

基于总能形式的耦合的双分布函数热晶格玻尔兹曼数值方法*

刘飞飞¹⁾ 魏守水^{1)†} 魏长智¹⁾²⁾ 任晓飞¹⁾

1) (山东大学, 控制科学与工程学院, 济南 250061)

2) (济南大学, 信息科学与工程学院, 济南 250002)

(2014年10月24日收到; 2015年1月28日收到修改稿)

双分布函数热晶格玻尔兹曼数值方法在微尺度热流动系统中得到广泛的应用. 本文基于晶格玻尔兹曼平衡分布函数低阶 Hermite 展开式, 创新性地提出了包含黏性热耗散和压缩功的耦合的双分布函数热晶格玻尔兹曼数值方法, 将能量场内温度的变化以动量源的形式引入晶格玻尔兹曼动量演化方程, 实现了能量场与动量场之间的耦合. 研究了考虑黏性热耗散和压缩功的和不考虑的两种热自然对流模型, 重点分析了不同瑞利数和普朗特数下流场内的流动情况以及温度、速度和平均努赛尔数的变化趋势. 本文实验结果与文献结果一致, 验证了本文数值方法的可行性和准确性. 研究结果表明: 随着瑞利数和普朗特数的增大, 方腔内对流传热作用逐渐增强, 边界处形成明显的边界层; 考虑黏性热耗散和压缩功的模型对流作用相对增强, 黏性热耗散和压缩功对自然对流的影响在微尺度流动过程中不能忽略.

关键词: 晶格玻尔兹曼方法, 自然对流, 黏性热耗散, 压缩功

PACS: 44.25.+f, 44.05.+e, 02.90.+p

DOI: 10.7498/aps.64.154401

1 引言

在微机电系统的设计及应用中, 微尺度流动是非常重要而突出的问题. 当流场特征尺寸为微米或亚微米量级时, 在大尺度流动中可以被忽略的因素(如热特性变化、速度滑移、黏性热耗散等)占据了重要地位^[1]. 宏观流体力学方法基于连续介质的假设, 不适用于处理微尺度流动问题. 分子动力学方法通过分子间的相互作用研究流体的运动规律, 理论上可以模拟任意的流体系统, 但对计算量和存储量的需求非常大. 介观尺度的晶格玻尔兹曼方法(lattice Boltzmann method, LBM)^[2]将流体离散为流体粒子团分布到欧拉坐标系的晶格上, 避免了宏观流体力学方法中对连续介质假设的要求, 降低了计算成本, 在微尺度流体系统中具有较大的优势.

目前, LBM 已经成功地应用于无热变化的流

动领域. 但是当管道的内径减小至微尺度范围内时, 由于管内流体的速度梯度很大, 黏性热耗散效应和压缩功的影响也随之变大, 流动过程中总能量和温度的变化不能忽略. 1993年, Alexander 等^[3]首次提出考虑流场温度分布和变化的 LBM. 此后, 多种热 LBM 迅速发展起来, 主要分为三类: 多速度模型数值方法(multi-speed Lattice Boltzmann method, MS-LBM), 双分布函数模型数值方法(double-distribution function, DDF-LBM)和混合模型数值方法. MS-LBM^[4-6]由等温 LBM 直接扩展得到, 通过增加离散速度项描述温度变化, 但存在存储和计算成本高、温度变化范围窄的缺点, 同时该方法动量模态和能量模态之间存在的非物理耦合关系严重影响了数值的稳定性^[7]. 混合模型数值方法^[8,9]和 DDF-LBM^[10,11]将温度场和速度场分开处理, 提高了计算的稳定性. 但混合模型数值方法采用有限差分等经典数值方法模拟温

* 国家自然科学基金(批准号: 51075243, 11002083)和山东省自然科学基金(批准号: ZR2014EEM003, ZR2014AM031)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: sswei@sdu.edu.cn

度场, 弱化了LBM的优势. DDF-LBM采用两个不同的晶格玻尔兹曼分布函数分别代表流场和温度场. 1998年, He等从Boltzmann连续方程出发, 基于DDF-LBM方法, 通过引入一个内能分布函数来模拟温度的变化, 提出了第一个包含黏性耗散项和压缩功的热晶格玻尔兹曼数值方法^[12-15], 但其内能分布函数的演化方程需要二阶梯度的计算, 易造成额外的误差. 为了避免复杂的梯度项, Peng等直接忽略梯度项构建了简单的热LBM^[16], 但这种做法影响了宏观的热传导方程的推导. 为克服这一缺点, Li等提出了改进的热LBM^[17]却忽略了黏性耗散和压缩功. 2007年, Guo等基于速度分布函数的动力方程引进总能量分布函数概念构建了基于总能形式的含有黏性热耗散和压缩功的DDF-LBM^[18], 该数值方法演化方程中没有复杂的梯度计算, 计算简单, 数值稳定性高. 但是此数值方法是非耦合的, 即流体演化方程采用恒定温度, 能量场不能通过状态方程影响流场, 因此该数值方法局限于满足Boussinesq近似的流动问题^[19], 对于温度变化影响较大的流体模型, 动量和能量之间的不耦合会造成较大误差. 后来, 基于Shan等^[20]提出的晶格玻尔兹曼平衡分布函数高阶Hermite展开式, Hung等^[21]和Li^[22]等分别提出了耦合的DDFLBM, Hung通过选择合适的参考速度耦合能量场和动量场, Li通过在平衡密度分布函数内引入流体温度实现耦合. 但是由于采用具有高精度度的高阶Hermite展开式, 这两种数值方法计算过程复杂.

综上所述, 目前缺少基于低阶Hermite展开式的包含黏性热耗散和压缩功的耦合的热晶格玻尔兹曼数值方法. 在上述诸位学者研究的基础上, 本文基于晶格玻尔兹曼平衡分布函数低阶Hermite展开式, 创新性地提出包含黏性热耗散和压缩功的耦合的双分布函数热晶格玻尔兹曼数值方法, 将能量场内温度的变化以动量源的形式引入晶格玻尔兹曼动量演化方程, 温度的变化影响流场速度和密度的分布, 从而实现能量场与动量场之间的耦合. 其中温度的变化包括不同时刻和不同位置两部分变化. 此数值方法动量和能量平衡分布函数都基于低阶的Hermite展开式, 能量场和动量场之间的耦合可以替代Boussinesq近似对总能形式的双分布函数热LBM的局限, 扩展热LBM数值方法的应用范围. 为了验证该理论的有效性和准确性, 本文采用经典的自然热对流现象对上述数值方法进行验证. 分析了考虑黏性热耗散和压缩功的自然对流

和不考虑的自然对流两种模型, 模拟了不同瑞利数(Ra)^[23]和普朗特数(Pr)^[24]情况下流场内的流动情况, 研究温度、速度和平均努赛尔数($\overline{Nu}$)^[25]的变化趋势, 与相关文献结果做了对比性试验.

2 数值理论

基于总能形式的非耦合的含黏性热耗散和压缩功的DDF-LBM^[18]包含密度和总能两个分布函数, 总能含内能和机械能两部分, 总能碰撞算子的物理本质是粒子之间的碰撞过程对能量变化的影响. 其离散速度模型的演化方程为

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta_t, t + \delta_t) \\ = f_i(\mathbf{x}, t) - w_f [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] \\ + \delta_t \left(1 - \frac{w_f}{2} \right) \cdot F_i, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta_t, t + \delta_t) \\ = h_i(\mathbf{x}, t) - w_h [h_i(\mathbf{x}, t) - h_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] \\ + (w_h - w_f) \left[f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta_t}{2} F_i \right] \\ \times \left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \delta_t \left(1 - \frac{w_h}{2} \right) q_i, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{x}$ 是晶格的格点位置, t 为当前时间, δ_t 是时间步长, $w_f = \frac{2\delta_t}{(2\tau_f + \delta_t)}$, $w_h = \frac{2\delta_t}{(2\tau_h + \delta_t)}$, τ_h 和 τ_f 分别为动量和总能量无量纲松弛时间, $\tau_f = \frac{\mu}{p}$, $\tau_h = \frac{\kappa}{c_p p}$, μ 为流体的动力黏度, c_p 为等压比热容, κ 为热传导系数, p 为流体压力. i 是迁移方向, 对于D2Q9二维模型^[26], $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. f_i 和 h_i 分别为 i 方向密度和总能量的分布函数, f_i^{eq} 和 h_i^{eq} 分别为密度和总能量的平衡态分布函数, $\mathbf{e}_i$ 和 $\mathbf{u}$ 分别为离散速度和宏观速度. F_i 和 q_i 是与外力有关的项,

$$F_i = \omega_i \rho \left[\frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}}{RT_0} + \frac{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a})}{R^2 T_0^2} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{RT_0} \right], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} q_i = \left[\omega_i \frac{\rho E}{RT_0} + f_i^{\text{eq}} + \left(1 - \frac{w_f}{2} \right) \right. \\ \left. \times \left(f_i - f_i^{\text{eq}} + \frac{\delta_t}{2} F_i \right) \right] \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{a}$ 为外力引起的加速度. R 为气体常数, T_0 为参考温度, ρ 为流体密度. ω_i 为权系数 ($\omega_0 = 4/9$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 1/9$, $\omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = 1/36$). 对于D2Q9二维模型, 平衡分布函数和离散速度值 $\mathbf{e}_i$ 分别如下:

$$f_i^{\text{eq}}(T_0) = \rho\omega_i \left[1 + \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{RT_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{RT_0} \right)^2 - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT_0} \right], \quad (5)$$

$$h_i^{\text{eq}}(T_0) = Ef_i^{\text{eq}} + \omega_i p_0 \left[\frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{RT_0} + \left(\frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{RT_0} \right)^2 - \frac{\mathbf{u}^2}{RT_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{e}_i^2}{RT_0} - D \right) \right], \quad (6)$$

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \left(\cos \left[\frac{\pi(i-1)}{2} \right], \sin \left[\frac{\pi(i-1)}{2} \right] \right) c, & i = 1, 2, 3, 4, \\ \sqrt{2} \left(\cos \left[\frac{\pi(i-9/2)}{2} \right], \sin \left[\frac{\pi(i-9/2)}{2} \right] \right) c, & i = 5, 6, 7, 8, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $c = \sqrt{3RT_0}$ 是流体迁移晶格速度. 总能 $E = c_v T + \frac{\mathbf{u}^2}{2}$, c_v 为定容比热容, $p_0 = \rho RT_0$, D 为空间维度.

根据碰撞算子的守恒性质, 易得

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\sum_i \mathbf{e}_i f_i}{\sum_i f_i} + \frac{\delta_t}{2} \mathbf{a}, \\ E &= \frac{\sum_i h_i}{\sum_i f_i} + \frac{\delta_t}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (8)$$

上述方程 (1)–(8) 构成了包含黏性热耗散和压缩功的非耦合的DDF-LBM. 对于在流动中可以忽略黏性热耗散和压缩功的模型, 采用内能分布函数 g_i 计算温度场, 内能演化方程 (9) 替换总能演化方程 (2):

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) \\ = g_i(\mathbf{x}, t) - w_g [g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)], \end{aligned} \quad (9)$$

其中平衡状态内能分布函数 $g_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) = DRT_0 f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)/2$, $w_g = \frac{2\delta_t}{2\tau_g + \delta_t}$, 内能松弛时间

$$\tau_g = \frac{\kappa}{pc_p}.$$

通过Chapman-Enskog分析^[18], 基于总能形式的含黏性热耗散和压缩功的非耦合的DDF-LBM数值方法可以获得对应的NS热流体力学方程为

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) &= -\nabla p_0 + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{a}, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot [(p_0 + \rho E) \mathbf{u}] \\ &= \nabla \cdot (c_v \tau_h p_0 \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\boldsymbol{\tau} = \mu p_0 [\nabla_1 \cdot \mathbf{u} + (\nabla_1 \cdot \mathbf{u})^T - (2/3)(\nabla_1 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}]$. $\mathbf{I}$ 为单位向量. 可以发现方程 (1) 中压力 p_0 是动压

力而非热力学压力, 温度场的变化不能通过状态方程和黏性系数的变化影响速度场, 即能量场方程与动量场方程是非耦合的. 为了克服这问题, 本文作者修正了离散速度模型的动量演化方程 (1), 把能量场温度的变化作为动量源引入到动量场. 流体流动过程中, 能量场内温度的变化包含两种情况, 同一晶格处不同时刻的温度变化, 主要造成热扩散系数和黏性系数等流体参数的变化; 同一时间不同晶格的温度变化, 主要影响流场速度分布. 动量演化方程包含碰撞和迁移两个过程, 把温度变化以动量源的形式添加到晶格玻尔兹曼动量演化方程中, 实现温度变化对流场的影响, 从而实现能量场与动量场之间的耦合.

根据总能的定义 $E = c_v T + \frac{\mathbf{u}^2}{2}$, t 时刻 $\mathbf{x}$ 处晶格点的温度 T 为

$$T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c_v} \left(\sum_{i=0}^8 \frac{h_i(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{x}, t)} - \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^2 \right). \quad (11)$$

对于不考虑黏性热耗散和压缩功模型的温度 $T(\mathbf{x}, t) = 2 \sum_{i=1}^8 g_i(\mathbf{x}, t) / (\rho D R)$.

$T_i(\mathbf{x}, t)$ 为 $\mathbf{x}$ 处晶格点的温度与周围 i 方向上晶格点温度的差异, 定义如下:

$$T_i(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}, t) - T(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta_t, t). \quad (12)$$

温度的变化以动量源的形式 K_i 引入动量演化方程 (1), 形式如下:

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta, t + \delta) \\ = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau_f} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] \\ + \delta_t \left(1 - \frac{w_f}{2} \right) \cdot F_i + \delta_t \omega_i K_i, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} K_i &= \mathbf{e}_i \left(\frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{R^2 T_0^2} - D \right) \left(\frac{T(\mathbf{x}, t)}{T(\mathbf{x}, t + \delta_t)} - 1 \right) \\ &+ \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{2RT_0} \left(\frac{\mathbf{e}_i^2}{RT_0} - D - 2 \right) T_i(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (14)$$

方程(14)右端第一项和第二项分别为 x 处晶格点 t 时刻温度与 $t + \delta_t$ 时刻温度和周围晶格点处温度变化对比产生的动量影响。

方程(2)—(8)和(11)—(14)构成了总能形式的耦合的双分布函数热晶格玻尔兹曼数值方法,通过Chapman-Enskog展开方法导出该数值方法所对应的宏观热流体力学方程(详见附录):

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) &= -\nabla \cdot \mathbf{p} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \rho \mathbf{a}, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot [(\rho E + p) \mathbf{u}] \\ &= \nabla \cdot (\tau_h p (c_v + R) \nabla T) + \nabla \cdot (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u}) \\ &\quad + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\mathbf{\Pi} = \mu p [\nabla_1 \cdot \mathbf{u} + (\nabla_1 \cdot \mathbf{u})^T - (2/3)(\nabla_1 \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}] + 2(1/3 - 1/D)\mu p (\nabla_1 \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}$. 压力 p 是热力学压力,温度场的变化可以通过状态方程和黏性系数的变化影响速度场,即能量场方程与动量场方程是耦合的。

此数值方法包含黏性热耗散和压缩功的影响,若将方程(2)替换为方程(9),构成耦合的不包含黏性热耗散和压缩功热晶格玻尔兹曼数值方法. 本文提出的数值方法通过将温度的变化作为动量源的形式引入晶格玻尔兹曼动量演化方程实现了能量场与动量场之间的耦合,打破Boussinesq近似对总能形式的DDF-LBM的局限,扩展热LBM数值方法的应用范围。

3 数值理论验证

3.1 数值模型

本文采用经典的热流动问题——自然热对流现象对上述数值方法进行验证. 构建的二维模型如图1所示,物理模型为封闭方腔其上下壁均为绝热,左壁面为高温壁面 T_h ,右壁面为低温壁面 T_c ,参考温度 $T_0 = \frac{T_h + T_c}{2}$. 腔体的长度尺寸为 H .

封闭方腔自然对流两个无量纲特性参数, Pr 和 Ra , $Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa}$, $Ra = \frac{\rho_0 g \beta (T_h - T_c) H^3 Pr}{\mu^2}$, g 为重力加速度, β 为热膨胀系数. 马赫数 $Ma = \frac{u_c}{c_s}$, 其中 $u_c = \sqrt{g \beta \Delta T H}$ 为自然对流特征速度, $c_s = \sqrt{RT_0}$ 为格子声速. 方程(2)和(13)中无量纲松弛时间 τ_h 和 τ_f 分别由无量纲特性参数 Pr , Ra 和 Ma 确定.

$$\tau_h = \frac{MaH}{\sqrt{RaRT_0Pr}}, \quad \tau_f = \frac{MaH\sqrt{Pr}}{\sqrt{RaRT_0}}.$$

方程(3), (4)和(8)中的外力设为重力, $a_x = 0$, $a_y = -\rho g$. 具体模拟的计算参数如下: $Pr = 0.71$, $Ma = 0.1$, $T_h = 315$ K, $T_c = 285$ K, $H = 12.8$ μm , 整个方腔划分为 128×128 晶格. 本文采用考虑黏性热耗散和压缩功的和与不考虑黏性热耗散和压缩功的两个自然对流模型, 边界条件采用热晶格玻尔兹曼方程非平衡外推的形式^[27].

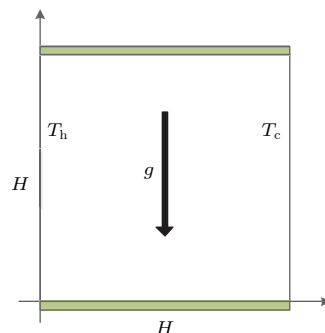


图1 自然对流二维数值模型

Fig. 1. The two-dimensional mathematical model of the nature convection.

3.2 结果和讨论

本文模拟了不考虑和考虑黏性耗散和压缩功两种情况下自然对流模型的热流情况. 流动过程中, 热壁面附近流体向上移动, 冷壁面附近流体向下移动, 最后达到稳定状态. 本文主要分析不同 Ra 数和 Pr 数情况下, 稳定状态时方腔内速度和温度的分布情况, 计算平均努赛尔数 $(\overline{Nu})$ ^[28]数值的大小, 将所得的实验结果与相关文献结果做对比验证本文理论的可行性和准确性。

3.2.1 Ra 数对流场和温度场的影响

根据文献^[17, 18]分析, 本文分别研究 Ra 数为 10^3 , 10^4 , 10^5 , 10^6 的情况下的流体流动和温度变化特性. 图2(a1)—(a4), (aT1)—(aT4)和(b1)—(b4), (bT1)—(bT4)分别给出 $Ra = 10^3$, 10^4 , 10^5 , 10^6 情况下不考虑和考虑黏性热耗散和压缩功的自然对流模型中流体达到稳定状态后的流线和等温线图. 图3(a), (b)和(c)分别给出方腔内垂直中线上 x 方向无量纲速度 ux^* , 方腔内水平中线上 y 方向无量纲速度 uy^* 和无量纲的温度 T^* 沿着方腔内部水平中心线的变化趋势. 图3中红色线代表不考虑黏性耗散和压缩功的模型, 绿色线代表考虑黏性耗散和压缩功的模型. 为了呈现清晰图示, 选取部分数据呈现在图3中。

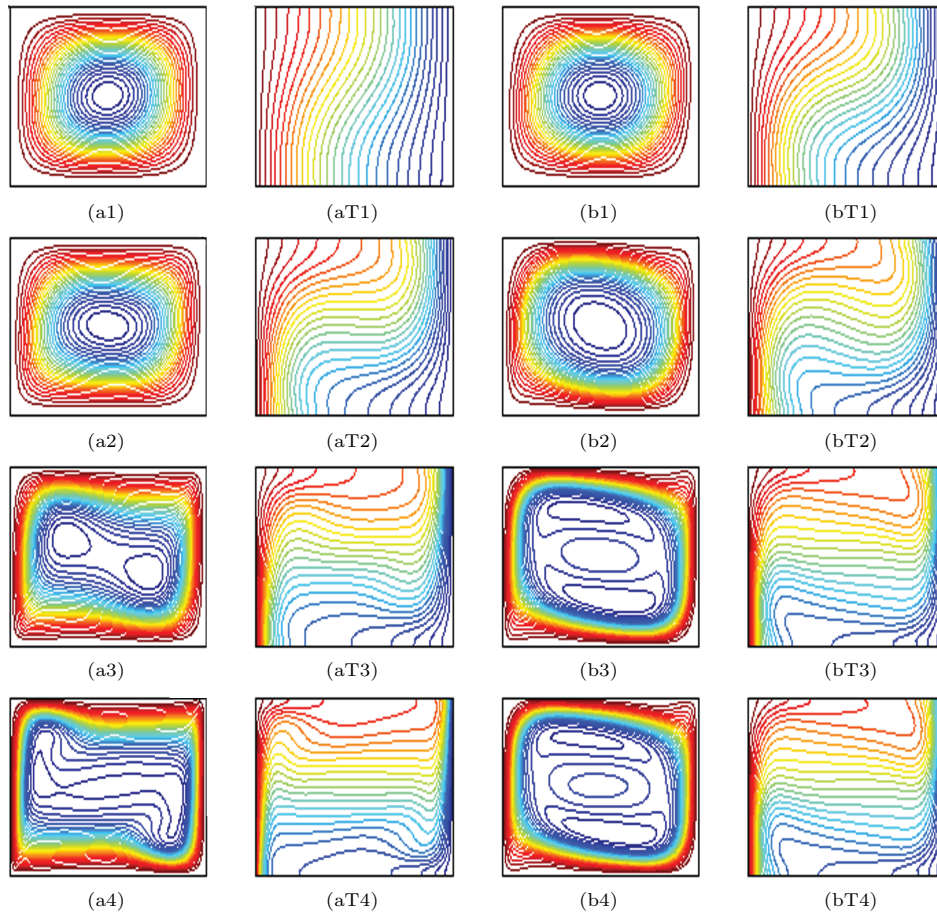


图2 (网刊彩色) 流线和等温线图 (a1)—(a4) 分别为 $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ 情况下不考虑黏性热耗散和压缩功的自然对流模型的流线图, (aT1)—(aT4) 为等温线图; (b1)—(b4) 分别为 $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ 情况下考虑黏性热耗散和压缩功的自然对流模型的流线图, (bT1)—(bT4) 为等温线图

Fig. 2. (color online) The figures of streamline and the isotherm: (a1)—(a4) are the figures of streamline and (aT1)—(aT4) are the figures of isotherm for the model not considering the viscous dissipation and compression work at $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$, respectively; (b1)—(b4) are the figures of streamline and (bT1)—(bT4) are the figures of isotherm for the model considering the viscous dissipation and compression work at $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$, respectively.

$Ra = 10^3$ 时, 由图 2(a1) 和 (b1) 发现两种模型的流线和等温线相似, 流动特性是在方腔中间出现了一个漩涡, 流线处于均匀分布状态. 但由图 3(a) 和 (b) 中的红色实线和绿色 o 型线对比可以发现, 考虑黏性热耗散和压缩功的模型内流动速度较大. 温度分布情况为: 不考虑的模型内的等温线中部微微向右上方弯曲, 其余部分呈垂直状态 (图 2(aT1)), 考虑黏性热耗散和压缩功的模型等温线中部弯曲程度大 (图 2(bT1)); 由图 3(c) 中红色实线可以看出不考虑的模型水平中线上的温度近似为一条斜直线, 温度从左壁面向右壁面均匀递减, 考虑黏性热耗散和压缩功模型的水平中线上的温度值中间出现平缓过渡段 (图 3(c) 中的绿色 o 型线). 说明此情况下腔内的热传输主要以热传导为主, 对流作用较弱, 黏性热耗散和压缩功作用较小.

$Ra = 10^4$ 时, 由图 2(a2) 和 (b2) 可以发现两种

模型流线图出现差异, 方腔中央的圆形漩涡变为椭圆形, 不考虑模型的椭圆长轴与方腔水平线平行 (图 2(a2)), 考虑的模型内椭圆形流线长轴与方腔对角线平行 (图 2(b2)). 由图 3(a) 和 (b) 中的红色虚线和绿色 * 型线可以发现两种模型下的流动速度都随着 Ra 增加而增大. 由图 2(aT2) 和 (bT2) 可以发现两种模型的冷热壁面等温线附近呈垂直状态, 中间区域水平状态扩大. 图 3(c) 中的红色虚线线和绿色 * 型线表明水平中心线上的温度值变化趋势呈 'L' 型, 边界处温差梯度大, 中间段温度值变化平缓. 说明此情况下对流作用逐渐增强, 黏性耗散和压缩功影响作用开始增大.

$Ra = 10^5$ 时, 不考虑的模型内方腔中央的大漩涡分裂为两个小漩涡 (图 2(a3)), 图 3(a) 和 (b) 中的红色点线表明流速随着 Ra 数的增加而增加. 对流作用强, 黏性耗散和压缩功的影响大, 考虑的

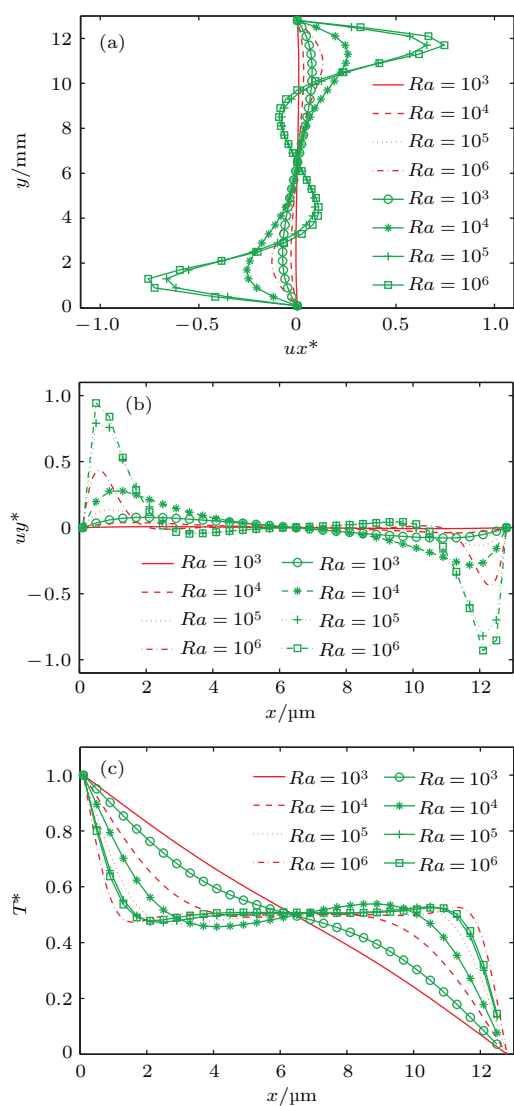


图3 (网刊彩色) 速度和温度变化趋势图 (红色无型线代表不考虑黏性耗散和压缩功的自然对流模型 $Ra = 10^3$ (红色实线), 10^4 (红色虚线), 10^5 (红色点线), 10^6 (红色点划线). 绿色有型线代表考虑黏性耗散和压缩功的自然对流模型 $Ra = 10^3$ (绿色○型线), 10^4 (绿色*型线), 10^5 (绿色+型线), 10^6 (绿色□型线)) (a) 给出方腔内垂直中线上 x 方向无量纲速度 ux^* 变化情况; (b) 给出方腔内水平中线上 y 方向无量纲速度 uy^* 变化情况; (c) 给出方腔内水平中线上无量纲温度 T^* 变化情况

Fig. 3. (color online) The trend graphs of velocity and temperature: (a) The variation trend of dimensionless velocity ux^* along the median vertical line of the square cavity; (b) The variation trend of dimensionless velocity uy^* along the median horizontal line of the square cavity; (c) The variation trend of dimensionless temperature T^* along the median vertical line of the square cavity. The red lines without additional shapes for the model not considering the viscous dissipation and compression work $Ra = 10^3$ (red solid line), 10^4 (red dash line), 10^5 (red dotted line), 10^6 (red dot and dash line); The green lines with additional shapes for the model considering the viscous dissipation and compression work $Ra = 10^3$ (green ○ line), 10^4 (green * line), 10^5 (green + line), 10^6 (green □ line).

模型方腔内流线出现三个漩涡, 上中下排列, 流线集中分布在方腔壁面附近形成了边界非常明显的薄边界层 (图2(b3)). 由图3(a)和(b)中的绿色+型线可以发现, 靠近壁面处速度梯度大, 峰值高, 并且垂直中线上 x 方向速度变化曲线上两个大峰值之间出现两个反向小峰值. 温度变化情况为: 图2(aT3)和(bT3)中部水平等温线的范围扩大, 但图2(aT3)方腔内部热壁面下方和冷壁面上方的温度变化剧烈, 左上方和右下方的等温线外凸; 图3(c)中的红色点线和绿色+型线表明水平中心线上的温度值相等的中间段范围继续扩大, 壁面处温度梯度增大. 说明此情况下不考虑的模型内的热传导和对流作用相持, 但考虑模型内对流传热起主要作用.

$Ra = 10^6$ 时, 由图2(a4)可以看出不考虑的模型方腔内流线的两个漩涡分别向左上方和右下方移动, 中心位置出现新的漩涡; 此时壁面处的温度和速度变化梯度增加 (图3中的红色点划线), 热壁面下方和冷壁面上方的温度变化剧烈, 方腔内部左上方和右下方的等温线外凸 (图2(aT4)). 说明此情况下不考虑的模型内对流成为热传输的主要作用. 但考虑模型在 $Ra = 10^5$ 和 $Ra = 10^6$ 两种情况下获得的流线图、等温线图、速度和温度变化趋势图相似 (图3(a), (b), (c) 中的绿色□型线和绿色+型线变化情况相似), 表明由于黏性热耗散和压缩功的影响 Ra 的增加对模型的影响减弱.

由图3可以发现两种模型不同 Ra 数情况下方腔中心位置的温度保持恒定, 速度为零, 原因为换热过程中方腔中心点处的流体保持静止. 随着 Ra 的增大, 对流作用增强, 冷热壁面附近温度和速度变化剧烈形成边界层. 黏性热耗散和压缩功的影响促进了对流作用, 在上下左右四周壁面形成了明显的薄边界层, 边界层处对流强度大速度梯度大, 即黏性热耗散和压缩功起着显著地作用, 不能忽略. 以上仿真结果与文献[18, 20—22, 29, 30]结果一致, 验证了此数值方法的可行性.

努塞尔数的大小表示对流换热相对于相同流体层热传导的增强程度, 努塞尔数越大, 对流换热效果越明显. 为了进一步验证本文提出数值方法的可行性和准确性, 表1给出沿冷热壁面计算得出的平均努赛尔数 ($\overline{Nu}$). 计算公式如下:

$$\begin{aligned} \overline{Nu} &= \frac{1}{H} \int_0^H Nu dy \\ &= -\frac{1}{H} \int_0^H \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dy. \end{aligned} \quad (16)$$

表1 两种模型不同 Ra 数情况下的平均努赛尔数 $\overline{Nu}$ Table 1. The average Nu numbers ($\overline{Nu}$) of two different numerical models for different Ra number.

Ra	$\overline{Nu}$			
	不考虑黏性耗散和压缩功的自然对流模型		考虑黏性耗散和压缩功的自然对流模型	
10^3	本文方法	1.1190	本文方法	1.6824
	文献 [22] (e%)	1.1207(0.15%)	文献 [15] (e%)	1.7013 (1.12%)
	文献 [30] (e%)	1.1140(0.45%)	文献 [19]	
10^4	本文方法	2.2545	本文方法	4.3953
	文献 [22] (e%)	2.2528(0.12%)	文献 [15] (e%)	4.4611 (1.47%)
	文献 [30] (e%)	2.2450(0.42%)	文献 [19]	
10^5	本文方法	4.5278	本文方法	8.0474
	文献 [17] (e%)	4.5350(0.16%)	文献 [15] (e%)	8.1620 (1.40%)
	文献 [20] (e%)	4.5100(0.39%)	文献 [19]	
10^6	本文方法	8.765	本文方法	13.241
	文献 [15] (e%)	8.7764 (0.13%)	文献 [15] (e%)	13.1201 (0.92%)
	文献 [20] (e%)	8.806 (0.47%)	文献 [19]	13.198 (0.326%)

由表1可以得出随着 Ra 的增加, $\overline{Nu}$ 逐渐增大, 即高温壁面向低温壁面传递的总热量增大, 对流阻力减小, 导热阻力增大, 这表明传热作用机理由热传导逐渐转变为对流换热. 相同 Ra 情况下, 考虑黏性热耗散和压缩功模型的 $\overline{Nu}$ 比不考虑黏性热耗散和压缩功模型的大, 这表明黏性热耗散和压缩功促进了对流换热, 与上文结论一致. 本文提出的耦合的双分布函数热晶格玻尔兹曼数值方法获得的 $\overline{Nu}$ 与文献的 $\overline{Nu}$ 对比, 最大误差为1.47%, 验证了本文提出的数值方法的可行性和准确性.

3.2.2 Pr 数对流场和温度场的影响

在热量传播过程中, Pr 数反映流体物理性质对传热过程的影响. Pr 数值小代表热量主要以热传导的方式传导; Pr 数值大代表对流传热超过热扩散并且占据热量传播的主要地位. 为了考察 Pr 数对于两种模型的影响, 参考相关文献[31—33], 本文分析了 $Pr = 0.07, 0.7, 7$ 三种情况下, 两种模型在不同的 Ra 数下流场和温度场的变化情况.

图4和图5分别给出不考虑和考虑黏性热耗散和压缩功的自然对流模型 $Pr = 0.07, 0.7, 7$ 三种情况下, 流体达到稳定状态后的流线和等温线图. 图4和图5两图的(a1)—(a4)为 $Pr = 0.07, Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ 情况下的流线图, (aT1)—(aT4)为等温线图; (b1)—(b4)为 $Pr = 0.7, Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ 情况下的流线图, (bT1)—(bT4)为等

温线图; (c1)—(c4)为 $Pr = 7, Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ 情况下的流线图, (cT1)—(cT4)为等温线图.

由图4和图5中的(a1)和(aT1)可以发现, $Pr = 0.07$ 和 $Ra = 10^3$ 情况下, 热传导是主要传热途径, 两种模型的流线和等温线图一致, 流线中心形成规整的圆形漩涡, 等温线均匀垂直分布. 图4和图5中的(b1)和(bT1), $Pr = 0.7$ 和 $Ra = 10^3$ 的情况上文已分析. 由图4和图5中的(c1)和(cT1)可以发现, $Pr = 7$ 和 $Ra = 10^3$ 情况时, 对流传热起作用, 等温线中心处出现弯曲, 并且两种模型的差异开始出现, 考虑黏性耗散和压缩功的模型对流作用的加强, 等温线弯曲程度大. 随着 Pr 数的增大, 黏性热耗散和压缩功的作用开始出现. 图4和图5中的(a2)和(aT2), (b2)和(bT2), (c2)和(cT2); (a3)和(aT3), (b3)和(bT3), (c3)和(cT3); (a4)和(aT4), (b4)和(bT4), (c4)和(cT4)三组图现出相同的结论: 随着 Pr 的增加, 对流作用增加, 黏性热耗散和压缩功的影响增大, 两种模型的区别越来越明显; 黏性耗散和压缩功的影响促进了对流换热, 在上下左右四周壁面形成了明显的薄边界层, 即黏性热耗散和压缩功在热流体流动过程起着显著的作用. 其中, 可明显的发现图5中的(c4)和(cT4)中对流作用最强, 黏性耗散和压缩功所起的作用最强, 形成的边界层最明显.

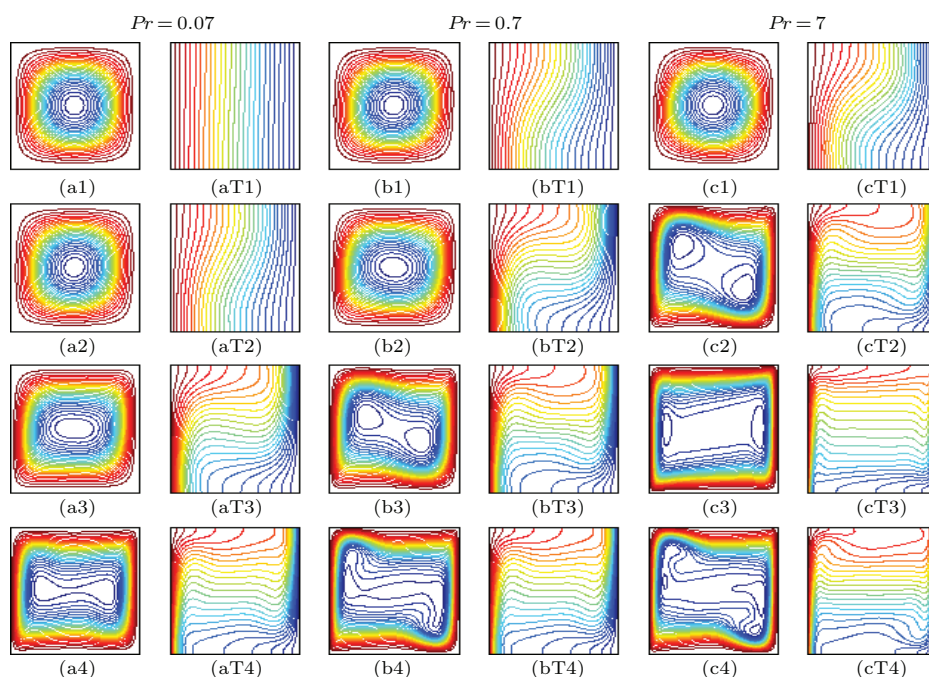


图4 (网刊彩色) 不考虑黏性热耗散和压缩功的自然对流模型的流线和等温线图 (a), (b), (c) 三组图分别为 $Pr = 0.07, 0.7, 7$ 三种情况下 $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ 流线图 ((a1)—(a4), (b1)—(b4), (c1)—(c4)) 和等温线图 ((aT1)—(aT4), (bT1)—(bT4), (cT1)—(cT4))

Fig. 4. (color online) The figures of streamline and the isotherm for the model not considering the viscous dissipation and compression work. (a) For $Pr = 0.07$, (a1)—(a4) for the figures of the streamline, (aT1)—(aT4) for the figures of the isotherm; (b) for $Pr = 0.7$, (b1)—(b4) for the figures of the streamline, (bT1)—(bT4) for the figures of the isotherm; (c) for $Pr = 7$, (c1)—(c4) for the figures of the streamline, (cT1)—(cT4) for the figures of the isotherm.

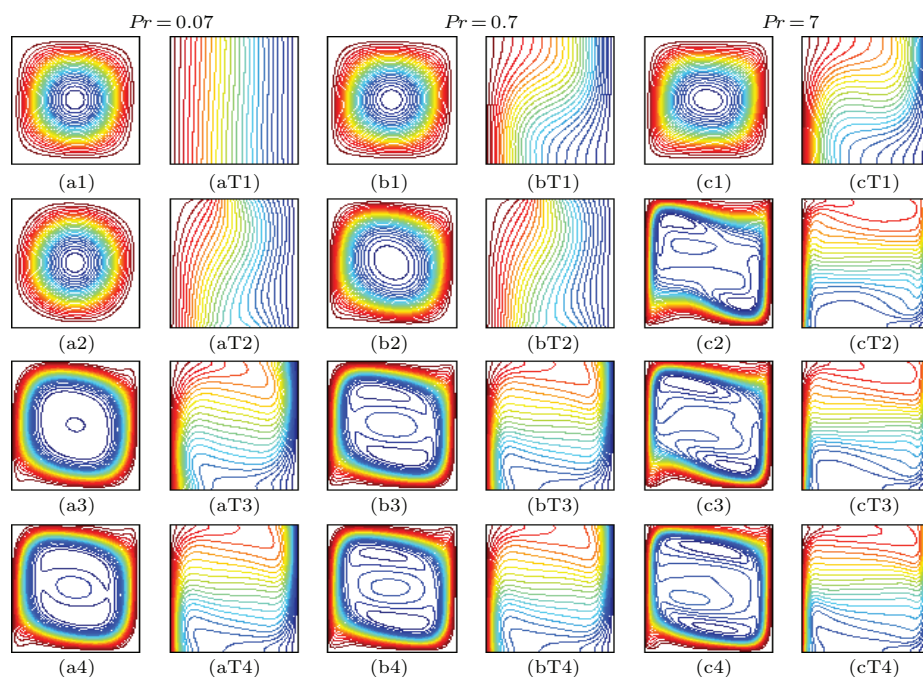


图5 (网刊彩色) 考虑黏性热耗散和压缩功的自然对流模型的流线和等温线图 (a), (b), (c) 三组图分别为 $Pr = 0.07, 0.7, 7$ 三种情况下 $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ 流线图 ((a1)—(a4), (b1)—(b4), (c1)—(c4)) 和等温线图 ((aT1)—(aT4), (bT1)—(bT4), (cT1)—(cT4))

Fig. 5. (color online) The figures of streamline and the isotherm for the model considering the viscous dissipation and compression work. (a) For $Pr = 0.07$, (a1)—(a4) for the figures of the streamline, (aT1)—(aT4) for the figures of the isotherm; (b) for $Pr = 0.7$, (b1)—(b4) for the figures of the streamline, (bT1)—(bT4) for the figures of the isotherm; (c) for $Pr = 7$, (c1)—(c4) for the figures of the streamline, (cT1)—(cT4) for the figures of the isotherm.

由上节内容已知随着 Ra 数的增加, 对流作用增加, 黏性热耗散和压缩功作用增强, 由图 4 和图 5 纵向对比发现在 $Pr = 0.07, 0.7, 7$ 的三种情况下, 可以得出同样的结论. 横向对比可以发现在相同 Ra 数情况下, 随着 Pr 数的增加, 对流作用也增强, 黏性热耗散和压缩功作用增强, 不考虑和考虑两种模型流线和等温线图的区别越来越明显,

不考虑的模型在冷热壁面处形成边界层, 考虑的模型上下左右四个壁面都形成明显的边界层, 随着 Pr 数的增加, 边界层越明显. 同时也可以发现 Pr 对于流场和温度场的影响作用弱于 Ra 数的影响. 此结论与文献 [31] 中的实验结果和文献 [34] 的实验结果一致, 进一步验证了本文所提出的数值方法的可行性.

表 2 两种模型不同 Pr 数情况下的平均努赛尔数 $\overline{Nu}$
Table 2. Average Nu numbers ($\overline{Nu}$) of two different numerical models at different Pr number.

Ra	$\overline{Nu}$							
	不考虑黏性耗散和压缩功的自然对流模型				考虑黏性耗散和压缩功的自然对流模型			
	$Pr = 0.07$		$Pr = 7$		$Pr = 0.07$		$Pr = 7$	
10^3	本文方法	0.847	本文方法	1.976	本文方法	1.51	本文方法	1.84
	文献 [31](e%)	0.75(1.3%)	文献 [35](e%)	2.01(1.7%)	文献 [34](e%)	1.48(2.1%)	文献 [32] (e%)	1.83(0.5%)
	文献 [36](e%)	0.70(1.7%)	文献 [37](e%)	1.98(0.2%)				
10^4	本文方法	1.153	本文方法	3.651	本文方法	3.9	本文方法	5.92
	文献 [31](e%)	1.16(0.6%)	文献 [35](e%)	3.55(1%)	文献 [34](e%)	3.84(1.6%)	文献 [32] (e%)	5.80(2%)
	文献 [36](e%)	1.14(1.1%)	文献 [37](e%)	3.56(1%)				
10^5	本文方法	2.34	本文方法	6.87	本文方法	6.97	本文方法	10.3
	文献 [38](e%)	2.31(1.2. %)	文献 [35](e%)	6.74(1.9%)	文献 [39](e%)	6.88(1.3%)	文献 [39](e%)	10.1(2%)
	文献 [33](e%)	2.29(2.1%)	文献 [37](e%)	6.94(1.5%)				
10^6	本文方法	4.65	本文方法	10.32	本文方法	11.9	本文方法	16.4
	文献 [38](e%)	4.52(2.8%)	文献 [35](e%)	10.5(1.4%)	文献 [39](e%)	11.6(2.5%)	文献 [39] (e%)	16.8(2.4%)
	文献 [33](e%)	4.61(0.8%)	文献 [37](e%)	10.2(1.2%)				

为了进一步验证本文提出数值方法的可行性和准确性, 表 2 给出沿冷热壁面计算得出的平均努赛尔数 ($\overline{Nu}$). 由表 2 可以得出随着 Pr 的增加, 对流作用增大, $\overline{Nu}$ 逐渐增大, 但是增大趋势小于 Ra 变化引起的增加趋势. 相同 Pr 情况下, 考虑黏性热耗散和压缩功模型的 $\overline{Nu}$ 比不考虑黏性热耗散和压缩功模型的大, 这表明黏性热耗散和压缩功促进了对流换热, 与上文结论一致. 本文提出的耦合的双分布函数热晶格玻尔兹曼数值方法获得的 $\overline{Nu}$ 与文献的 $\overline{Nu}$ 对比, 最大误差为 2.8%, 验证了本文提出的数值方法的可行性和准确性.

4 结 论

本文通过将能量场内温度的变化以动量源的形式引入晶格玻尔兹曼动量演化方程中, 实现了能量场与动量场之间的耦合. 提出了基于总能形

式的包含黏性热耗散和压缩功的耦合的双分布函数热晶格玻尔兹曼数值方法, 该数值方法可以替代 Boussinesq 近似对总能形式的双分布函数热 LBM 的局限, 扩展了热 LBM 数值方法的应用范围.

本文通过对考虑黏性热耗散和压缩功和不考虑的两个自然对流数值模型仿真, 研究了不同 Ra 数和 Pr 数下流场内的流动情况以及温度、速度和 $\overline{Nu}$ 的变化趋势. 研究发现随着 Ra 的增大 $\overline{Nu}$ 数逐渐增大, 方腔内对流传热作用逐渐增强, 边界处形成边界层; 不考虑黏性热耗散和压缩功的模型冷热边界处有明显的边界层, 上下壁面边界层不明显; 考虑的模型上下左右四个壁面处都形成明显的薄边界层, 边界层内速度梯度大; 研究发现黏性热耗散和压缩功对自然对流的影响随着 Ra 的增大而增大, 该影响在微尺度流动过程中不能忽略. 研究同时也发现, 随着 Pr 的增大 $\overline{Nu}$ 数也逐渐增大, 方腔内对流传热作用也逐渐增强, 两种模型的区别逐渐

增大, 考虑黏性热耗散和压缩功的模型边界处形成更明显的边界层, Pr 增大的影响远弱于 Ra 增大产生的影响. 本文实验结果与文献结果一致, 验证了本文数值方法的可行性和准确性.

附录

Chapman-Enskog 展开法推导基于总能形式的耦合的双分布函数热晶格玻尔兹曼数值方法的宏观流体力学方程

对密度和总能分布函数进行多尺度展开可得

$$f_i = f_i^{\text{eq}} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} + \dots \quad (\text{A1})$$

$$h_i = h_i^{\text{eq}} + \varepsilon h_i^{(1)} + \varepsilon^2 h_i^{(2)} + \dots \quad (\text{A2})$$

$$\text{并令 } \partial_t = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \partial_{t_n}, \nabla = \varepsilon \nabla_1, \mathbf{a} = \varepsilon \mathbf{a}_1.$$

将原文中的方程 (13) 和 (2) 对时间和空间做 Taylor 展开, 可得

$$\begin{aligned} & \delta_t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla \right) f_i + \frac{\delta_t^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla \right)^2 f_i \\ & + w_f [f_i + f_i^{\text{eq}}] + O(\delta_t^3) \\ = & \delta_t \left(1 - \frac{w_f}{2} \right) \cdot F_i + \delta_t \omega_i K_i, \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

$$\begin{aligned} & \delta_t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla \right) h_i + \frac{\delta_t^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla \right)^2 h_i \\ & + (w_h - w_f) [h_i + h_i^{\text{eq}}] + O(\delta_t^3) \\ = & (w_h - w_f) \left[f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta_t}{2} F_i \right] \left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \\ & + \delta_t \left(1 - \frac{w_h}{2} \right) q_i, \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

其中

$$\begin{aligned} F_i &= \varepsilon F_i^{(1)}, \\ F_i^{(1)} &= \omega_i \rho \left[\frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}}{RT_0} + \frac{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a})}{R^2 T_0^2} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{RT_0} \right]; \\ K_i &= \varepsilon K_i^{(1)}, \\ K_i^{(1)} &= \mathbf{e}_i \left(\frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{R^2 T_0^2} - D \right) \left(\frac{T(\mathbf{x}, t)}{T(\mathbf{x}, t + \delta_t)} - 1 \right) \\ &+ \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{2RT_0} \left(\frac{\mathbf{e}_i^2}{RT_0} - D - 2 \right) T_i(\mathbf{x}, t); \\ q_i &= \varepsilon q_i^{(1)} + \varepsilon^2 q_i^{(2)} + \dots, \\ q_i^{(1)} &= \left[\omega_i \frac{\rho E}{RT_0} + f_i^{\text{eq}} + \left(1 - \frac{w_f}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(f_i^{(0)} - f_i^{\text{eq}} + \frac{\delta_t}{2} F_i^{(1)} \right) \right] \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_1, \\ q_i^{(k)} &= \left(1 - \frac{w_f}{2} \right) f_i^{(k-1)} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_1, \quad k > 1. \end{aligned}$$

将 (A1) 和 (A2) 式代入方程 (A3) 和 (A4) 对比各阶系数, 可得

$$\varepsilon^0: f_i^{(0)} = f_i^{\text{eq}}, \quad (\text{A5a})$$

$$h_i^{(0)} = h_i^{\text{eq}}, \quad (\text{A5b})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: & (\partial_{t_1} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla_1) f_i^{(0)} + w_f f_i^{(1)} \\ = & \delta_t \left(1 - \frac{w_f}{2} \right) \cdot F_i^{(1)} + \delta_t \omega_i K_i^{(1)}, \end{aligned} \quad (\text{A6a})$$

$$\begin{aligned} & (\partial_{t_1} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla_1) h_i^{(0)} + (w_h - w_f) h_i^{(1)} \\ = & - (w_h - w_f) (f_i^{(1)} + \frac{\delta_t}{2} F_i^{(1)}) \cdot \left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \\ & + \delta_t \left(1 - \frac{w_h}{2} \right) q_i^{(1)}, \end{aligned} \quad (\text{A6b})$$

$$\varepsilon^2: \partial_{t_2} f_i^{(0)} + (\partial_{t_1} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla_1) f_i^{(1)} = -w_f f_i^{(2)}, \quad (\text{A7a})$$

$$\begin{aligned} & \partial_{t_2} h_i^{(0)} + (\partial_{t_1} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla_1) h_i^{(1)} \\ = & - (w_h - w_f) h_i^{(2)} + (w_h - w_f) f_i^{(2)} \left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \\ & + \delta_t \left(1 - \frac{w_h}{2} \right) q_i^{(2)}. \end{aligned} \quad (\text{A7b})$$

由原文方程 (8) 和 (A1), (A2), (A5) 可得

$$\begin{aligned} \sum_i f_i^{(n)} &= 0, \quad \sum_i \mathbf{e}_i f_i^{(n)} = 0, \quad \sum_i h_i^{(n)} = 0, \\ n &> 0. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

根据原文方程 (3), (4) 和 (14) 可得到

$$\begin{aligned} \sum_i F_i &= 0, \\ \sum_i \mathbf{e}_i F_i &= \rho \mathbf{a}, \\ \sum_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i F_i &= \rho [\mathbf{a} \mathbf{u} + (\mathbf{a} \mathbf{u})^T]; \\ \sum_i q_i &= \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}, \\ \sum_i \mathbf{e}_i q_i &= \left(\rho E \mathbf{I} + \sum_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i f_i \right) \cdot \mathbf{a}; \\ \sum_i K_i &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

根据原文方程 (5) 和 (6) 可以得到

$$\sum_i f_i^{\text{eq}} = \rho, \quad (\text{A10a})$$

$$\sum_i f_i^{\text{eq}} e_{ix} = \rho u_x, \quad (\text{A10b})$$

$$\sum_i f_i^{\text{eq}} e_{ix} e_{iy} = \rho u_x u_y + \rho RT \delta_{xy}; \quad (\text{A10c})$$

$$\sum_i h_i^{\text{eq}} = \rho E, \quad (\text{A11a})$$

$$\sum_i h_i^{\text{eq}} e_{ix} = (\rho E + p) u_x, \quad (\text{A11b})$$

$$\sum_i h_i^{\text{eq}} e_{ix} e_{iy} = (\rho E + 2p) u_x u_y + p(E + RT) \delta_{xy}. \quad (\text{A11c})$$

1 质量守恒

对方程 (A6a) 和 (A7a) 分别求速度的零阶矩, 可得到 t_1 和 t_2 尺度上的宏观方程:

$$\partial_{t_1} \rho + \nabla_1 \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{A12})$$

$$\partial_{t_2} \rho = 0. \quad (\text{A13})$$

由方程 (A12) 和 (A13) 可以得到质量守恒的连续方程

$$\partial_t \rho + \nabla_1 \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (\text{A14})$$

2 动量守恒

对方程 (A7a) 进行速度的一阶矩可得

$$\partial_{t_2} (\rho u_y) + \partial_{1x} \left(\sum_i e_{ix} e_{iy} f_i^{(1)} \right) = 0. \quad (\text{A15})$$

为推导动量守恒方程需要计算 $\sum_i e_{ix} e_{iy} f_i^{(1)}$, 对方程 (A6a) 求速度的二阶矩可得

$$\begin{aligned} & \partial_{t_1} \left(\sum_i f_i^{(0)} e_{ix} e_{ix} \right) + \partial_{1z} \left(\sum_i f_i^{(0)} e_{ix} e_{iy} e_{iz} \right) \\ & + w_f \sum_i f_i^{(1)} e_{ix} e_{iy} \\ & = \delta_t \left(1 - \frac{w_f}{2} \right) \cdot \sum_i \omega_i F_i^{(1)} e_{ix} e_{iy} \\ & + \delta_t \sum_i \omega_i K_i^{(1)} e_{ix} e_{iy}. \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

经过代数计算可得到

$$\begin{aligned} & -w_f \sum_i f_i^{(1)} e_{ix} e_{iy} \\ & = \partial_{t_1} (\rho u_x u_y + p \delta_{xy}) + \nabla_1 [p (u_x \delta_{xy} + u_y \delta_{xz} + u_x \delta_{yz})] \\ & - \delta_t \left(1 - \frac{w_f}{2} \right) \rho [\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u})^T]. \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

对方程 (A6 a) 进行速度的一阶矩可得到以下方程:

$$\partial_{t_1} (\rho u_y) + \partial_{1x} \left(\sum_i e_{ix} e_{iy} f_i^{\text{eq}} \right) = \rho a_{1y}. \quad (\text{A18})$$

根据方程 (A10c) 和 (A18) 可以得到

$$\partial_{t_1} (\rho u_y) + \partial_{1x} (\rho u_x u_y) = \rho a_y - \partial_{1x} p. \quad (\text{A19})$$

由方程 (A19) 和 (A12) 可得

$$\begin{aligned} \partial_{t_1} (\rho u_x u_y) & = \rho a_y - u_x \partial_{1y} p - u_y \partial_{1x} p \\ & - \partial_{1z} (\rho u_x u_y u_z). \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

低 Ma 数情况下, 三阶项可以忽略. 通过能量守恒推导 $\partial_{t_1} p$ 表达式, 对 (A6b) 式求和可以得到

$$\partial_{t_1} (\rho E) + \partial_{1y} [(\rho E + p) u_y] = \rho u_y a_{1y}. \quad (\text{A21})$$

已知 $E = (c_v T + \mathbf{u}^2)/2 = (DRT + \mathbf{u}^2)/2$ 代入方程 (A21) 可得

$$\partial_{t_1} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho \frac{D}{2} RT \right)$$

$$+ \partial_{1y} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 u_y + \rho \frac{D}{2} RT u_y + p u_y \right)$$

$$= \rho u_y a_{1y}. \quad (\text{A22})$$

经过代数计算可得

$$\begin{aligned} & u_y [\partial_{t_1} (\rho u_y) + \partial_{1x} (\rho u_y u_x) + \partial_{1y} p] + \partial_{t_1} \left(p \frac{D}{2} \right) \\ & + \partial_{1x} \left(\rho \frac{D}{2} RT u_x \right) + p \partial_{1x} u_x \\ & = \rho u_y a_{1y}. \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

由方程 (A19) 和 (A23) 可得

$$\partial_{t_1} p = \frac{2}{D} \rho u_y a_{1y} - \rho a_{1y} - \partial_{1x} (p u_x) - \frac{2}{D} p \partial_{1x} u_x. \quad (\text{A24})$$

由方程 (A20) 和 (A24) 可以得出

$$\begin{aligned} \sum_i f_i^{(1)} e_{ix} e_{iy} & = - \left(\frac{\tau_f}{\delta_t} + \frac{1}{2} \right) p \left\{ [\nabla_1 \cdot \mathbf{u} + (\nabla_1 \cdot \mathbf{u})^T] \right. \\ & \left. - \frac{2}{D} (\nabla_1 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A25})$$

由以上方程可以得到以下动量守恒方程:

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla_1 \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla_1 \cdot p + \nabla_1 \cdot \Pi + \rho \mathbf{a}_1, \quad (\text{A26})$$

其中 $\Pi = \mu p [\nabla_1 \cdot \mathbf{u} + (\nabla_1 \cdot \mathbf{u})^T - (2/3)(\nabla_1 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}] + 2(1/3 - 1/D) \mu p (\nabla_1 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}$.

3 能量守恒

对方程 (A7b) 求零阶矩可得

$$\partial_{t_2} (\rho E) + \partial_{1y} \left(\sum_i e_{iy} h_i^{(1)} \right) = \delta_t \left(1 - \frac{w_h}{2} \right) \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}. \quad (\text{A27})$$

为推导能量守恒方程, 需要计算 $\sum_i e_{iy} h_i^{(1)}$, 对方程 (A6b) 求一阶矩可得:

$$\begin{aligned} & - (w_h - w_f) \sum_i e_{iy} h_i^{(1)} \\ & = \partial_{t_1} \sum_i e_{iy} h_i^{(0)} + \partial_{1x} \sum_i e_{ix} e_{iy} h_i^{(0)} \\ & + (w_h - w_f) \left(u_x \sum_i e_{ix} e_{iy} f_i^{(1)} - \sum_i e_{ix} f_i^{(1)} \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \\ & + (w_h - w_f) \frac{\delta_t}{2} \left(u_x \sum_i e_{ix} e_{iy} F_i^{(1)} - \sum_i e_{ix} F_i^{(1)} \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \\ & + \delta_t \left(1 - \frac{w_h}{2} \right) \sum_i e_{iy} q_i^{(1)}. \end{aligned} \quad (\text{A28})$$

根据方程 (A11), (A9) 和 (A25) 可以得到

$$\begin{aligned} & - (w_h - w_f) \sum_i e_{iy} h_i^{(1)} \\ & = [\partial_{t_1} (\rho u_x + p E u_x) + \partial_{1y} (p RT \delta_{xy} + p u_x u_y)] \\ & + \partial_{1y} [p E \delta_{xy} + (p + \rho E u_x u_y)] \\ & + \tau_f \left(\frac{1}{\tau_h} - \frac{1}{\tau_f} \right) p (\partial_x u_y + \partial_y u_x) u_y \\ & - [(p + \rho E) a_x + \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_1) u_x]. \end{aligned} \quad (\text{A29})$$

由方程 (A12) 和 (A18) 可得

$$\partial_{t_1} u_y = \rho a_y - u_x \partial_{1x} u_y - \frac{1}{\rho} \partial_{1x} p. \quad (\text{A30})$$

由方程 (A21), (A24) 和 (A30) 可得

$$\begin{aligned} & \partial_{t_1} [(p + \rho E) u_y] \\ &= (p + \rho E) (\rho a_y - u_x \partial_{1x} u_y) - (E + RT) \partial_{1y} p \\ &+ u_y \{ \rho u_y a_{1y} - \partial_{1y} [(p + \rho E) u_y] - \frac{2}{D} \rho u_y a_{1y} - \rho a_{1y} \\ &- \partial_{1x} (p u_x) - \frac{2}{D} p \partial_{1x} u_x \}. \end{aligned} \quad (\text{A31})$$

根据方程 (A20), (A24), (A25) 和 (A31) 可得出

$$\begin{aligned} & \sum_i e_{iy} h_i^{(1)} \\ &= -\frac{D+2}{2} \tau_h p R \nabla_1 T - \left(\frac{\tau_f}{\delta_t} + \frac{1}{2} \right) \\ & \times p \left\{ [\nabla_1 \cdot \mathbf{u} + (\nabla_1 \cdot \mathbf{u})^T] - \frac{2}{D} (\nabla_1 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A32})$$

通过以上方程我们可得出能量守恒方程

$$\begin{aligned} & \partial_t (\rho E) + \nabla_1 \cdot [(\rho E + p) \mathbf{u}] \\ &= \nabla_1 \cdot (\tau_h p (c_v + R) \nabla T) + \nabla_1 \cdot (\Pi \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (\text{A33})$$

根据方程 (A14), (A26) 和 (A33), 可以得出本文所提出的耦合的基于总能形式的双分布函数热晶格玻尔兹曼数值方法所对应的宏观热流体力学方程 (即原文方程 (15)):

$$\begin{aligned} & \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ & \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla \cdot p + \nabla \cdot \Pi + \rho \mathbf{a} \\ & \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot [(\rho E + p) \mathbf{u}] \\ &= \nabla \cdot (\tau_h p (c_v + R) \nabla T) + \nabla \cdot (\Pi \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}, \end{aligned}$$

其中 $\Pi = \mu p [\nabla \cdot \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{u})^T - (2/3)(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}] + 2(1/3 - 1/D) \mu p (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}$.

参考文献

- [1] Jiang H Y, Ren Y K, Ao H R, Ramos A 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4541
- [2] Esfahanian V, Dehdashti E, Dehrouye A M 2014 *Chin. Phys. B* **23** 084702
- [3] Alexander F J, Chen S, Sterling J D 1993 *Phys. Rev. E* **47** R2249
- [4] Gan Y, Xu A, Zhang G, Li Y 2011 *Phys. Rev. E* **83** 056704
- [5] Chikatamarla S S, Karlin I V 2008 *Comput. Phys. Commun.* **179** 140
- [6] Gan Y, Xu A, Zhang G, Yu X, Li Y 2008 *Physica A* **387** 1721
- [7] Pierre L, Luo L S 2003 *Phys. Rev. E* **68** 036706
- [8] Pierre L, Luo L S 2003 *Int. J. Mod. Phys. B* **17** 41
- [9] Liu F F, Wei S S, Wei C Z, Ren X F 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 1947041 (in Chinese) [刘飞飞, 魏守水, 魏长智, 任晓飞 2014 物理学报 **63** 194704]
- [10] Li Q, He Y L, Tang G H, Tao W Q 2009 *Phys. Rev. E* **80** 037702
- [11] Chen S, Tölke J, Krafczyk M 2009 *Phys. Rev. E* **79** 016704
- [12] He X, Chen S, Doolen G D 1998 *J. Comput. Phys.* **146** 282
- [13] Dixit H N, Babu V 2006 *Int. J. Heat Mass Trans.* **49** 727
- [14] Wang C H, Yang R 2006 *Appl. Math. Comput.* **173** 1246
- [15] Shi Y, Zhao T S, Guo Z L 2006 *Comput. Fluids* **35** 1
- [16] Peng Y, Shu C, Chew Y T 2003 *Phys. Rev. E* **68** 143
- [17] Li Q, He Y, Wang Y, Tang G 2008 *Int. J. Mod. Phys. C* **19** 125
- [18] Guo Z L, Zheng C G, Shi B C, Zhao T S 2007 *Phys. Rev. E* **75** 3654
- [19] Mo J Q, Cheng Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4379 (in Chinese) [莫嘉琪, 程燕 2009 物理学报 **58** 4379]
- [20] Shan X, Yuan X F, Chen H 2006 *J. Fluid Mech.* **550** 413
- [21] Hung L H, Yang J Y 2011 *Ima J. Appl. Math.* **76** 774
- [22] Li Q, Luo K H, He Y L, Gao Y J, Tao W Q 2012 *Phys. Rev. E* **85** 016710
- [23] Basu R, Layek G C 2013 *Chin. Phys. B* **22** 054702
- [24] Sun D K, Zhu M F, Yang C R, Pan S Y, Dai T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** S285 (in Chinese) [孙东科, 朱鸣芳, 杨朝蓉, 潘诗琰, 戴挺 2009 物理学报 **58** S285]
- [25] Abdel R G, Khader M M, Megahed A M 2013 *Chin. Phys. B* **22** 030202
- [26] Liu F F, Wei S S, Wang S W, Wei C Z, Ren X F 2014 *J. Nanoengin. Nanosys.* **228** 189
- [27] Tang G H, Tao W Q, He Y L 2005 *Phys. Rev. E* **72** 6435
- [28] Sun L, Sun Y F, Ma D J, Sun D J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6503
- [29] Costa V A F 2005 *Int. J. Heat Mass Tran.* **48** 2333
- [30] Barakos G, Mitsoulis E, Assimacopoulos D 1994 *Int. J. Numer. Meth. Fl.* **18** 695
- [31] Cheng T S 2011 *Int. J. Therm. Sci.* **50** 197
- [32] Arcidiacono S, Dipiazza I, Ciofalo M 2001 *Int. J. Heat Mass Tran.* **44** 537
- [33] Chatterjee D, Biswas G 2011 *Numer. Heat Tr. A-Appl.* **59** 421
- [34] MacGregor R, Emery A 1969 *J. Heat Tran.* **91** 391
- [35] He Y, Yang W, Tao W 2005 *Numer. Heat Tr. A-Appl.* **47** 917
- [36] Pessoa T, Piva S 2009 *Int. J. Heat Mass Tran.* **52** 1036
- [37] Karimipour A, Nezhad A H, D'Orazio A, Shirani E 2013 *J. Theor. App. Mech-pol* **51** 447
- [38] Kawamura H, Abe H, Matsuo Y 1999 *Int. J. Heat Fluid Fl.* **20** 196
- [39] Dipiazza I, Ciofalo M 2000 *Int. J. Heat. Mass Tran.* **43** 3027

Coupling double-distribution-function thermal lattice Boltzmann method based on the total energy type*

Liu Fei-Fei¹⁾ Wei Shou-Shui^{1)†} Wei chang-Zhi¹⁾²⁾ Ren Xiao-Fei¹⁾

1) (School of Control Science Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

2) (school of Information Science and Engineering, University of Jinan, Jinan 250002, China)

(Received 24 October 2014; revised manuscript received 28 January 2015)

Abstract

Micro-scale flow is a very important and prominent problem in the design and application of micro-electromechanical systems. With the decrease of the scale, effects, such as viscous dissipation, compression work and boundary slip etc., which are ignored in a large-scale flow, play important roles in a microfluidic system.

With its certain advantages such as high numerical efficiency, easy implement, parallel algorithms etc., the lattice Boltzmann method is a powerful numerical technique for simulating fluid flows and modeling the physics in fluids. The double-distribution-function lattice Boltzmann method has been widely used in a micro-scale thermal flow system, since it utilizes two different distribution functions to take account of the viscous dissipation and compression work. However, most of the existing double-distribution-function lattice Boltzmann methods are “decoupling” models, and decoupling will cause the models to be limited to Boussinesq flows in which temperature variation is small. In order to overcome the above problem, based on the low-order Hermite expansion of the continuous equilibrium distribution function, we propose a coupling double-distribution-function thermal lattice Boltzmann method. This method introduces temperature changes into the lattice Boltzmann momentum equation in the form of the momentum source, which can affect the distribution of flow velocity and density, so as to realize the coupling between the momentum field and the energy field. In the process of fluid flow, the temperature change of the energy field includes two parts: one is for different times at the same lattice which can cause the change of the fluid characteristic parameters, such as the viscosity coefficient and the thermal diffusivity; the other is for the same time at different lattices which mainly affects the distribution of the velocity. In the collision and the migration processes, temperature change is introduced into the fluid flow to achieve the effect of temperature changes on the flow field and the coupling between the energy field and the momentum field. This method can break up the limitation of the Boussinesq flows and expand the application scope of the lattice Boltzmann method.

Two natural convection models (one takes into consideration the viscous dissipation and compression work, and the other does not) are studied in this paper to verify the effectiveness and accuracy of the coupling double-distribution-function thermal lattice Boltzmann method. Flow field and the changing trend in temperature, velocity and the averaged Nusselt number are analyzed emphatically at different Rayleigh number and Prandtl number. Results of this paper are excellently consistent with those in papers published, confirming the validity and accuracy of this method. Results also show that the convective heat transfer gradually enhances with increasing Rayleigh number and Prandtl number in the cavity, and the boundary layer is obviously formed in the regions very close to the walls; the heat transfer is greatly enhanced if viscous dissipation and compression work are considered; and these effects should not be neglected in the micro-scale flow system.

Keywords: lattice Boltzmann method, natural convection, viscous dissipation, compression work

PACS: 44.25.+f, 44.05.+e, 02.90.+p

DOI: 10.7498/aps.64.154401

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51075243, 11002083), and the Natural Science Foundation of Shandong Province (Grant Nos. ZR2014EEM003, ZR2014AM031).

† Corresponding author. E-mail: sswei@sdu.edu.cn