

交替寻优生成元素幅值结合混沌随机相位构造循环测量矩阵

郭静波 汪韧

Constructing circulant measurement matrix through alternating optimizing amplitudes together with chaotic stochastic phases of the matrix generating elements

Guo Jing-Bo Wang Ren

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 64, 130702 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.130702

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130702>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I13>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

两级式光伏并网逆变器建模与非线性动力学行为研究

Numerical modeling and research on nonlinear dynamic behaviors of two-stage photovoltaic grid-connected inverter

物理学报.2015, 64(13): 130503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130503>

基于对偶数理论的资料同化新方法

A new data assimilation method based on dual-number theory

物理学报.2015, 64(13): 130502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130502>

一类可变禁区的不连续系统的加周期分岔

Period-adding bifurcations in a discontinuous system with a variable gap

物理学报.2015, 64(12): 120502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.120502>

一种基于选择性测量的自适应压缩感知方法

An adaptive compressed sensing method based on selective measure

物理学报.2014, 63(20): 200701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.200701>

基于马尔科夫链蒙特卡罗的时延估计算法

Time delay estimation using Markov Chain Monte Carlo method

物理学报.2014, 63(13): 130701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.130701>

交替寻优生成元素幅值结合混沌随机相位构造循环测量矩阵*

郭静波[†] 汪轲

(清华大学电机工程与应用电子技术系, 电力系统国家重点实验室, 北京 100084)

(2014年10月21日收到; 2015年2月2日收到修改稿)

循环矩阵由于其对应离散卷积且具有快速算法被广泛应用于压缩测量矩阵. 本文从循环测量矩阵生成元素的幅值和相位两个方面探索循环测量矩阵的优化构造, 提出交替寻优生成元素的幅值并结合混沌随机相位实现循环测量矩阵的最优构造. 由一维和二维信号循环测量矩阵的不同表示形式出发, 将等价字典列向量之间互相干系数的 Welch 界作为逼近目标, 推导出了一维和二维信号循环测量矩阵生成元素幅值优化的统一数学模型, 提出采用交替寻优方法求解生成元素幅值的最优解. 利用混沌序列构造循环测量矩阵生成元素的随机相位. 与已有的典型循环测量矩阵相比, 本文优化构造的循环测量矩阵所对应的等价字典列向量之间具有更低的互相干性, 这正是所构造的循环测量矩阵优越性的本质所在.

关键词: 压缩感知, 循环矩阵, 交替寻优, 混沌序列

PACS: 07.50.Qx, 05.45.-a, 05.45.Vx

DOI: 10.7498/aps.64.130702

1 引言

2006年由Donoho, Candès等提出的压缩感知(compressive sensing, CS)^[1,2]是信号采样的全新框架. 它可实现以远低于奈奎斯特的采样率去采样稀疏信号, 并以高概率实现原信号的准确恢复. CS理论主要包括信号的稀疏表示、信号的压缩测量(或投影)以及从压缩测量中恢复信号三个方面. 设信号为 $\mathbf{f}$, 该信号在 $\Psi \in \mathbb{C}^{n \times K}$ 上的稀疏表示为 $\mathbf{f} = \Psi \mathbf{x}$, $n = K$ 时 Ψ 称为稀疏基, $n < K$ 时 Ψ 称为稀疏字典; $\mathbf{x}$ 为信号 $\mathbf{f}$ 在 Ψ 下的系数, 其中不为零系数的个数远小于其维数. 信号的压缩测量是考虑在噪声条件下用测量矩阵 $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n} (m \ll n)$ 将高维的原始信号投影到低维的测量向量上, 即 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{f} + \mathbf{n} = \Phi \Psi \mathbf{x} + \mathbf{n} = \mathbf{D} \mathbf{x} + \mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ 为噪声), 其中 $\mathbf{D} = \Phi \Psi (\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{m \times K}, m \ll K)$ 称为等价字典(equivalent dictionary), 测量向量 $\mathbf{y}$ 的维数远低于原信号 $\mathbf{f}$ 的维数. 信号的恢复是利用极小化 l_1 范数

法或贪婪算法^[3,4]等从测量向量中准确地恢复出原信号. CS提出后引起了学术界的广泛关注, 它在数字信号处理、信息论、通信、光学成像、雷达等领域受到高度关注^[5,6].

压缩测量矩阵的构造是CS的核心工作之一. 在所有的测量矩阵中, 循环测量矩阵因结构的特殊性具有适合于CS应用的诸多优点, 以处理一维信号的循环矩阵为例, 循环矩阵 $\mathbf{C}$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{F} \cdot \text{diag}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{F}^* \\ &= \mathbf{F} \cdot \text{diag}(\sqrt{n} \mathbf{F} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}^*, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, n 为矩阵的列数, $\mathbf{F}$ 为DFT矩阵, $\mathbf{v}$ 为循环矩阵的第一行, $\mathbf{d}$ 中的元素称为循环矩阵 $\mathbf{C}$ 的生成元素(generating elements). 循环测量矩阵在CS中应用的突出优点表现在: 1) 由于循环矩阵的每一行是由上一行右移一位得到, 故需要存储的独立变量少; 2) 用循环矩阵进行 $\mathbf{C} \mathbf{x}$ 和 $\mathbf{C}^* \mathbf{y}$ 计算时, 可以利用FFT和简单的分量式运算(component-wise

* 国家自然科学基金(批准号: 51277100)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: guojb@tinghua.edu.cn

operations) 实现快速计算, 这比矩阵与向量直接相乘的计算速度快很多; 3) 用循环矩阵测量信号实际上是对信号做离散卷积, 可以解决诸多与卷积运算相关的理论与实际问题; 4) 目前已研究出与循环矩阵结构相匹配的CS恢复算法, 该算法有着满意的恢复效果和计算速度^[7]. 因此循环矩阵在CS研究中备受青睐.

目前国内外关于测量矩阵的优化算法主要针对随机测量矩阵的优化, 如Elad算法^[8], Duarte-Carvajalino算法^[9], Abolghasemi算法^[10]以及Xu和Li的训练算法^[11,12]等. 而针对具有循环结构的测量矩阵的研究主要分为按(1)式中的第一行 $\mathbf{v}$ ^[7,13]和按对角向量 $\mathbf{d}$ ^[14,15]的两大类构造方法. 就作者的知识面而言, 在这两类构造方法的基础上进一步去优化循环测量矩阵仅有Yin等^[16]的工作. Yin等从Gram矩阵 $\mathbf{G} = (\Phi\Psi)^* \Phi\Psi$ 在Frobenius范数下去逼近单位阵 $\mathbf{I}$ 的角度, 对循环测量矩阵生成元素的幅值进行优化, 并利用均匀分布的随机序列来构造循环测量矩阵生成元素的相位. 上述优化构造的循环矩阵在恢复性能上得以改善, 但该方法选取单位阵 $\mathbf{I}$ 作为Gram矩阵 $\mathbf{G}$ 的目标函数不尽合理^[10]. 这是由于等价字典 $\mathbf{D} = \Phi\Psi \in \mathbb{C}^{m \times K}$, 只有当 $m = K$ 时, Gram矩阵 $\mathbf{G}$ 才有可能等于单位阵 $\mathbf{I}$, 而在CS中 m 远小于 K . 另外, 该循环测量矩阵生成元素的相位虽然满足随机性要求, 但它需要存储的变量多、硬件上不易实现.

本文从循环测量矩阵生成元素的幅值和相位两个方面探索循环测量矩阵的优化构造, 提出交替寻优生成元素的幅值并结合混沌随机相位实现循环测量矩阵的最优构造. 相比于已有的循环测量矩阵, 本文的立意在于: 一是通过交替寻优生成元素的幅值以进一步减小等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间的互相干性, 从而提高循环测量矩阵的恢复性能; 二是利用混沌序列构造循环测量矩阵生成元素的随机相位, 其明显的优越性在于混沌的内在确定性与外在随机性的有机结合完全可以满足循环测量矩阵对随机性的要求, 并且混沌具有用电路实现的潜在优势^[17]. 该立意的出发点为:

1) 减小等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间的互相干性对于提高循环测量矩阵的恢复性能起着重要的作用:

从等价字典 $\mathbf{D}$ 需要满足的约束等距性(restricted isometry property, RIP)^[18]角度分析, RIP确保了矩阵 $\mathbf{D}$ 列向量的子集是接近于正交的, 该正交性正好反映出矩阵 $\mathbf{D}$ 列向量之间的不相干性.

即矩阵 $\mathbf{D}$ 列向量之间越不相干, 则其列向量的子集越接近于正交, 该矩阵越容易满足RIP特性.

从信号准确恢复的实际角度讲, 互相干性直接影响信号准确恢复所要求的稀疏度范围. 互相干性越小, 信号可被准确恢复时的稀疏度范围越宽^[19–21]. 所以, 从RIP特性的理论层面和信号准确恢复的实际要求这两个角度出发, 减小等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间的互相干性对于提高循环测量矩阵的恢复性能起着至关重要的作用. 等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间的互相干性可由其对应的Gram矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素来描述. 对于循环测量矩阵, 在稀疏基(字典)确定时, Gram矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素的值取决于循环测量矩阵生成元素的幅值. 基于此, 本文通过交替寻优生成元素的幅值来减小等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间的互相干性.

2) 考虑到循环矩阵对信号 $\mathbf{f}$ 的测量过程为 $\mathbf{C} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{F} \cdot \text{diag}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{f}$, 向量 $\mathbf{d}$ 中生成元素的相位必须设计为随机相位. 这是因为:

该测量过程相当于先将信号变换到频域, 在采样的过程中无法确定信号 $\mathbf{f}$ 在频域上的相位, 我们采用具有随机相位的循环测量矩阵对其进行测量. 从信息论角度讲, 这样做的结果更接近压缩感知的初衷. 同时为了确保CS的恢复性能, 测量结果 $\mathbf{C} \cdot \mathbf{f}$ 在时域上必须是分散的, 这就需要在测量过程中利用循环测量矩阵生成元素的随机相位将信号 $\mathbf{f}$ 在频域上的相位随机化, 使信号 $\mathbf{f}$ 在时域上无论是集中的还是分散的, 其测量结果 $\mathbf{C} \cdot \mathbf{f}$ 都能以高概率在时域上是分散的. 基于此, 本文利用混沌的优越性, 将向量 $\mathbf{d}$ 中循环测量矩阵生成元素的相位设计为混沌型的随机相位.

本文的工作主要包括以下四个方面:

1) 从一维和二维信号循环测量矩阵的不同表示形式出发, 在Frobenius范数下将等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间互相干系数的Welch界作为逼近目标, 确立了一维和二维信号的循环测量矩阵生成元素幅值优化的目标函数; 讨论了为什么通过优化循环测量矩阵生成元素的幅值来减小等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间的互相干性.

2) 推导出了一维和二维信号循环测量矩阵生成元素幅值优化的统一数学模型, 并在逼近互相干系数Welch界目标下, 通过交替寻优方法给出了一维和二维信号循环测量矩阵生成元素幅值优化的最优解.

3) 循环测量矩阵生成元素混沌型随机相位的

构造. 基于混沌序列独立性检验方法确定了满足循环测量矩阵随机性要求的混沌序列抽样间距, 实现了利用混沌序列构造循环测量矩阵生成元素的相位.

4) 最后给出了一维和二维信号的压缩测量仿真, 并从等价字典的 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素分布的角度分析了本文的循环测量矩阵优于已有循环测量矩阵的本质性原因.

2 循环测量矩阵生成元素幅值优化的目标函数

本文从一维和二维信号循环测量矩阵不同的表示形式出发, 将循环测量矩阵生成元素幅值优化的目标函数分为两种情形讨论.

2.1 一维信号的循环测量矩阵生成元素幅值优化的目标函数

对于一维信号而言, 用循环矩阵对信号 $\mathbf{f}$ 进行测量时, 测量结果 $\mathbf{C} \cdot \mathbf{f}$ 是信号 $\mathbf{f}$ 和循环矩阵的第一行 $\mathbf{v}$ 做循环卷积的结果. 由 (1) 式可以看出, 一维信号的循环测量矩阵由其对应的向量 $\mathbf{d}$ 生成, 记 $\mathbf{d}$ 中的元素为 $d_i = |d_i| e^{j\theta_i}$, 则一维信号的循环测量矩阵生成元素的幅值为 $|d_i|$, 相位为 θ_i .

这里采用测量矩阵 $\Phi = \mathbf{P}\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n} (m \ll n)$, $\mathbf{P}$ 表示对循环测量结果 $\mathbf{C} \cdot \mathbf{f}$ 在随机位置上进行采样, 所以在考虑等价字典 $\mathbf{D} = \Phi\Psi$ 列向量之间的互相干性时只需考虑矩阵 $\mathbf{C}\Psi$ 列向量之间的互相干性, 此时的 Gram 矩阵 $\mathbf{G} = (\mathbf{C}\Psi)^* \mathbf{C}\Psi$. 由 (1) 式和 $\mathbf{F}\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^* \mathbf{F} = \mathbf{I}$ 有 [16]

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= (\mathbf{C}\Psi)^* \mathbf{C}\Psi = \Psi^* \mathbf{C}^* \mathbf{C} \Psi \\ &= \Psi^* \mathbf{F} \text{diag}(\mathbf{d}^*) \mathbf{F}^* \mathbf{F} \text{diag}(\mathbf{d}) \mathbf{F}^* \Psi \\ &= \Psi^* \mathbf{F} \text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{F}^* \Psi, \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{x} = (|d_1|^2, |d_2|^2, \dots, |d_n|^2)^T. \quad (3)$$

(2) 式和 (3) 式直观地反映出在稀疏基 (字典) Ψ 确定时, Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素仅取决于循环测量矩阵 $\mathbf{C}$ 生成元素的幅值 $|d_i| (i = 1, \dots, n)$, 而 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素对应等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间的互相干性, 故通过优化循环测量矩阵生成元素的幅值来减小等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间的互相干性, 从而提高循环测量矩阵的恢复性能.

根据描述矩阵具有最小相干性的概念——等角紧框架 (equiangular tight frame, ETF) [22,23], 设定如下的目标函数

$$\min_{\mathbf{C}, \mathbf{H} \in \mathcal{H}_\mu} \|(\mathbf{C}\Psi)^* \mathbf{C}\Psi - \mathbf{H}\|_F^2, \quad (4)$$

其中, $\mathcal{H}_\mu$ 表示包含理想 ETF 的凸集, 定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\mu &= \{\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{K \times K} : \mathbf{H} = \mathbf{H}^T, \\ &\quad \text{diag } \mathbf{H} = \mathbf{1}, \max_{i \neq j} |h_{ij}| \leq \mu\}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\mu \geq \mu_E$, $\mu_E = \sqrt{\frac{K-n}{n(K-1)}}$ 是互相干系数的 Welch 界 [22], 即对应等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间的最小互相干性. 由于实数范围的理想 ETF 只有在 n 和 K 满足 $K \leq n(n+1)/2$ 时才存在, 在实际采样中受到信号和稀疏字典大小的限制, 不能保证 n 和 K 能满足上述不等式, 根据文献 [10] 通过引入 $\mu \geq \mu_E$ 来扩大搜索空间.

2.2 二维信号的循环测量矩阵生成元素幅值优化的目标函数

对于二维信号 $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ 和给定的核矩阵 $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$, 定义 $\mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ 上的二维循环算子为 $\mathcal{C}_2$, 用循环矩阵对二维图像信号 $\mathbf{f}$ 进行测量时, $\mathcal{C}_2(\mathbf{f})$ 表示图像 $\mathbf{f}$ 和矩阵 $\mathbf{M}$ 沿着上下和左右两个方向做循环卷积, $\mathcal{C}_2$ 可以表示为 [16]

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{F}_2 \mathcal{V} \mathcal{F}_2^*, \quad (6)$$

其中, $\mathcal{F}_2$ 表示 $\mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ 上正交的二维 DFT 算子; $\mathcal{F}_2^*$ 表示 $\mathcal{F}_2$ 的伴随算子, 也是其逆算子; $\mathcal{V}$ 是一种定义为 $\mathcal{V}(\mathbf{f}) = \mathbf{V} \odot \mathbf{f}$ 的算子, $\mathbf{V} = \sqrt{n_1 n_2} \mathcal{F}_2(\mathbf{M})$; $\odot$ 表示分量式乘法. 由 (6) 式可以看出, 二维信号的循环测量矩阵由其对应的矩阵 $\mathbf{V}$ 生成, 记 $\mathbf{V}$ 中的元素为 $V_{ij} = |V_{ij}| e^{j\theta_{ij}}$, 则二维信号的循环测量矩阵生成元素的幅值为 $|V_{ij}|$, 相位为 θ_{ij} .

本文利用 K-SVD 算法 [24] 得到二维信号 $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ 的过完备稀疏字典 $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_K]$ ($\psi_i \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2} (1 \leq i \leq K)$), 则二维信号 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 中的元素可以表示为 $g_{ij} = \langle \mathcal{C}_2(\psi_i), \mathcal{C}_2(\psi_j) \rangle$. 令算子 $\mathcal{U} = \mathcal{V}^* \mathcal{V}$, $\mathbf{U} = \text{conj}(\mathbf{V}) \odot \mathbf{V}$, 则 $\mathcal{U}(\mathbf{f}) = \mathbf{U} \odot \mathbf{f}$. 再令 $\mathbf{u} = \text{vec}(\mathbf{U})$, $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^K]$, 其中 $\mathbf{y}^s = \text{vec}(\mathcal{F}_2^*(\psi_s)) (s = 1, 2, \dots, K)$, 则 g_{ij} 可以简化为 [16]

$$g_{ij} = \langle \mathcal{C}_2(\psi_i), \mathcal{C}_2(\psi_j) \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \mathcal{F}_2 \mathcal{V} \mathcal{F}_2^* (\psi_i), \mathcal{F}_2 \mathcal{V} \mathcal{F}_2^* (\psi_j) \rangle \\
 &= (\mathbf{u} \odot \mathbf{y}^i)^* \mathbf{y}^j = \mathbf{u}^* (\text{conj}(\mathbf{y}^i) \odot \mathbf{y}^j).
 \end{aligned}$$

与一维信号的情形相似, 在稀疏字典 Ψ 确定时, 二维信号的 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 中非对角元素的值也仅取决于循环测量矩阵生成元素的幅值 $|V_{ij}|$. 故对于二维信号也可以通过优化循环测量矩阵生成元素的幅值来减小等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间的互相干性, 其优化的目标函数为

$$\min_{\mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathcal{H}_\mu} \|\mathbf{G} - \mathbf{H}\|_F^2 \quad \text{subject to} \quad g_{ij} = \langle \mathcal{C}_2(\psi_i), \mathcal{C}_2(\psi_j) \rangle. \quad (7)$$

该函数与 (4) 式的一维信号循环测量矩阵生成元素幅值优化的目标函数相类似.

以上讨论了为什么通过优化循环测量矩阵生成元素的幅值来减小等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间的互相干性、从而提高循环测量矩阵的恢复性能; 在 Frobenius 范数下将等价字典列向量之间互相干系数的 Welch 界作为逼近目标, 给出了一维和二维信号的循环测量矩阵生成元素幅值优化的目标函数. 在第三部分将通过交替寻优的方法求解上述的目标函数.

3 交替寻优循环测量矩阵生成元素幅值的最优解

本文将上述一维和二维信号循环测量矩阵生成元素幅值优化的目标函数分解为两个子问题, 采用交替寻优的方法来求解. 下面分别描述具体过程.

3.1 矩阵 $\mathbf{H}$ 固定时, 更新循环矩阵

1) 对于一维信号, 此时的目标函数为

$$\min_{\mathbf{C}} \|(\mathbf{C}\Psi)^* \mathbf{C}\Psi - \mathbf{H}\|_F^2. \quad (8)$$

令 $\mathbf{B} = \mathbf{F}^* \Psi \Psi^* \mathbf{F}$, $\bar{\mathbf{B}} = [|\mathbf{B}_{ij}|^2]$, 则有

$$\frac{1}{2} \|(\mathbf{C}\Psi)^* \mathbf{C}\Psi - \mathbf{H}\|_F^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \|\Psi^* \mathbf{F} \text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{F}^* \Psi - \mathbf{H}\|_F^2 \\
 &= \frac{1}{2} \text{tr}\{(\Psi^* \mathbf{F} \text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{F}^* \Psi - \mathbf{H})^* \\
 &\quad \times (\Psi^* \mathbf{F} \text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{F}^* \Psi - \mathbf{H})\} \\
 &= \frac{1}{2} \text{tr}\{\Psi^* \mathbf{F} \text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{B} \text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{F}^* \Psi \\
 &\quad - \Psi^* \mathbf{F} \text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{F}^* \Psi \mathbf{H} \\
 &\quad - \mathbf{H}^T \Psi^* \mathbf{F} \text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{F}^* \Psi + \mathbf{H}^T \mathbf{H}\} \\
 &= \frac{1}{2} \text{tr}\{\text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{B} \text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{B}\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{tr}\{\text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{F}^* \Psi \mathbf{H} \Psi^* \mathbf{F}\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{tr}\{\text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{F}^* \Psi \mathbf{H}^T \Psi^* \mathbf{F}\} + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{H}^T \mathbf{H}) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \text{diag}(\mathbf{B} \text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{B}) - \mathbf{x}^T \text{diag}(\mathbf{F}^* \Psi \mathbf{H} \Psi^* \mathbf{F}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{H}^2) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \text{diag}(\mathbf{F}^* \Psi \mathbf{H} \Psi^* \mathbf{F}) + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{H}^2).
 \end{aligned}$$

令列向量 $\mathbf{l}_1 = \text{diag}(\mathbf{F}^* \Psi \mathbf{H} \Psi^* \mathbf{F})$, 所以当固定矩阵 $\mathbf{H}$ 、更新循环矩阵的目标函数 (8) 式等价于

$$\min_{\mathbf{x} \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{l}_1 \right\}. \quad (9)$$

(9) 式可以通过凸二次规划来求解.

2) 对于二维信号, 此时的目标函数为

$$\min_{\mathbf{G}} \|\mathbf{G} - \mathbf{H}\|_F^2 \quad \text{subject to} \quad g_{ij} = \langle \mathcal{C}_2(\psi_i), \mathcal{C}_2(\psi_j) \rangle. \quad (10)$$

根据

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{G} - \mathbf{H}\|_F^2 &= \sum_{i,j} (g_{ij} - h_{ij})^2 \\
 &= \|\mathbf{G}\|_F^2 - 2 \sum_{i,j} g_{ij} \cdot h_{ij} + \|\mathbf{H}\|_F^2,
 \end{aligned}$$

矩阵 $\mathbf{H}$ 固定时, $\|\mathbf{H}\|_F^2$ 为常数, 由文献 [16] 得 $\|\mathbf{G}\|_F^2 = \mathbf{u}^* [\text{conj}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^*) \odot (\mathbf{Y}\mathbf{Y}^*)] \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{u}$. 关于 $\sum_{i,j} g_{ij} \cdot h_{ij}$ 的简化推导, 我们有

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j} g_{ij} \cdot h_{ij} &= \sum_{i,j} h_{ij} \cdot (\mathbf{u}^* (\text{conj}(\mathbf{y}^i) \odot \mathbf{y}^j)) \\
 &= \sum_{i,j} h_{ij} \cdot \left(u_1^* (y_1^i)^* y_1^j + u_2^* (y_2^i)^* y_2^j + \cdots + u_N^* (y_N^i)^* y_N^j \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) \left(\sum_{i,j} h_{ij}(y_1^i)^* y_1^j, \sum_{i,j} h_{ij}(y_2^i)^* y_2^j, \dots, \sum_{i,j} h_{ij}(y_N^i)^* y_N^j \right)^T \\
 &= (u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^K (h_{1j}(y_1^1)^* y_1^j) & \dots & \sum_{j=1}^K (h_{Kj}(y_1^K)^* y_1^j) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^K (h_{1j}(y_N^1)^* y_N^j) & \dots & \sum_{j=1}^K (h_{Kj}(y_N^K)^* y_N^j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= (u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) \left\{ \begin{pmatrix} (y_1^1)^* & \dots & (y_1^K)^* \\ \vdots & & \vdots \\ (y_N^1)^* & \dots & (y_N^K)^* \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^K (h_{1j} y_1^j) & \dots & \sum_{j=1}^K (h_{Kj} y_1^j) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^K (h_{1j} y_N^j) & \dots & \sum_{j=1}^K (h_{Kj} y_N^j) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= (u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) \left\{ \begin{pmatrix} (y_1^1)^* & \dots & (y_1^K)^* \\ \vdots & & \vdots \\ (y_N^1)^* & \dots & (y_N^K)^* \end{pmatrix} \odot \left(\begin{pmatrix} y_1^1 & \dots & y_1^K \\ \vdots & & \vdots \\ y_N^1 & \dots & y_N^K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{K1} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{1K} & \dots & h_{KK} \end{pmatrix} \right) \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{u}^* [\text{conj}(\mathbf{Y}) \odot (\mathbf{Y} \mathbf{H}^T)] \mathbf{1} = \mathbf{u}^* [\text{conj}(\mathbf{Y}) \odot (\mathbf{Y} \mathbf{H})] \mathbf{1} = \mathbf{u}^T \mathbf{l}_2.
 \end{aligned}$$

其中, 列向量 $\mathbf{l}_2 = [\text{conj}(\mathbf{Y}) \odot (\mathbf{Y} \mathbf{H})] \mathbf{1}$, $N = n_1 \times n_2$, $\mathbf{y}^i = (y_1^i, y_2^i, \dots, y_N^i)^T$ ($i = 1, \dots, K$), $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ 为 $K \times 1$ 的求和向量. 由于 $\mathbf{u}$ 为实向量, 所以将上式中的 $\mathbf{u}^*$ 改写为 $\mathbf{u}^T$.

因此, (10) 式的优化问题等价于求解下式

$$\min_{\mathbf{u} \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{l}_2 \right\}. \quad (11)$$

值得注意的是, 比较 (11) 式和 (9) 式, 当固定矩阵 $\mathbf{H}$ 、更新循环矩阵时, 本文导出的一维和二维信号的循环测量矩阵生成元素幅值优化的目标函数具有统一的数学模型, 且都归结为凸二次规划问题.

3.2 循环矩阵固定时, 更新矩阵 $\mathbf{H}$

为了保证迭代过程中循环矩阵与稀疏字典之间的低互相干性, 需要更新矩阵 $\mathbf{H}$ 中的非对角元素, 减小非对角元素的绝对值. 对于一维和二维信号, 此时固定循环矩阵 (即固定 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$), 更新矩阵 $\mathbf{H}$ 的目标函数统一为

$$\min_{\mathbf{H} \in \mathcal{H}_\mu} \|\mathbf{G} - \mathbf{H}\|_F^2, \quad (12)$$

其中, 对于一维信号 $\mathbf{G} = \Psi^* \mathbf{F} \text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{F}^* \Psi$; 对于二维信号, 矩阵 $\mathbf{G}$ 中的元素为 $g_{ij} = \langle \mathcal{C}_2(\psi_i), \mathcal{C}_2(\psi_j) \rangle$. 该问题是一个矩阵近似问题 (matrix nearness problem) [23], 其唯一解可通过点到凸集 $\mathcal{H}_\mu$ 的投影获得, 矩阵 $\mathbf{H}$ 非对角元素的更新为

$$\begin{aligned}
 &\forall 1 \leq i, j \leq K, i \neq j: \\
 &h_{ij} = \begin{cases} g_{ij}, & |g_{ij}| \leq \mu, \\ \mu \cdot \text{sign}(g_{ij}), & \text{其他}. \end{cases} \quad (13)
 \end{aligned}$$

这种按顺序逐个元素 (element-wise scheme) 更新得到的矩阵 $\mathbf{H}$ 确保了在下次迭代的过程中, 矩阵 $\mathbf{G}$ 中所有大于阈值 μ 的非对角元素被集中约束.

综上所述, 一维和二维信号的循环测量矩阵生成元素幅值优化的步骤可以总结如下:

输入: 稀疏字典 Ψ , 限制循环矩阵与稀疏字典之间互相干性的阈值 μ , 迭代次数 Iter;

输出: 对于一维信号, 可以得到最优解 $\mathbf{x}_{\text{opt}}$, 对于二维信号, 可以得到最优解 $\mathbf{u}_{\text{opt}}$;

迭代: 设定 $J = 0$, 重复以下步骤 Iter 次:

S.1 计算 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$;

S.2 循环矩阵固定, 根据 (13) 式更新矩阵 $\mathbf{H}$;

S.3 矩阵 $\mathbf{H}$ 固定, 一维信号和二维信号分别根据 (9) 式和 (11) 式更新循环矩阵;

S.4 令 $J \leftarrow J + 1$, 若 $J < \text{Iter}$, 返回步骤 S.1.

通过上述交替寻优的迭代, 对于一维信号, 可以得到最优解 $\mathbf{x}_{\text{opt}}$, 再由 (3) 式得到一维信号循环测量矩阵生成元素幅值的最优解 $|\mathbf{d}|_{\text{opt}}$; 对于二维信号, 可以得到最优解 $\mathbf{u}_{\text{opt}}$, 再由 $\mathbf{u} = \text{vec}(\mathbf{U})$, $\mathbf{U} = \text{conj}(\mathbf{V}) \odot \mathbf{V}$, 得到二维信号循环测量矩阵生成元素幅值的最优解 $|\mathbf{V}|_{\text{opt}}$.

以上推导出了一维和二维信号循环测量矩阵生成元素幅值优化的统一数学模型, 并通过交替寻优方法给出了逼近互相干系数 Welch 界目标下一维和二维信号循环测量矩阵生成元素幅值的最优解.

4 循环测量矩阵生成元素混沌型随机相位的构造

本文利用混沌序列来构造循环测量矩阵生成元素的随机相位. 这里采用 Cat 映射产生混沌序列, 该映射的定义为 [25,26]

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & ab+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \pmod{1}, \quad (14)$$

其中, $\text{mod } 1$ 表示舍去实数的整数部分, 即 $x \bmod 1 = x - [x]$. 由于其线性变换矩阵的行列式为 1, 所以 Cat 映射又被称为是区域保留的. 当

Cat 映射的参数为 $a = 1, b = 1$ 时, 其李雅普诺夫指数分别为 $\delta_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) > 1, \delta_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) < 1$.

本文选用 x_n 序列来构造需要的混沌序列, 并将初值选为 $x_0 = 0.09, y_0 = 1$. 为使用稳定区域的混沌序列来构造循环测量矩阵生成元素的相位, 选取 x_{201} 为抽样的起点. 同时, 为保证混沌序列 z_k 中元素的相互独立性, 本文基于混沌序列独立性检验方法选定抽样间距 $l = 20$ 进行等间距抽样 [27], 即

$$z_k = x_{201+kl}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

由于混沌序列 $x_n \in [0, 1]$, 为了使由混沌序列 z_k 构造的循环测量矩阵生成元素的相位在 $[-0.5, 0.5]$ 内独立同分布, 我们对 z_k 作如下变换:

$$z_k = z_k - 0.5, \quad k = 1, 2, \dots, 10000. \quad (16)$$

z_k ($k = 1, 2, \dots, 10000$) 序列的空间分布图、归一化分布直方图以及归一化自相关函数如图 1 所示. 由图 1 可以看出 z_k 序列随机均匀地分布在 $[-0.5, 0.5]$ 的区间内, 且有着类似于白噪声的自相关函数. 我们采用这样的随机序列来构造一维信号的循环测量矩阵生成元素的相位 θ_i 以及二维信号的循环测量矩阵生成元素的相位 θ_{ij} .

以上基于混沌序列独立性检验方法, 确定了满足循环测量矩阵生成元素相位随机性要求的混沌序列抽样间距, 实现了利用混沌序列构造循环测量矩阵生成元素的相位. 结合第三部分交替寻优循环测量矩阵生成元素幅值的最优解, 从而实现了对整个循环测量矩阵的优化构造.

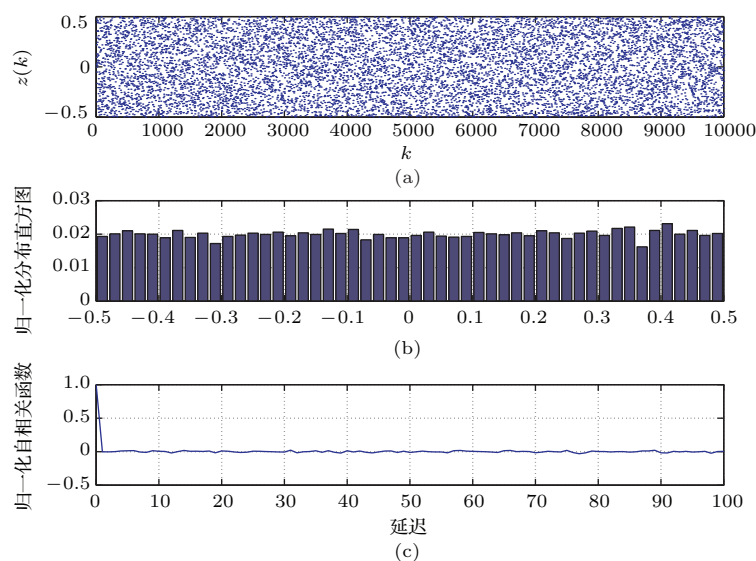


图1 (网刊彩色) (a) z_k 序列空间分布图; (b) z_k 序列归一化分布直方图; (c) z_k 序列的归一化自相关函数图

Fig. 1. (color online) (a) Spatial distribution of z_k sequence; (b) normalized distribution histogram of z_k sequence; (c) normalized autocorrelation function of z_k sequence.

5 仿真结果及分析

5.1 一维信号仿真

这里讨论采用不同的压缩测量矩阵对一维信号进行测量, 然后对其恢复效果进行比较. 选取 8 个正弦波合成的谐波信号作为原信号, 其中的最高频率为 250 Hz, 该信号在快速傅里叶变换基下具有稀疏表示. 信号的时域表达式为

$$\begin{aligned} f(t) = & 2.7 \cos(2\pi \times 3t) + 3.6 \sin(2\pi \times 10t) \\ & + 4.1 \cos(2\pi \times 24t) - 2 \sin(2\pi \times 99t) \\ & + 3.3 \sin(2\pi \times 115t) - 4.3 \sin(2\pi \times 180t) \\ & + 1.9 \sin(2\pi \times 207t) + 5.5 \sin(2\pi \times 250t). \end{aligned}$$

首先利用本文构造的循环测量矩阵对一维信号进行测量, 取常规信号长度 $n = 512$, 压缩测量次数 $m = 75$. 本文中压缩测量信号的恢复都采用 YALL1 算法中的 L1/L2 算法 [28]. 对于无噪声和含噪声情形, 算法迭代停止的容忍误差 (stopping tolerance) 分别设为 10^{-5} 和 10^{-3} , 最大迭代次数设为 10^4 . 采用均方失真 MSD (mean square distortion) 和信噪比 SNR (signal to noise ratio) 作为信号恢复质量的评价指标. 其中, MSD 定义为

$$\text{MSD} = \frac{1}{n} \left\| \mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}} \right\|_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f_i - \hat{f}_i|^2.$$

SNR 定义为

$$\text{SNR} = 20 \log \frac{\|\mathbf{f}\|_2}{\|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}\|_2}.$$

这里 $\mathbf{f}$ 为原信号, $\hat{\mathbf{f}}$ 为恢复的信号. 仿真效果如图 2 所示. 此时的 $\text{MSD} = 0.0042$, $\text{SNR} = 51.2908$ dB. 可以看出本文构造的循环测量矩阵测量下恢复信号的 MSD 很小、SNR 很高, 恢复信号几乎无失真.

其次比较不同矩阵测量下的恢复效果. 比较的矩阵有: 1) 高斯随机测量矩阵 GRM (Gaussian random matrix); 2) 按行构造的循环矩阵, 即循环矩阵的第一行 $\mathbf{v}$ 由独立同分布的高斯序列产生 GCM (Gaussian circulant matrix); 3) Yin 等在文献 [16] 中优化的循环测量矩阵 OCM_WY (Optimized Circulant Matrix Proposed by Wotao Yin); 4) 本文构造的循环测量矩阵 OCM_Proposed (optimized circulant matrix Proposed in this paper). 信号长度仍取 $n = 512$, 每组参数下独立测试 200 次, 再对所有试验结果取平均. 图 3 是四种不同矩阵测量下恢复信号的信噪比随压缩测量次数 m 的变化情况. 图 4 是固定压缩测量次数 $m = 70$, 恢复信号的信噪比随压缩信号的信噪比 (记为 SNR_{in}) 的变化情况. 测量过程为 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{f} + \mathbf{n} = \mathbf{y}_f + \mathbf{n}$, SNR_{in} 定义为 $\text{SNR}_{\text{in}} = 10 \lg(P_{y_f}/P_n)$. 其中, $\mathbf{y}_f$ 是不含噪声时的压缩测量结果, P_{y_f} 和 P_n 分别是 $\mathbf{y}_f$ 和 $\mathbf{n}$ 的功率.

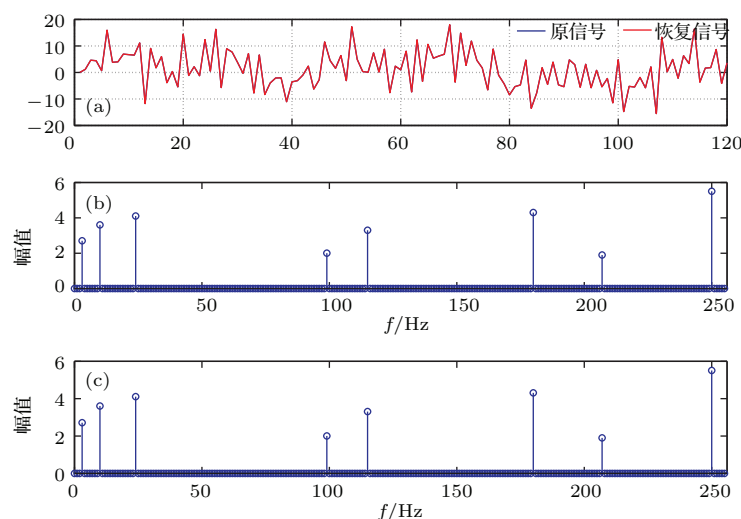


图2 (网刊彩色) 本文构造的循环测量矩阵测量下一维信号的恢复效果 (a) 原信号 $\mathbf{f}$ 与恢复信号 $\hat{\mathbf{f}}$ 时域波形; (b) 和 (c) 分别为原信号 $\mathbf{f}$ 与恢复信号 $\hat{\mathbf{f}}$ 的频域波形

Fig. 2. (color online) Recovery results of one dimensional signal with the optimized circulant measurement matrix proposed in this paper: (a) Time domain waveform of original signal $\mathbf{f}$ and recovery signal $\hat{\mathbf{f}}$; (b) and (c) are the frequency domain waveform of original signal $\mathbf{f}$ and recovery signal $\hat{\mathbf{f}}$ respectively.

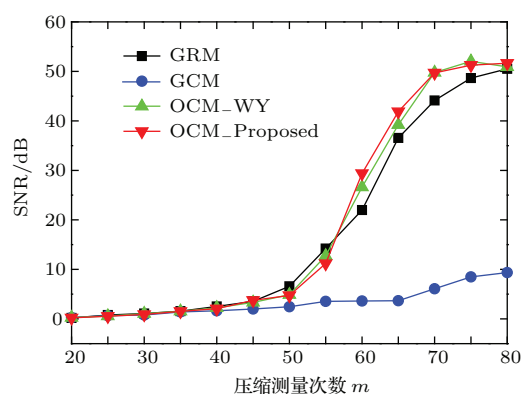


图3 (网刊彩色) 四种不同矩阵测量下恢复信号的信噪比随压缩测量次数的变化情况

Fig. 3. (color online) SNR of recovery signal as a function of measurement number with four different kinds of measurement matrixes.

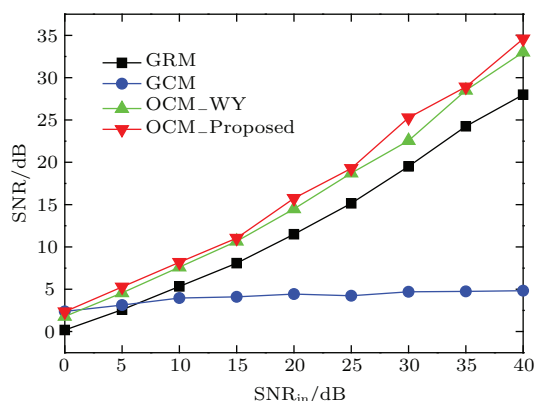


图4 (网刊彩色) 四种不同矩阵测量下恢复信号的信噪比随压缩信号的信噪比的变化情况

Fig. 4. (color online) SNR of recovery signal as a function of SNR of compressed signal with four different kinds of measurement matrixes.

比较图3和图4中不同测量矩阵的性能, 可以看出本文优化构造的循环测量矩阵对一维信号有着最好的恢复效果, 特别是在信噪比增益方面, 其性能甚至要略优于高斯随机测量矩阵. 而第一行由高斯序列产生的循环矩阵性能最差, 该结果与文献[7]和[16]中由高斯序列按行构造的循环测量矩阵对多频率正弦波合成的谐波信号恢复效果差的结果相一致. 总的来说, 对于多频率正弦波合成的谐波信号, 本文构造的循环测量矩阵不仅有着最优的恢复效果而且同时具备循环矩阵和混沌序列的优点.

5.2 二维信号仿真

这里讨论采用不同的压缩测量矩阵对二维信号进行测量, 然后对其恢复效果进行比较. 图像

选自UC Berkeley分割数据集(Berkeley segmentation dataset)[29], 该数据集包含训练集(training set)和测试集(testing set), 其中训练集包含200张图像, 测试集包含100张图像. 首先从训练集的每张图像中随机抽选100个 8×8 大小的图像块, 利用K-SVD算法对这20000个 8×8 的图像块寻求过完备的稀疏字典 Ψ : 64×256 , 使得每个图像块在该稀疏字典下表示的系数向量的稀疏度不超过6. 再从测试集中随机选取一张测试图像, 如图5(a)所示, 其大小为 480×320 , 将该图像分为2400个大小为 8×8 的图像块处理, 用该测试图像来检测不同压缩测量矩阵的恢复性能. 采用相对误差Rel_Err (relative error)、峰值信噪比PSNR (peak signal to noise ratio)和信噪比SNR (signal to noise ratio)作为恢复图像的评价指标. 其中, Rel_Err的定义为

$$\text{Rel_Err} = \frac{\text{norm}(\mathbf{f}(:) - \hat{\mathbf{f}}(:))}{\text{norm}(\mathbf{f}(:))} \times 100\%.$$

PSNR的定义为

$$\text{PSNR} = 10 \times \lg \left(\frac{\text{MAX}_f^2}{\text{MSE}} \right).$$

其中, MAX_f 表示原图像 $\mathbf{f}$ 像素的最大值; MSE为均方误差(mean square error), $\text{MSE} = S^{-1} \sum \|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}\|^2$, S 为图像的大小.

SNR的定义为

$$\text{SNR} = 10 \times \lg \left(\frac{\text{var}(\mathbf{f}(:), 1)}{\text{MSE}} \right),$$

式中, $\text{var}(\mathbf{f}(:), 1)$ 表示原图像 $\mathbf{f}$ 的方差.

图5(b)是本文优化构造的循环测量矩阵测量下测试图像的恢复效果, 在采样率为50%时, 恢复

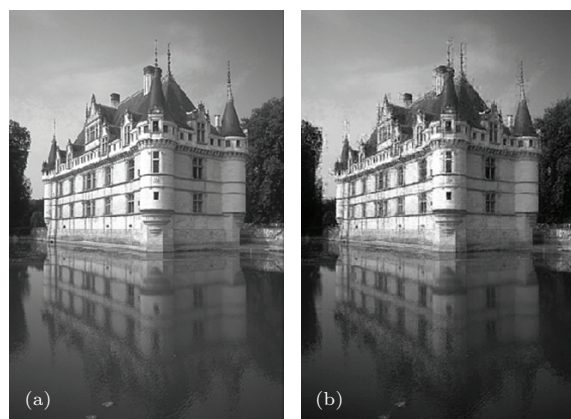


图5 (a)为原图像 $\mathbf{f}$; (b)采样率设为50%时, 在本文构造的循环测量矩阵测量下恢复的图像 $\hat{\mathbf{f}}$

Fig. 5. (a) Original image $\mathbf{f}$; (b) setting the sampling rate as 50%, recovery image $\hat{\mathbf{f}}$ with the optimized circulant measurement matrix proposed in this paper.

图像的效果为 $\text{Rel_Err} = 6.428\%$, $\text{PSNR} = 29.9379 \text{ dB}$, $\text{SNR} = 16.5951 \text{ dB}$. 可以看出在本文构造的循环测量矩阵测量下, 图像信号有着很好的恢复效果.

和一维信号的情形一样, 再比较四种不同矩阵测量下的恢复效果. 首先比较四种不同矩阵测量下

恢复图像的 Rel_Err , PSNR 和 SNR 随采样率的变化情况, 每组参数下独立测试 50 次, 再对所有试验结果取平均, 如图 6 所示.

由图 6 可以看出, 在本文构造的循环测量矩阵测量下, 所恢复图像的 Rel_Err , PSNR 及 SNR 随采样率变化的整体效果与高斯随机测量矩阵情形

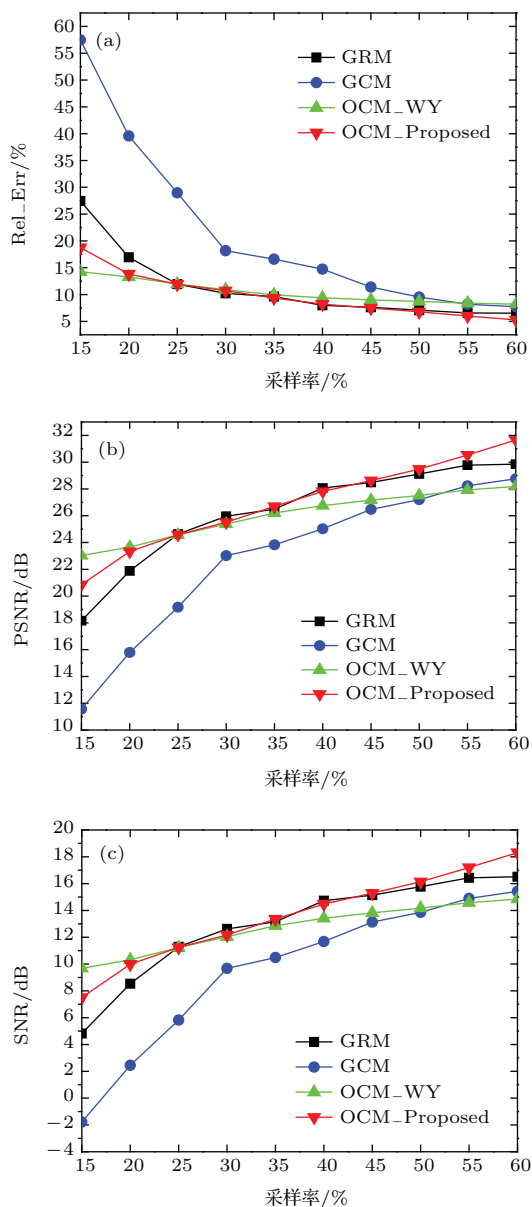


图6 (网刊彩色) (a) 不同矩阵测量下恢复图像的 Rel_Err 随采样率的变化情况; (b) 不同矩阵测量下恢复图像的 PSNR 随采样率的变化情况; (c) 不同矩阵测量下恢复图像的 SNR 随采样率的变化情况

Fig. 6. (color online) (a) Rel_Err of recovery image as a function of sampling rate with different kinds of measurement matrixes; (b) PSNR of recovery image as a function of sampling rate with different kinds of measurement matrixes; (c) SNR of recovery image as a function of sampling rate with different kinds of measurement matrixes.

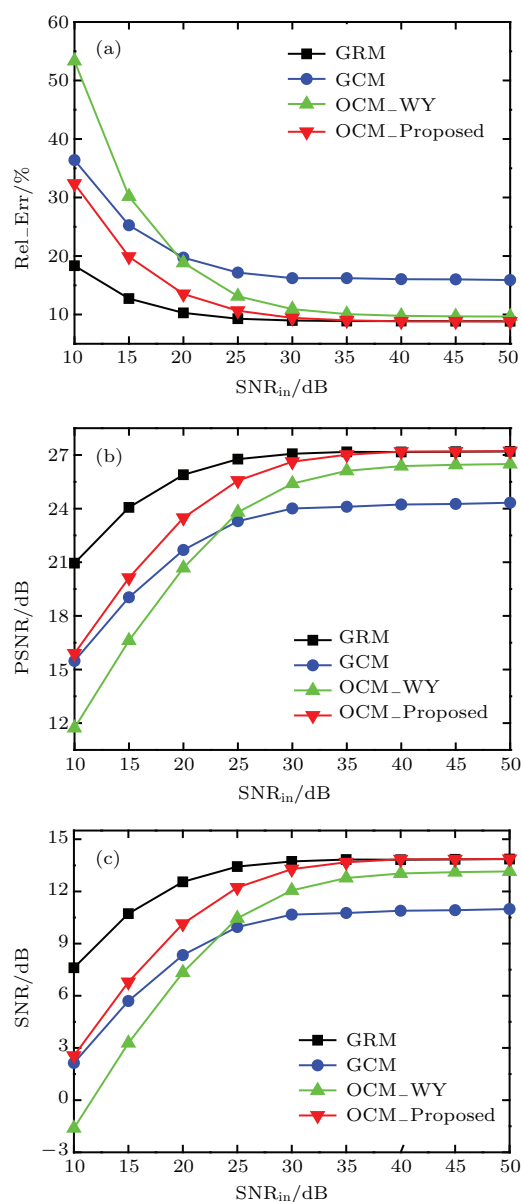


图7 (网刊彩色) 采样率设为 37.5% 时, (a) 不同矩阵测量下恢复图像的 Rel_Err 随 SNR_{in} 的变化情况; (b) 不同矩阵测量下恢复图像的 PSNR 随 SNR_{in} 的变化情况; (c) 不同矩阵测量下恢复图像的 SNR 随 SNR_{in} 的变化情况

Fig. 7. (color online) Setting the sampling rate as 37.5%, (a) Rel_Err of recovery image as a function of SNR_{in} with different kinds of measurement matrixes; (b) PSNR of recovery image as a function of SNR_{in} with different kinds of measurement matrixes; (c) SNR of recovery image as a function of SNR_{in} with different kinds of measurement matrixes.

基本相当, 且优于文献[16]中优化的循环测量矩阵的效果, 效果最差的仍然是未经优化的由高斯序列构成的循环测量矩阵情形。

其次比较在采样率为37.5%时, 四种不同矩阵测量下恢复图像的 Rel_Err, PSNR 和 SNR 随压缩信号的信噪比 SNR_{in} 的变化情况, 每组参数下独立测试 50 次, 再对所有试验结果取平均, 如图 7 所示。

从图 7 中可以看出, 本文构造的循环测量矩阵的恢复性能明显优于另外两种循环测量矩阵的性能, 且恢复信号的信噪比与压缩信号的信噪比相比较, 其信噪比增益要优于传统的循环测量矩阵; 与高斯随机测量矩阵相比较, 虽然本文构造的循环测量矩阵的恢复性能随 SNR_{in} 的变化稍显逊色, 但它又同时具备循环矩阵的优美数学性质和混沌序列在电路实现方面的潜在优势。

5.3 本文构造的循环测量矩阵优于传统循环矩阵的本质性原因

循环测量矩阵的性能取决于等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间的互相干性, 该互相干性可由 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素的值来评价。以二维信号为例, 下面比较在稀疏字典 Ψ 固定时, 本文构造的循环测量矩阵与传统循环测量矩阵对应的 Gram 矩阵 $\mathbf{G} = (\mathbf{C}\Psi)^* \mathbf{C}\Psi$ 非对角元素的分布情况, 如图 8 所示。

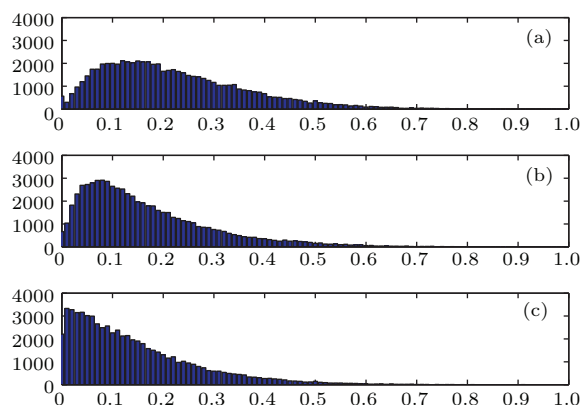


图 8 (网刊彩色) 不同循环测量矩阵对应的 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素分布直方图 (a) 由高斯序列构成的循环矩阵 GCM; (b) 文献[16]中优化的循环测量矩阵 OCM_WY; (c) 本文构造的循环测量矩阵 OCM_Proposed

Fig. 8. (color online) Histogram of the off-diagonal entries of Gram matrix $\mathbf{G}$ for different kinds of circulant measurement matrixes: (a) GCM (Gaussian Circulant Matrix); (b) OCM_WY (Optimized Circulant Matrix proposed by Wotao Yin in the reference [16]); (c) OCM_Proposed (Optimized Circulant Matrix Proposed in this paper).

同时, 本文考虑采用 $\mu_{\max}(\mathbf{D}) = \max_{i \neq j} |g_{ij}|$ 和

$$\mu_{av}(\mathbf{D}) = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} (|g_{ij}| \geq \mu_E) \cdot |g_{ij}|}{\sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} (|g_{ij}| \geq \mu_E)}$$

作为 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素的评价指标。其中, $\mu_{\max}(\mathbf{D})$ 表示 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素的最大值, $\mu_{av}(\mathbf{D})$ 表示 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素中所有大于互相干系 Welch 界 μ_E 的元素的平均值, 如表 1 所示。

表 1 不同循环测量矩阵对应的 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素的评价指标比较

Table 1. Evaluation index comparison of the off-diagonal entries of Gram matrix $\mathbf{G}$ for different kinds of circulant measurement matrixes.

循环矩阵类型	$\mu_{\max}(\mathbf{D})$	$\mu_{av}(\mathbf{D})$
由高斯序列构成的循环矩阵 GCM	0.9778	0.3526
文献[16]中优化的循环测量矩阵 OCM_WY	0.9410	0.3495
本文构造的循环测量矩阵 OCM_Proposed	0.9151	0.2324

由图 8 可以看出, 相比于其他循环矩阵对应的 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素的分布, 本文构造的循环测量矩阵对应的 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素主要集中在 $[0, 0.1]$ 之间, 这正体现了等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间具有很小的互相干性。同时从表 1 中的评价指标来看, 本文构造的循环测量矩阵对应的 $\mu_{\max}(\mathbf{D})$ 和 $\mu_{av}(\mathbf{D})$ 要小于另外两种循环矩阵, 特别是 $\mu_{av}(\mathbf{D})$ 更能反映本文构造的循环测量矩阵对应的等价字典 $\mathbf{D}$ 列向量之间整体的互相干性优于另外两种循环矩阵, 该结论与上述的仿真结果相一致。

6 结 论

本文提出了交替寻优生成元素的幅值并结合混沌随机相位实现循环测量矩阵的最优构造。将等价字典列向量之间互相干系数的 Welch 界作为逼近目标, 推导出了一维和二维信号循环测量矩阵生成元素幅值优化的统一数学模型, 通过交替寻优方法给出了生成元素幅值的最优解。相比于传统的循环测量矩阵情形, 该最优解使得本文构造的循环测量矩阵对应的 Gram 矩阵 $\mathbf{G}$ 非对角元素的分布更加集中在小值区间, 等价字典列向量之间更低的互

相干性使得优化构造的循环测量矩阵的恢复性能明显优于传统情形. 同时实现了将混沌的内在确定性与外在随机性有机结合来构造循环测量矩阵生成元素的相位, 该方法满足了测量矩阵对随机性的要求. 本文将交替寻优生成元素的幅值和混沌随机相位相结合实现了循环测量矩阵的优化构造, 与此相关的理论研究还可以从循环测量矩阵和稀疏字典联合优化的角度出发, 探索等价字典的优化构造方法.

参考文献

- [1] Donoho D L 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 1289
- [2] Candès E J, Romberg J, Tao T 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 489
- [3] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A 2001 *SIAM* **43** 129
- [4] Needell D 2009 *Ph. D. Dissertation* (California: University of California)
- [5] Zhang H M, Wang L Y, Yan B, Li L, Xi X Q, Lu L Z 2013 *Chin. Phys. B* **22** 078701
- [6] Feng B C, Fang S, Zhang L G, Li H, Tong J J, Li W Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 112901 (in Chinese) [冯丙辰, 方晟, 张立国, 李红, 童节娟, 李文茜 2013 物理学报 **62** 112901]
- [7] Yin W, Morgan S, Yang J F, Zhang Y 2010 *Visual Communications and Image Processing* (International Society for Optics and Photonics) p77440K
- [8] Donoho D L, Elad M 2003 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **100** 2197
- [9] Duarte-Carvajalino J M, Sapiro G 2009 *IEEE Trans. Image Process.* **18** 1395
- [10] Abolghasemi V, Ferdowsi S, Sanei S 2012 *Signal Process.* **92** 999
- [11] Xu J P, Pi Y M, Cao Z J 2010 *EURASIP J. Adv. Signal Process.* **2010** 43
- [12] Li G, Zhu Z H, Yang D H, Chang L P, Bai H 2013 *IEEE Trans. Signal Process.* **6** 2887
- [13] Rauhut H, Romberg J, Tropp J A 2012 *Applied and Computational Harmonic Analysis* **32** 242
- [14] Romberg J 2009 *16th IEEE International Conference on Digital Signal Processing* p1
- [15] Romberg J 2009 *SIAM. J. Imaging Sci.* **2** 1098
- [16] Yin W, Osher S, Xu Y 2014 to appear in *Inverse Problems and Imaging*
- [17] Guo J B, Xu X Z, Shi Q H, Hu T H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110508 (in Chinese) [郭静波, 徐新智, 史启航, 胡铁华 2013 物理学报 **62** 110508]
- [18] Candès E J 2008 *Comptes. Rendus Math.* **346** 589
- [19] Donoho D L, Elad M 2003 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **100** 2197
- [20] Tropp J A 2004 *IEEE Trans. Inform. Theory* **50** 2231
- [21] Gribonval R, Nielsen M 2003 *IEEE Trans. Inform. Theory* **49** 3320
- [22] Strohmer T, Heath R W 2003 *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **14** 257
- [23] Tropp J A, Dhillon I S, Heath R W, Strohmer T 2005 *IEEE Trans. Inform. Theory* **51** 188
- [24] Aharon M, Elad M, Bruckstein A 2006 *IEEE Trans. Signal Process.* **54** 4311
- [25] Arnold V I, Avez A 1968 *Ergodic problems of classical mechanics* (New York: Benjamin) pp5-7
- [26] Chen G, Mao Y, Chui C K 2004 *Chaos Solitons & Fractals* **21** 749
- [27] Guo J B, Wang R 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 198402 (in Chinese) [郭静波, 汪韧 2014 物理学报 **63** 198402]
- [28] Yang J, Zhang Y 2011 *SIAM. J. Sci. Comp.* **33** 250
- [29] Martin D, Fowlkes C, Tal D, Malik J 2001 *Proceedings 8th IEEE International Conference on Computer Vision* July 2001 **2** p416

Constructing circulant measurement matrix through alternating optimizing amplitudes together with chaotic stochastic phases of the matrix generating elements*

Guo Jing-Bo[†] Wang Ren

(State Key Laboratory of Power System, Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

(Received 21 October 2014; revised manuscript received 2 February 2015)

Abstract

Circulant measurement matrix has been widely used in compressive sensing because of its high-speed discrete convolution algorithm. The typical work of optimizing circulant measurement matrix was introduced by Wotao Yin in Reference [16]. Motivated by his work, the construction of circulant measurement matrix in this paper is explored from the view point of generating elements' amplitudes and phases; and the optimal construction procedures are proposed based on alternately optimizing amplitudes in conjunction with chaotic stochastic phases of the matrix generating elements. The main idea of this paper is based on two innovations: The first one is to reduce the mutual coherence between column vectors of equivalent dictionary by alternately optimizing the generating elements' amplitudes, thus improving the recovery performance of the circulant measurement matrix. From the different expressions of the circulant matrixes of one-dimensional and two-dimensional signal, by setting the Welch bound for the coefficient of mutual coherence between the column vectors of equivalent dictionary as the approximation objective, two novel unified mathematical models are derived from the optimizing function for generating elements' amplitudes of the two different matrixes. Optimal solutions for generating elements' amplitudes are gained by alternately optimizing method. The second innovation is to construct the generating elements' phases of circulant measurement matrix by utilization of a chaotic sequence with independent property. The chaotic stochastic phase of the circulant measurement matrix generating elements are generated by taking advantage of the chaotic internal certainty, which means an independent identically-distributed randomness sequence can be produced by the chaotic map with the initial value at certain sampling distance. At the same time, the external randomness of chaotic sequence can satisfy the stochastic requirement of circulant measurement matrix. This paper presents the method of constructing chaotic stochastic phase using Cat chaotic map. Experimental results of one-dimensional and two-dimensional signals in the optimized circulant measurement matrix are studied in this paper, which has a better performance as compared with the results of conventional circulant measurement matrixes, such as Gaussian circulant matrix and optimized circulant matrix proposed by Wotao Yin. The column vectors of equivalent dictionary in the optimized circulant measurement matrix have lower mutual coherence, this is the essence of the superiority of the optimized circulant matrix.

Keywords: compressive sensing, circulant matrix, alternating optimizing, chaotic sequence

PACS: 07.50.Qx, 05.45.-a, 05.45.Vx

DOI: 10.7498/aps.64.130702

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51277100).

[†] Corresponding author. E-mail: guojb@tinghua.edu.cn