物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

非对易相空间中谐振子体系热力学性质的探讨

米尔阿里木江艾力 买买提热夏提买买提 亚森江吾甫尔

Thermodynamic properties of harmonic oscillator system in noncommutative phase space

Aili Mieralimujiang Mamat Mamatrishat Ghupur Yasenjan

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 140201 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.140201
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.140201
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I14

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 64, No. 14 (2015) 140201

非对易相空间中谐振子体系热力学性质的探讨*

米尔阿里木江·艾力 买买提热夏提·买买提† 亚森江·吾甫尔

(新疆大学物理科学与技术学院, 乌鲁木齐 830046)

(2014 年 12 月 5 日收到; 2015 年 2 月 10 日收到修改稿)

2000 年以来, 有关非对易空间的各种物理问题一直是研究的热点, 并在量子力学、场论、凝聚态物理、天体物理等各领域中已被广泛地探讨. 本文采用统计物理方法讨论非对易效应对谐振子体系热力学性质的影响. 先以对易相空间中确定二维和三维谐振子的配分函数求出谐振子体系的热力学函数; 非对易相空间中的坐标和动量通过坐标-坐标和动量-动量之间的线性变换而以对易相空间中的坐标和动量来表示; 最终以非对易相空间中求出配分函数来讨论非对易效应对谐振子体系热力学性质的影响. 结果显示, 在非对易相空间中谐振子体系的配分函数和熵表达式均包含因非对易引起的修正项. 从分析结果得出如下结论: 非对易效应对谐振子的配分函数和熵函数等微观状态函数有一定的影响, 但对谐振子体系的内能、热容量等宏观热力学函数没有影响. 研究结果只是对应于满足玻尔兹曼统计的经典体系, 对于满足费米-狄拉克和玻色-爱因斯坦统计的量子体系需进一步推广研究.

关键词: 非对易相空间, 谐振子, 热力学性质

PACS: 02.40.Gh, 33.20.Tp, 05.70.Ce **DOI:** 10.7498/aps.64.140201

1 引 言

20 世纪 40 年代, 在场论首次提出空间坐标的非对易概念后 [1], 非对易效应被应用到物理学的各领域 [2−9]. 研究结果显示, 非对易效应对一些物理现象有较明显的影响. 比如, 张秀兰等 [10] 采用不变本证算符法对三模谐振子能谱进行求解, 发现坐标- 坐标和动量-动量间的非对易效应对哈密顿能谱的影响很明显, 从而非对易效应引起了物理学各领域的极大研究兴趣 [11−15]. 随着非对易量子力学体系的逐渐建立 [16−18], 有必要探讨体系在非对易相空间中的热力学性质 [19,20], 这对天体物理学中黑洞性质的研究具有一定的科学意义 [21−22].

本文讨论了相空间中谐振子体系的热力学性质. 首先, 在对易相空间中, 对服从玻尔兹曼统计的谐振子体系的热力学性质, 即配分函数、内能、定容热容量、熵等热力学函数进行了讨论; 然后, 在非对易相空间中, 就非对易效应对谐振子体系热力学函数的影响进行了深入讨论.

2 对易相空间中谐振子体系的热力学性质

设由 N 个三维 (3D) 谐振子组成的体系, 谐振子质心运动的能量为

$$\varepsilon^{v}=\frac{1}{2m}[(P_x^2+P_y^2+P_z^2)+m^2\omega^2(x^2+y^2+z^2)], \tag{1}$$

式中 m 为谐振子的质量; ω 为谐振子振动的角频率; x, y, z 和 P_x, P_y, P_z 分别为谐振子的坐标和动量分量.

对满足经典极限条件的体系, 采用玻尔兹曼统计求出配分函数为 [23]

$$z_1^v=\int\cdots\int \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2m}[(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+m^2\omega^2(x^2+y^2+z^2)]}\times\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z}{h^3}, \tag{2}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 61366001) 和博士启动基金 (批准号: 208-61344) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: mmtrxt@xju.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

式中 $\int\cdots\int$ 表示六重积分; h 为一般相空间中的普朗克常数; $\beta=1/kT$, k 为玻尔兹曼常数, T 为热力学绝对温度. 对 (2) 式求出积分, 整理可得

$$z_1^v=(\hbar\omega\beta)^{-3},\tag{3}$$

式中 $\hbar$ 为约化普朗克常数. 根据配分函数和各热力学函数之间的关系, 可分别确定内能、定容热容量及熵函数. 内能表示为

$$U^v=-N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln z_1^v=\frac{3N}{\beta}=3NkT,\tag{4}$$

定容热容量表示为

$$C_V^v=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=3Nk,\tag{5}$$

熵表示为

$$\begin{aligned}S^v&=Nk\Big(\ln z_1-\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln z_1\Big)\\&=3Nk\Big(1-\ln\frac{\theta_v}{T}\Big),\end{aligned}\tag{6}$$

式中 $\theta_v=\hbar\omega/k$ 为谐振子振动的特征温度.

类似于 3D 情况的配分函数的计算方法, 可推导二维 (2D) 谐振子体系的配分函数、内能、定容热容量及熵函数, 其表达式分别为

$$z_1^v=(\hbar\omega\beta)^{-2},\tag{7}$$

$$U^v=-N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln z_1=\frac{2N}{\beta}=2NkT,\tag{8}$$

$$C_V^v=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=2Nk,\tag{9}$$

$$S^v=2Nk\Big(1-\ln\frac{\theta_v}{T}\Big).\tag{10}$$

从 (6) 和 (10) 式可知, 当 $T\to\theta_v/e$ 时 3D 和 2D 谐振子体系的熵均等于零, 即表示体系中所有谐振子以特征频率振动而整个体系处在一种微观状态. 当 $T=\theta_v$ 时 3D 和 2D 谐振子体系的熵分别等于 $3Nk$ 和 $2Nk$, 即体系的熵值等于定容热容量值, 此结果与能量均分定理结果一致. 在 $T\gg\theta_v$ 的高温极限下, 3D 和 2D 谐振子体系的熵分别等于 $3Nk\ln(T/\theta_v)$, 和 $2Nk\ln(T/\theta_v)$. 此结果表明, 当体系的温度高于特征温度时, 随着温度的增加谐振子体系的热运动越激烈, 结果熵随着温度增加.

3 非对易相空间中谐振子体系的热力学性质

以算符符号 “∧” 表示非对易相空间中的物理量. (11) 式表示空间-空间, 动量-动量和空间-动量之间的非对易关系 [24]

$$\begin{cases}[\hat{x}_i,\hat{p}_j]=\mathrm{i}\hbar\delta_{ij},\\ [\hat{x}_i,\hat{x}_j]=\mathrm{i}\boldsymbol{\Theta}_{ij}, \qquad i,j=1,2,3,\\ [\hat{p}_i,\hat{p}_j]=\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\Theta}}_{ij},\end{cases}\tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{\Theta}_{ij}$, $\bar{\boldsymbol{\Theta}}_{ij}$ 表示非对易相空间中坐标和动量非对易性质的完全反对称矩阵, 它们的量纲分别为 [长度]^2, [质量]^2[长度]^2[时间]$^{-2}$. 对 2D 体系, 据 Seiberg-Witten 图像 [25] 它们满足 $\boldsymbol{\Theta}_{ij}\bar{\boldsymbol{\Theta}}_{ji}=2\hbar^2\alpha^2(1-\alpha^2)$. 利用非对易关系 (11) 式和 $\boldsymbol{\Theta}_{ij}$, $\bar{\boldsymbol{\Theta}}_{ij}$ 的反对称性性质, 非对易相空间中的坐标和动量可表示为 [26]

$$\begin{cases}\hat{x}_i=\alpha x_i-\dfrac{1}{2\alpha\hbar}\boldsymbol{\Theta}_{ij}p_j,\\ \hat{p}_i=\alpha p_i+\dfrac{1}{2\alpha\hbar}\bar{\boldsymbol{\Theta}}_{ij}x_j,\end{cases}\tag{12}$$

式中 α 是非对易参数. 当 $\alpha=1$ 时, 则 $\boldsymbol{\Theta}_{ij}\bar{\boldsymbol{\Theta}}_{ji}=0$, 即退化为对易相空间, 则 $\alpha=1$ 被称为对易极限 [27]. 根据 (11) 和 (12) 式, 在非对易相空间中, 在 $\hat{p}\sim\hat{p}+\mathrm{d}\hat{p}$ 的动量范围内微观状态所占的体积元 $\mathrm{d}\hat{\varOmega}$ 可表示为

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\hat{\varOmega}=\mathrm{d}\hat{x}\mathrm{d}\hat{y}\mathrm{d}\hat{z}\mathrm{d}\hat{p}_x\mathrm{d}\hat{p}_y\mathrm{d}\hat{p}_z\\ \cong&\left(\alpha^6+\alpha^2\frac{\theta\bar{\theta}}{2\hbar^2}+\frac{\theta^2\bar{\theta}^2}{16\alpha^2\hbar^4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z,\end{aligned}\tag{13}$$

(13) 式中忽略掉非共轭的微分元, 式中 θ 和 $\bar{\theta}$ 是 $\boldsymbol{\Theta}_{ij}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\Theta}}_{ji}$ 的非等于零的矩阵元 [28].

非对易相空间中, 不确定度关系可表示为

$$\begin{aligned}\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}_x&=\Big(\alpha^2-\frac{\theta\bar{\theta}}{4\alpha^2\hbar^2}\Big)h,\\ \Delta\hat{y}\Delta\hat{p}_y&=\Big(\alpha^2-\frac{\theta\bar{\theta}}{4\alpha^2\hbar^2}\Big)h,\\ \Delta\hat{z}\Delta\hat{p}_z&=\alpha^2h.\end{aligned}\tag{14}$$

利用 (13) 和 (14) 式, 在非对易相空间中, 微观状态个数表示为

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\hat{N}_\mathrm{s}=\frac{\mathrm{d}\hat{\varOmega}}{\hat{h}}\\ \approx&\frac{\alpha^6\Big(1+\dfrac{\theta\bar{\theta}}{4\alpha^4\hbar^2}\Big)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z}{\alpha^6\Big(1-\dfrac{\theta\bar{\theta}}{4\alpha^4\hbar^2}\Big)^2h^3},\end{aligned}\tag{15}$$

式中 $\hat{h}$ 为非对易相空间中的最小相格. 非对易相空间中, 将 3D 谐振子的哈密顿量表示为

$\hat{H}(q,p)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2m}[\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2+\hat{p}_z^2+m^2\omega^2(\hat{x}^2+\hat{y}^2+\hat{z}^2)]\\
&= \frac{1}{2m}\bigg\{\Big(\alpha p_x+\frac{1}{2\alpha\hbar}\bar{\boldsymbol{\Theta}}y\Big)^2+\Big(\alpha p_y-\frac{1}{2\alpha\hbar}\bar{\boldsymbol{\Theta}}x\Big)^2\\
&\quad +(\alpha p_z)^2+m^2\omega^2\Big[\Big(\alpha x-\frac{1}{2\alpha\hbar}\boldsymbol{\Theta}p_y\Big)^2\\
&\quad +\Big(\alpha y+\frac{1}{2\alpha\hbar}\boldsymbol{\Theta}p_x\Big)^2+(\alpha p_z)^2\Big]\bigg\}\\
&= \frac{1}{2m}\bigg\{\alpha^2p^2-\bar{\theta}l_z+\frac{\bar{\theta}^2}{4\alpha^2\hbar^2}(x^2+y^2)\\
&\quad +m^2\omega^2\Big[\alpha^2r^2-\theta l_z+\frac{\theta^2}{4\alpha^2\hbar^2}(x^2+y^2)\Big]\bigg\}, \qquad (16)
\end{aligned}
$$

式中$l_z=(xp_y-yp_x)$表示角动量的z分量. 利用(15)和(16)式, 将配分函数表示为

$$
\begin{aligned}
\hat{z}_1^v &= \int\cdots\int \exp\,[-\beta\hat{H}_1(q,p)]\,\mathrm{d}\hat{N}_\mathrm{s}\\
&= \int\cdots\int \exp\bigg\{-\frac{\beta}{2m}\Big[\alpha^2p^2-\bar{\theta}l_z\\
&\quad +\frac{\bar{\theta}^2}{4\alpha^2\hbar^2}(x^2+y^2)+m^2\omega^2\Big(\alpha^2r^2-\theta l_z\\
&\quad +\frac{\theta^2}{4\alpha^2\hbar^2}(x^2+y^2)\Big)\Big]\bigg\}\\
&\quad \times\left[\frac{1+\theta\bar{\theta}/4\hbar^2\alpha^4}{1-\theta\bar{\theta}/4\hbar^2\alpha^4}\right]^2\frac{\mathrm{d}^3q\,\mathrm{d}^3p}{h^3}. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

对(17)式中的被积分函数做完全平方并求出积分可得

$$
\begin{aligned}
\hat{z}_1^v &\cong \Big(1+\frac{\theta\bar{\theta}}{\alpha^4\hbar^2}\Big)(\hbar\omega\beta)^{-3}\frac{m^2\omega^2}{\alpha^2\sqrt{(AC)^2-(B/2)^4}}\\
&= \Big(1+\frac{\theta\bar{\theta}}{\alpha^4\hbar^2}\Big)\frac{m^2\omega^2}{\alpha^2\sqrt{(AC)^2-(B/2)^4}}z_1^v, \qquad (18)
\end{aligned}
$$

式中$z_1^v=(\beta\hbar\omega)^{-3}$为对易相空间中3D谐振子的配分函数, $A=\alpha^2+\Big(\dfrac{m\omega\theta}{2\alpha\hbar}\Big)^2$, $B=(\bar{\theta}+m^2\omega^2\theta)/\hbar$, $C=(\bar{\theta}/2\hbar\alpha)^2+(m\omega\alpha)^2$. 将内能、定容热容量及熵函数可分别为

$$\hat{U}^v = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\hat{z}_1=\frac{3N}{\beta}=3NkT, \qquad (19)$$

$$\hat{C}_V^v=\Big(\frac{\partial\hat{U}^v}{\partial T}\Big)_V=3Nk, \qquad (20)$$

$$
\begin{aligned}
\hat{S}^v &= S^v+Nk\bigg\{\ln\Big(1+\frac{\theta\bar{\theta}}{\alpha^4\hbar^2}\Big)\\
&\quad +\ln\Big[\frac{m^2\omega^2}{\alpha^2\sqrt{(AC)^2-(B/2)^4}}\Big]\bigg\}, \qquad (21)
\end{aligned}
$$

式中S^v为对易相空间中3D谐振子体系的熵函数. (21)式中第二项是非对易效应对体系微观状态带来的影响, 以$C_\mathrm{S}=1+\theta\bar{\theta}/\hbar^2\alpha^4$表示; 第三项是非对易效应对谐振子势能带来的影响, 以$C_\mathrm{P}=m^2\omega^2/\alpha^2\sqrt{(AC)^2-(B/2)^4}$表示.

对2D谐振子, 类似于3D情况, 可得到在非对易相空间中的配分函数、内能、定容热容量及熵函数分别为

$$\hat{z}_1\cong(\hbar\omega\beta)^{-2}C_\mathrm{S}C_\mathrm{P}=C_\mathrm{S}C_\mathrm{P}z_1^v, \qquad (22)$$

$$\hat{U}^v=-N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\hat{z}_1=2NkT, \qquad (23)$$

$$\hat{C}_V^v=\Big(\frac{\partial\hat{U}^v}{\partial T}\Big)_V=2Nk, \qquad (24)$$

$$\hat{S}^v=S^v+Nk(\ln C_\mathrm{S}+\ln C_\mathrm{P}). \qquad (25)$$

式中$z_1^v=(\beta\hbar\omega)^{-2}$和$S^v$为对易相空间中2D谐振子体系的配分函数和熵函数. (21)和(25)式表示非对易效应使体系的微观状态和势能发生变化而使体系的熵比对易相空间中的熵值增加[13,28]. 从(18), (21), (22)和(25)式可知, 当$\alpha\to1$时, $\theta\to0$, 则$\hat{z}_1\to z_1$, $\hat{S}\to S$, 即当非对易参数趋于零($\theta\to0$)时, 非对易相空间的配分函数和熵函数均与对易相空间中的相应函数保持一致[29].

4 讨　论

1) 表1分别给出了在对易和非对易相空间中, 1D, 2D, 3D谐振子体系的热力学函数的表达式. 表1表明, 在非对易相空间中内能和定容热容量值均为常数, 此结果与经典谐振子体系的内能和热容量结果保持一致, 此结果一方面反映非对易效应只是对体系的微观状态个数和混乱度有影响, 另一方面表明由于采用了玻尔兹曼统计方法, 即满足经典极限条件的系统, 根据能量均分定理也可知谐振子的内能和定容热容量是常数.

2) 对非对易效应而言, 表1表明, 在非对易相空间中谐振子配分函数和熵函数的变化是由谐振子体系的微观状态个数和混乱度的变化而引起的. 由于非对易效应对微观状态影响的修正项($\ln C_\mathrm{S}$)大于零, 因此微观状态的修正使谐振子体系的熵增加[26]. 由于非对易效应对势能影响的修正项($\ln C_\mathrm{P}$)可取正负值, 当$\ln C_\mathrm{P}$取负值时, 若$|\ln C_\mathrm{P}|>\ln C_\mathrm{S}$, 则非对易效应对势能的修正使谐振子体系的熵减少.

表 1 在对易和非对易相空间中谐振子体系的热力学函数的对比
Table 1. Thermodynamic functions of harmonic oscillator system in commutative and noncommutative phase space.

类型	维数	配分函数	内能	热容	熵
对易相空间	1D	$(\hbar\omega\beta)^{-1}$	$1NkT$	$1Nk$	$Nk\Big(1-\ln\dfrac{\theta_v}{T}\Big)$
	2D	$(\hbar\omega\beta)^{-2}$	$2NkT$	$2Nk$	$2Nk\Big(1-\ln\frac{\theta_v}{T}\Big)$
	3D	$(\hbar\omega\beta)^{-3}$	$3NkT$	$3Nk$	$3Nk\Big(1-\ln\dfrac{\theta_v}{T}\Big)$
非对易相空间	1D	$(\hbar\omega\beta)^{-1}\,\alpha^{-2}$	$1NkT$	$1Nk$	$Nk\Big[\Big(1-\ln\dfrac{\theta_v}{T}\Big)-2\ln\alpha\Big]$
	2D	$(\hbar\omega\beta)^{-2}C_{\rm S}C_{\rm P}$	$2NkT$	$2Nk$	$2Nk\Big[\Big(1-\ln\dfrac{\theta_v}{T}\Big)+\ln C_{\rm S}+\ln C_{\rm E}\Big]$
	3D	$(\hbar\omega\beta)^{-3}C_{\rm S}C_{\rm P}$	$3NkT$	$3Nk$	$3Nk\Big[\Big(1-\ln\dfrac{\theta_v}{T}\Big)+\ln C_{\rm S}+\ln C_{\rm E}\Big]$

5 结 论

本文讨论了在对易和非对易相空间中谐振子体系的热力学性质. 利用玻尔兹曼统计方法推导了配分函数、内能、定容热容量以及熵等热力学函数. 结果表明,非对易效应仅改变谐振子的配分函数和熵函数等与微观结构有关的物理参数, 而对内能和定容热容量等宏观物理量没有影响; 在非对易相空间中谐振子配分函数和熵函数的变化是由谐振子体系的微观状态个数和混乱度的变化而引起的, 此结果与参考文献 [27] 的结果一致. 从方法来说, 本文采用了玻尔兹曼统计方法, 得出的结果与能量均分定理的结果保持一致, 即说明此结果只对满足经典极限条件的系统成立. 而对非满足经典极限条件的量子系统, 需进一步采用费米-狄拉克和玻色-爱因斯坦统计方法深入探讨. 总之, 在非对易相空间中, 由于谐振子体系的微观状态个数和混乱度发生变化而导致了配分函数和熵函数值的变化.

参考文献

[1] Snyder H 1947 *Phys. Rev.* **71** 38
[2] Banks T, Fischler W, Shenker S H, Susskind L 1997 *Phys. Rev. D* **55** 5112
[3] Anwar A, Dulat S 2012 *J. Xinjiang Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **29** 448 (in Chinese) [阿布都外力 · 艾尼瓦尔, 沙依甫加马力 · 达吾来提 2012 新疆大学学报 (自然科学版) **29** 448]
[4] Dulat S, Li K 2009 *Eur. Phys. J. C* **60** 163
[5] Ma K, Dulat S 2011 *Phys. Rev. A* **84** 012104
[6] Masum H, Dulat S, Ma K 2012 *J. Xinjiang Univ. (Nat. Sci. Edi)* **29** 318 (in Chinese) [玉苏音 · 买苏木, 沙依甫加马力 · 达吾来提, 马凯 2012 新疆大学学报 (自然科学版) **29** 318]
[7] Li K, Chamoun N 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 1122
[8] Yakup R, Dulat S, and Obulkasim A 2012 *Coll. Phys.* **31** 1 (in Chinese) [热依木阿吉 · 亚克甫, 沙依甫加马力 · 达吾来提, 阿斯叶古丽 · 吾布力卡丝木 2012 大学物理 **31** 1]
[9] Luo Y H, Ge Z M 2006 *Commun. Theor. Phys.* **46** 967
[10] Zhang X L, Liu H, Yu H J, Zhang W H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040303 (in Chinese) [张秀兰, 刘恒, 余海军, 张文海 2011 物理学报 **60** 040303]
[11] Wei G F, Long C Y, Long Z W, Qin S J, Fu Q 2008 *Chin. Phys. C* **32** 338
[12] Sun Y Q, Long S M, Huang C J, Zhang K 2008 *J. Sichuan Nor. Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **31** 342 (in Chinese) [孙彦清, 龙姝明, 黄朝军, 张锴 2008 四川师范大学学报 (自然科学版) **31** 342]
[13] Mamat M, Dulat S, Wupur Y 2014 *Coll. Phys.* **313** 11 (in Chinese) [买买提热夏提 · 买买提, 沙依甫加马力 · 达吾来提, 亚森江 · 吾普尔, 买买吐尔逊 · 巴卡吉 2014 大学物理 **33** 11]
[14] Zhou S W, Liu W B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6767 (in Chinese) [周史薇, 刘文彪 2007 物理学报 **56** 6767]
[15] Huang J H, Sheng Z M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010316
[16] Bastos C, Bernardini A E, Bertolami O, Dias N C, Prata J N 2014 *Phys. Rev. D* **90** 045023
[17] Samary D O 2014 *Int. J. Math. Anal.* **8** 1285
[18] Panella O, Roy P 2014 *Phys. Rev. A* **90** 042111
[19] Santos V, Maluf R V, Almeida C A S 2014 *Ann. Phys.* **349** 402
[20] Han Y W, Hong Y 2014 *Chin. Phy. B* **23** 100401
[21] Belhaj A, Chabab M, Moumni H E, Sedra M B 2013 *Afr. Rev. Phys.* **8** 105
[22] Liang J, Liu Y C, Zhu Q 2014 *Chin. Phys. C* **38** 025101
[23] Wang Z C 2010 *Thermodynamics and Statistical Physics* (Beijing: Higher Education Press) p190 (in Chinese) [王志诚 2010 热力学 · 统计物理 (北京: 高等教育出版社) 第 190 页]
[24] Li K, Wang J H, Chen C Y 2005 *Mod. Phys. Lett. A* **20** 2165

[25] Seiberg N, Witten E 1994 *Nucl. Phys. B* **426** 19

[26] Wang J H, Li K, Liu P 2006 *HEP & NP* **30** 387 (in Chinese) [王剑华, 李康, 刘鹏 2006 高能物理与核物理 **30** 387]

[27] Bertolami O, Rosa J G, de Aragao C M L, Castorina P, Zappala D 2005 *Phys. Rev. D* **72** 025010

[28] Mojtaba N, Mehdi S 2013 *Chin. J. Phys.* **51** 94

[29] Chaichian M, Sheikh Jabbari M M, Tureanu A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2716

Thermodynamic properties of harmonic oscillator system in noncommutative phase space*

Aili Mieralimujiang Mamat Mamatrishat† Ghupur Yasenjan

(*School of Physics Science and Technology, Xinjiang University, Urumqi 830046, China*)

(Received 5 December 2014; revised manuscript received 10 February 2015)

Abstract

In the last 15 years, noncommutative effects have received much attention and have been extensively studied in the fields of quantum mechanics, field theory, condensed matter physics, and astrophysics. The aim of this paper is to investigate the thermodynamic properties of a harmonic oscillator system in noncommutative phase space. For an example, the effects of noncommutativity between positions and that between momenta in the phase space on the thermodynamic properties of two- and three-dimensional harmonic oscillator system are studied by a statistical method. First, in the commutative phase space, the thermodynamic state functions are obtained from the partition functions of the harmonic oscillator system which satisfies Boltzmann statistics. Then, in the noncomummutative phase space, both noncommutative positions and noncommutative momenta are represented in terms of the commutative positions and momenta of the usual quantum mechanics by linear transformation method. Meanwhile, the other physical quantities such as the volume element, the number of microstates, and partition function in the noncommutative phase space are represented in terms of commutative positions and momenta. Finally, the thermodynamic and statistical state functions for the system in the noncommutative phase space are derived from the partition function, and the thermodynamic state functions in noncummutative and commutative phase spaces are compared with each other. The results show that the noncommutative effect changes the values of microscopic functions such as the partition function and entropy with the correction terms including noncummutative parameters. As the noncommutative parameters vanishes, i.e., reaches the commutative limit, the partition and entropy functions of the system coincide with the results of usual thermodynamics and statistical physics. Moreover, the macroscopic state functions such as the internal energy and heat capacity, remain constant. The results imply that the correction terms in the partition function and entropy may result from the corrections of the number of microstates and potential energy of the system by noncommutativity of the position and momentum. In conclusion, the method used in the paper is corresponding to the classical system that satisfies Boltzmann statistics, and the results derived here can provide a starting point for further studying the quantum system that satisfies Fermi-Dirac and Bose-Einstein statistics.

Keywords: noncommutative phase space, harmonic oscillator, thermodynamic properties

PACS: 02.40.Gh, 33.20.Tp, 05.70.Ce **DOI:** 10.7498/aps.64.140201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61366001), and the Scientific Research Starting Foundation for the Returned Doctorate Scholars, Xinjiang University, China (Grant No. 208-61344).

† Corresponding author. E-mail: mmtrxt@xju.edu.cn