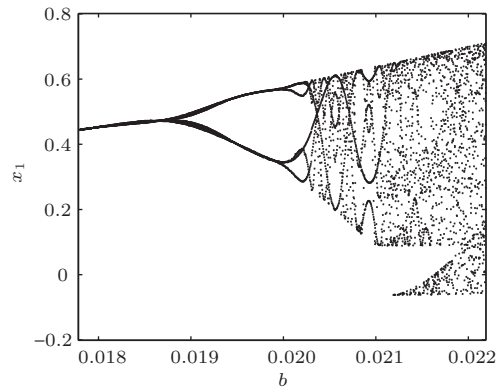


图1 分岔图

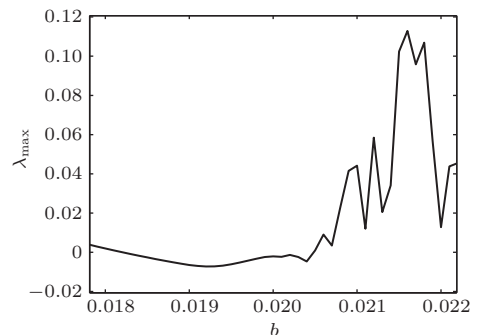


图2 最大 Lyapunov 指数图

在图 1 中混沌区域内取 b 的值, 这里不妨取 $b = 0.0218$, 此时 $c_5 = 3.544$, $c_6 = 1.1881$,

系统(19)的两个平衡点分别为: $x_0(0, 0, 0)$, $x'_0(0, -1.4679, -1.4679)$. 经计算可知: 对于平衡点 x'_0 , 将参数代入(24)和(25)式可得: $\Delta = 1.8115 > 0$, $\Gamma = -0.0149 < -0.3813$, 显然两式不能同时成立. 对于平衡点 x_0 , 有 $\Delta = 1.2023 > 0$, $\Gamma = -1.8068 < -1.5627$, 即(24)和(25)式同时成立, 由前面理论分析可知, 此时系统具有通过 x_0

的同宿轨道, 存在 Silnikov 型 Smale 意义下的混沌. 为进一步验证此时系统的混沌运动状态, 图 3(a) 和 (b) 分别描述了系统的相轨迹和 Poincaré 截面. 从图中可以直观地看出系统做混沌运动, 说明数值仿真结果和理论分析是符合的. 另外, 当 $b = 0.0218$ 时, 求得最大 Lyapunov 指数 $\lambda_{\max} = 0.091411 > 0$, 也可表明系统的混沌运动状态.

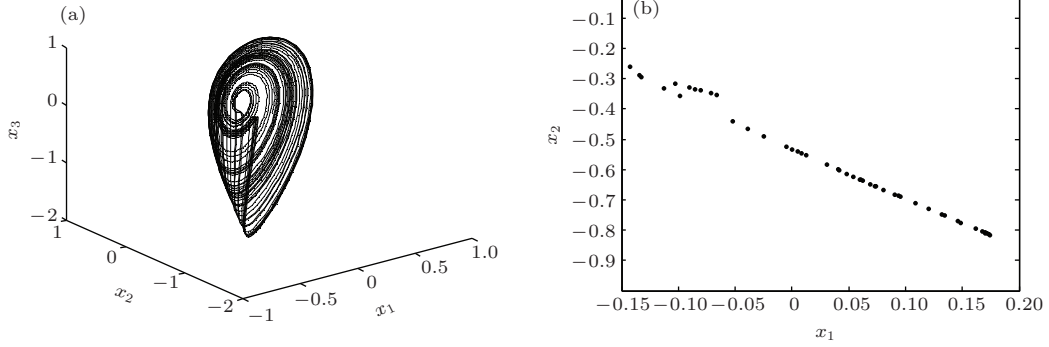


图3 $b = 0.0218$ 时系统的相轨迹图和 Poincaré 截面图 (a) 相轨迹图; (b) Poincaré 截面图

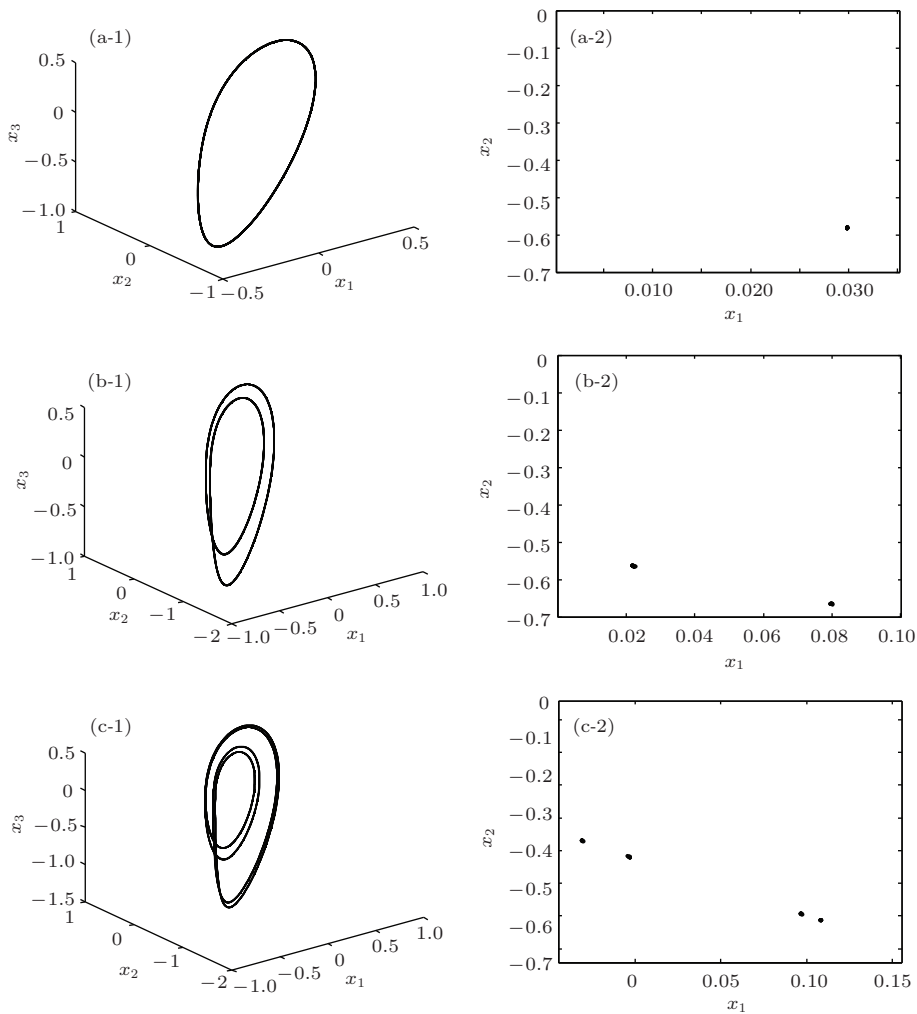


图4 b 取不同值时系统的相轨迹(-1)和 Poincaré 截面图(-2) (a-1), (a-2) $b = 0.018$; (b-1), (b-2) $b = 0.0194$; (c-1), (c-2) $b = 0.0201$

为进一步描述系统由倍周期分岔通向混沌的途径,图4给出了摩擦系数 b 取不同值时系统的相轨迹图和Poincaré截面图.从图中可以明显看出,当 $b = 0.018$ 时,系统做稳定的单周期运动,如图4(a)所示;当 $b = 0.0194$ 时,系统处于周期2运动状态,如图4(b)所示;当 $b = 0.0201$ 时,系统做周期4运动,如图4(c)所示;当 $b = 0.0218$ 时,系统做混沌运动,如图3所示.

5 结 论

本文研究了一类含非线性负载Coulomb摩擦阻尼的相对转动系统的混沌运动,借助Silnikov定理给出了系统产生混沌的条件,最后数值模拟了给定参数下系统的混沌运动以及摩擦阻尼对系统混沌运动的影响,验证了理论分析的正确性.研究发现,不同的摩擦阻尼会导致系统的运动状态发生变化,甚至出现混沌运动行为,导致系统振动剧烈,因此,通过调节实际中的温度、润滑等摩擦条件可以改变摩擦阻尼,进而影响系统的运动状态,这为减少大型旋转机械的振动危害提供了理论指导.

参考文献

- [1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
- [2] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **25** 89
- [3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16** 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16** 154]
- [4] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
- [5] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 429
- [6] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449
- [7] Luo S K 2003 *Chin. Phys.* **12** 357
- [8] Wang X Y, Wang M J 2008 *Physica A* **387** 3751
- [9] El-Bassiouny A F 2006 *Physica A* **366** 167
- [10] Kim T C, Rook T E, Singh R 2005 *J. Sound Vib.* **281** 965
- [11] Wang X Y, Liang Q Y, Meng J 2008 *Int. J. Mod. Phys. C* **19** 1389
- [12] Xu J X, Sun Z C 2001 *Chin. Phys.* **10** 599
- [13] Wang X Y, Liang Q Y 2008 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **13** 913
- [14] Shi P M, Han D Y, Liu B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 090306
- [15] Wang X Y, Luo C, Meng J 2009 *Appl. Math. Comput.* **207** 63
- [16] Hou D X, Liu B, Shi P M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5942 (in Chinese) [侯东晓, 刘彬, 时培明 2009 物理学报 **58** 5942]
- [17] Siewe Siewe M, Tchawoua C, Wofo P 2010 *Mech. Res. Commun.* **37** 363
- [18] Wang J, Zheng J H, Yang A B 2012 *Proced. Engineer.* **31** 563
- [19] Tang R R 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 200201 (in Chinese) [唐荣荣 2012 物理学报 **61** 200201]
- [20] Liu S, Liu B, Shi P M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4383 (in Chinese) [刘爽, 刘彬, 时培明 2009 物理学报 **58** 4383]
- [21] Thomsen J J, Fidlin A 2003 *Int. J. Non-Linear Mech.* **38** 389
- [22] Wang X Y, Luo C 2006 *Appl. Math. Comput.* **183** 30
- [23] Zhu S Q, Yang M, Zhang X H, Min L Q 2005 *J. Beijing Sci. Technol.* **27** 635 (in Chinese) [朱淑芹, 杨淼, 张先华, 闵乐泉 2005 北京科技大学学报 **27** 635]
- [24] Zhou T S, Chen G R, Yang Q G 2004 *Chaos, Soliton. Fract.* **19** 985
- [25] Bai Z H, Zhou Q T, Dou A M, Xu J, Wang J F 2007 *Iron and Steel* **42** 5 (in Chinese) [白振华, 周庆田, 窦爱民, 徐俊, 王骏飞 2007 钢铁 **42** 5]

Chaos of a kind of nonlinear relative rotation system based on the effect of Coulomb friction*

Liu Shuang¹⁾²⁾ Tian Song-Tao^{1)†} Wang Zhen-Chen¹⁾ Li Jian-Xiong¹⁾²⁾

1) (*Key Laboratory of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

2) (*National Engineering Research Center for Equipment and Technology of Cold Rolling Strip, Qinhuangdao 066004, China*)

(Received 18 July 2014; revised manuscript received 9 September 2014)

Abstract

Chaotic motion of a kind of nonlinear relative rotation system with load Coulomb frictional damping is investigated. Based on the Lagrange equation of a dissipative system, the dynamic equation of a kind of nonlinear relative rotation system with two pieces of mass is established, which contains a kind of nonlinear load Coulomb frictional damping. The eigenvalue of the autonomous system is discussed using Cardano formula. On this basis, the existence of homoclinic orbits is given by the undetermined coefficient method, and the chaotic motion of the system is investigated by means of Silnikov theorem. Finally the chaotic motion of the system with the known parameters is studied numerically. With the variation of Coulomb frictional damping, a route to chaos through period-doubling bifurcations is exhibited. Numerical calculation can confirm the validity of the analytical results.

Keywords: relative rotation system, chaos, Coulomb friction, homoclinic orbit

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

DOI: [10.7498/aps.64.064501](https://doi.org/10.7498/aps.64.064501)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61104040), the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. E2012203090), and University Innovation Team of Hebei Province Leading Talent Cultivation Project, China (Grant No. LJRC013).

† Corresponding author. E-mail: tian.song.tao@163.com