

平面自旋压缩态的产生与原子干涉的机理

黄馨瑶 项玉 孙风潇 何琼毅 龚旗煌

Planar quantum squeezing and atom interferometry

Huang Xin-Yao Xiang Yu Sun Feng-Xiao He Qiong-Yi Gong Qi-Huang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 160304 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.160304

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160304>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I16>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

结构库中二能级原子与自发辐射场间的纠缠演化

Evolution of entanglement between a two-level atom and spontaneous emission field in structured reservoir

物理学报.2014, 63(12): 124201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.124201>

飞秒脉冲正交位相压缩光的产生

Generation of femtosecond pulsed quadrature phase squeezed light

物理学报.2013, 62(16): 164206 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.164206>

N00N 态的 Wigner 函数及 N00N 态作为输入的量子干涉

Wigner function of N00N state and quantum interference with N00N state as input

物理学报.2013, 62(11): 114204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.114204>

连续纠缠态表象的几种 Schmidt 分解、物理意义与应用

The physical significances and applications of Schmidt decompositions of continuum bipartite entangled state representation

物理学报.2012, 61(20): 200301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.200301>

S=1 旋量 Bose-Einstein 凝聚中制备双模最大纠缠态方案

Scheme for generating maximally two-mode entangled state in an S=1 antiferromagnetic Bose-Einstein condensation

物理学报.2011, 60(6): 060305 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.60.060305>

专题: 量子精密计量与操控

## 平面自旋压缩态的产生与原子干涉的机理\*

黄馨瑶<sup>1)</sup> 项玉<sup>1)</sup> 孙风潇<sup>1)</sup> 何琼毅<sup>1)2)†</sup> 龚旗煌<sup>1)2)</sup>

1) (北京大学物理学院, 人工微结构和介观物理国家重点实验室, 北京 100871)

2) (量子物质科学协同创新中心, 北京 100871)

(2015年3月30日收到; 2015年5月18日收到修改稿)

在玻色-爱因斯坦凝聚体中实现自旋压缩和量子纠缠, 对于提高原子干涉测量相位灵敏度和原子钟精度有着非常重要的意义. 基于一种新的平面自旋分量的不确定性关系, 介绍了如何利用两分量玻色-爱因斯坦凝聚系统中原子间相互作用提供的非线性效应和原子内部能级间线性耦合, 实现量子平面自旋压缩(挤压)和模式纠缠. 描述了一项关于平面压缩态的理论工作, 该工作利用哈密顿量的精确对角化求解系统基态, 优化非线性作用和线性耦合强度比值, 使得包含平均自旋方向在内的两个正交自旋分量的不确定度同时压缩, 因此在平面上所有相位角度的涨落都受到压制, 而在与该平面垂直的第三个自旋分量方向反压缩. 利用传统自旋压缩判定纠缠, 只能判断多个不可分辨的原子处于纠缠态, 而平面自旋压缩可以检测两个可区分模式(比如, 原子内态)间的纠缠, 从而在不同模式间进行量子信息处理. 同时, 为实现超越标准量子极限的原子干涉相位精密测量, 传统方式是利用单个自旋分量压缩, 但需要对待测相位角度有很好的估计, 或者可以进行多次测量以逐渐逼近可获得的最大压缩极限, 这就要求量子态可以被精确的重复制备. 而利用平面自旋压缩, 对任意未知相位角度只需要测量两个垂直自旋分量就可以实现高的相位测量灵敏度.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 自旋压缩, 量子纠缠, 原子干涉

PACS: 03.75.Gg, 37.25.+k, 42.50.Dv

DOI: 10.7498/aps.64.160304

## 1 引言

根据量子力学中的海森堡不确定关系, 自旋角动量  $J$  在直角坐标轴上的三个正交分量  $J_X$ ,  $J_Y$ ,  $J_Z$  的不确定度(均方差的二次方根)满足关系  $\Delta J_X \Delta J_Y \geq |\langle J_Z \rangle|/2$  (假定  $Z$  为平均自旋方向,  $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$ ). 如果垂直于平均自旋方向的平面内某个自旋分量的涨落小于标准量子力学极限(SQL)<sup>[1,2]</sup>, 即  $|\langle J_Z \rangle|/2$ , 则体系处于自旋压缩态. 自旋压缩可以在多种体系中产生<sup>[3-5]</sup>, 处于自旋压缩态的多个粒子之间存在量子关联, 因此与量子纠缠<sup>[6-9]</sup>、Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 佯谬<sup>[10,11]</sup>、量子导引(quantum steering)<sup>[12]</sup>等有密切关系. 同时, 自旋压缩态对于降低原子干涉相

位测量的不确定度也有着非常重要的意义<sup>[13-16]</sup>. 然而, 上述自旋分量涨落的限制依赖于具体的量子态, 而自旋算符在一些特殊的量子态(比如, 自旋单重态)上的期待值为零, 即  $\langle J \rangle = 0$ , 对于这些量子态, 自旋的涨落将不再受到这个不确定关系的限制. 压制某一自旋分量的涨落(即实现单轴量子压缩)是提高精密测量和原子钟灵敏度的有效工具<sup>[1,13]</sup>. 最近的研究表明, 自旋压缩与量子 Fisher 信息可以相结合, 用来提升测量的精度<sup>[17,18]</sup>. 目前在原子系统中产生自旋压缩的工作主要分为两类: 一是通过光与原子相互作用, 二是依靠玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)系统中原子间弹性碰撞引起的非线性相互作用. 而后者产生方式最近已被成功实现, 并利用压缩的自旋分量实现了原子干涉仪<sup>[14-16]</sup>.

\* 国家自然科学基金(批准号: 11274025, 61475006, 11121091)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: qiongyihe@pku.edu.cn

这种单个自旋分量量子噪声的压制可以降低在某些预知相位 (predetermined phase) 附近的测量不确定度. 然而, 对于一个测量之前完全未知的相位, 我们无法知道哪一个相位角度的自旋被压缩, 因而难以通过单次 (single-shot) 测量实现超越标准量子极限的相位测量灵敏度. 2011 年, He 等<sup>[19]</sup> 给出了一个两自旋分量涨落的和的不确定性关系, 为解决上述问题提供了一条有益的思路. 他们主要讨论了一种新的量子自旋压缩形式——平面自旋压缩 (planar quantum squeezing, PQS). 通过增加一个自旋分量的不确定度, 使另外两个正交自旋分量的不确定度同时小于相干态所能达到的最小值, 即同时被压缩. 利用平面自旋压缩态可以降低该平面上任意角度自旋的量子涨落, 不仅可提高任意未知相位角的测量灵敏度, 也为不能通过重复测量实现的单次相位测量提供了实现的可能性.

平面自旋压缩由平面自旋的不确定性关系决定, 对任意自旋量子态适用. 该关系式给出了两个正交自旋分量涨落的和的最小值  $\Delta^2 J_{\parallel} \geq C_J$ . 其中  $J_{\parallel}$  代表自旋投影的一个平面, 如果是  $X$ - $Y$  平面, 那么  $\Delta^2 J_{\parallel} = \Delta^2 J_X + \Delta^2 J_Y$ .  $J = 1/2$  和  $J = 1$  对应的  $C_J$  值已经由 Hofmann 和 Takeuchi<sup>[6]</sup> 给出, 我们的研究结果给出了任意自旋量子数  $J$  对应的  $C_J$  值<sup>[19]</sup>. 计算发现  $C_J \sim J^{2/3}$ , 这代表平面上两个垂直方向自旋分量的涨落的和  $\Delta^2 J_{\parallel}$  也随  $J$  以同样的指数增加, 而垂直于压缩平面的自旋分量  $J_{\perp}$  会出现大的涨落,  $\Delta^2 J_{\perp} \sim J^{4/3}$ . 之后我们研究小组讨论了利用双势阱单分量 BEC 系统基态, 通过原子间相互作用提供的非线性效应和调节双势阱势垒高度实现了平面自旋压缩态, 并讨论了平面压缩与检测两个空间模式之间的纠缠以及实现原子干涉相位测量的关系<sup>[20]</sup>.

为更全面地理解平面压缩态的产生机理, 本文以单势阱双分量 BEC 为例, 综述了如何分别利用原子间表现的有效吸引和排斥相互作用实现平面自旋压缩态, 给出了 BEC 基态实现平面自旋压缩的可能参数范围, 并以此检测两个原子内部能级之间的模式纠缠, 进而以有效排斥相互作用为例, 讨论了平面压缩和传统自旋压缩实现原子干涉相位测量的各自优势. 该模型与双势阱单分量 BEC 系统处理类似, 采用双模近似理论将哈密顿量化成包含自旋算符线性项与二次项的和, 其中二次项可以产生自旋压缩. 两个模型之间的区别在于, 双势阱

单分量系统在双模近似下是同一个内态两个外部空间模式的相对原子数涨落被压缩, 而单势阱双分量 BEC 则利用 BEC 的两个内部状态进行压缩. 尽管两个系统都是靠冷原子之间的弹性相互作用带来的非线性效应来产生自旋压缩, 但实现的方式有所不同. 对于双势阱单分量 BEC 系统, 实验中通过绝热地控制中间势垒的高度来产生自旋压缩, 其中保持绝热条件需要严格地控制势垒升起所需时间<sup>[14]</sup>. 而对于单势阱双分量 BEC 系统, 实验中可以通过外加磁场囚禁势来调控两个分量对应的波函数<sup>[15]</sup>, 或者通过 Feshbach 共振技术调节两分量间的  $s$  波散射长度来增大原子间有效相互作用进而产生压缩<sup>[16]</sup>, 这两个实验方案都是非绝热的过程.

两种体系的研究都能带来许多新奇的物理现象, 比如周期驱动下两种系统的 BEC 都具有的不稳定性 (混沌)<sup>[21–23]</sup>, 研究双势阱模型所发现的隧穿性质<sup>[24–26]</sup>, 自囚禁现象<sup>[27–29]</sup>, 研究双分量模型在外势下所发现的新奇涡旋相<sup>[30–32]</sup> 等. 由于单势阱双分量 BEC 系统一方面在实验上不需要绝热地调节势垒高度, 而是通过磁场囚禁势或者 Feshbach 共振来实现对有效非线性作用的精确调控, 另一方面该系统包含原子的两个超精细能级结构, 可以在理论和实验上研究更多与原子内态调节相关的新物理现象, 比如近年来研究的考虑自旋轨道耦合下 BEC 系统的新奇相变<sup>[33–37]</sup>. 因此, 本文探讨在该模型下实现平面压缩态的条件和性质, 为今后更加深入的理论和实验研究提供新的思路. 除了上述产生平面压缩态的方法外, 实验中还可以利用光场的偏振与原子系综自旋, 通过非破坏性测量 (QND) 来实现, 目前西班牙光电子中心 (ICFO) Sewell 小组正在探索这一实验方案<sup>[38]</sup>, 检验我们提出的 PQS 概念.

通过平面压缩态不仅可以提高对任意未知相位测量的灵敏度, 突破标准量子极限, 也可以用来探测总自旋值  $J$  很大的介观系统的非经典效应<sup>[17,39]</sup>. 在本文讨论中, 为了简化问题, 突出平面压缩的概念, 我们不考虑 BEC 原子数的涨落以及有限温度的影响. 但之前的研究表明, 通过重新定义标准化算符 (比如,  $\tilde{J}_X = J_X/N$ ), 在考虑实际存在系统原子数涨落和有限温度的情况下, 仍然可以实现平面压缩、模式纠缠以及超越标准量子极限的相位测量灵敏度<sup>[17,19,40]</sup>.

## 2 BEC 基态平面压缩的产生

### 2.1 二次型哈密顿量和基态求解

在弱相互作用条件下, 假设相互作用不会改变原子的内部状态 (弹性碰撞), 我们采用双模近似的方法可以得到布居在两个不同的超精细态上的对称的双分量 BEC 系统哈密顿量 [41]:

$$H/\hbar = \Omega J_X + \chi J_Z^2, \quad (1)$$

其中,  $J_X = \frac{1}{2}(b^\dagger a + a^\dagger b)$ ,  $J_Y = \frac{i}{2}(b^\dagger a - a^\dagger b)$ ,  $J_Z = \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b)$ ,  $a, b$  分别对应原子的两个内态模, 即两个超精细结构能级  $|a\rangle$  和  $|b\rangle$ ,  $J_{X,Y,Z}$  为玻色子算符的 Schwinger 角动量表表示. 第一项描述原子的两个内态被拉曼光或者微波场耦合, 耦合强度由外部控制场的拉比频率  $\Omega$  决定, 考虑 BEC 总粒子数  $N = (a^\dagger a + b^\dagger b)$  守恒, 这一项等效于线性分束器作用. 第二项来源于内部原子间的弹性碰撞, 有效相互作用强度  $\chi = g_{aa} + g_{bb} - 2g_{ab}$ , 其中  $g_{ij}(i, j = a, b)$  描述原子内态  $i$  和原子内态  $j$  之间原子的相互作用, 大小正比于  $s$  波散射长度  $a_{ij}$ . 这里, 有效相互作用  $\chi$  的正负并不是直接对应原子间的排斥和吸引作用, 而是采用双模近似得到的有效排斥和吸引作用. 这一项提供了类似于量子光学中 Kerr 效应的非线性效应, BEC 的自旋压缩和纠缠就是由该非线性相互作用项产生的.

BEC 系统的基态解可以利用哈密顿 (1) 的精确对角化方法得到. 首先, 态矢量可以以粒子数态  $|n\rangle_a |N - n\rangle_b$  作为基矢展开 [14,15],

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^N c_n |n\rangle_a |N - n\rangle_b, \quad (2)$$

然后将哈密顿 (1) 在  $N + 1$  维的 Fock 基矢空间上对角化得到本征态能量和本征态的  $c_n$  分布. 基态的性质将由比值  $\Lambda = \Omega/\chi$  决定,  $\Lambda > 0$  和  $\Lambda < 0$  分别对应采用双模近似下原子间的有效排斥和吸引相互作用. 取  $N = 100$ , 图 1 给出了  $\Lambda$  取不同值时基态的系数分布.

从图 1 中可以看出, 当原子相互作用  $g_{ij}$  或者双模近似下有效相互作用  $\chi = 0$  时, 系统哈密顿 (1) 只剩下线性项, 此时的基态等效于 Fock 态  $|N\rangle$  入射到 50 : 50 光学分束器后的输出态 (II). 当原子间具有有效吸引相互作用时, 基态扩展 (III), 吸引作用

增强, 分布出现两个不同的波峰, 形成类似于猫态的叠加态 (IV), 继续增强, 分布形成明显的粒子不平衡现象, 只出现在 Fock 态的某一区域, 即形成近似宏观占据  $|a\rangle$  或  $|b\rangle$  的粒子数态 (V). 当原子间存在有效排斥相互作用时, BEC 基态对称的高斯波包分布与没有相互作用相比明显受到挤压 (I), 但不会出现有效吸引相互作用下的特殊分布情况. 我们将分别计算以上具有有效排斥和吸引相互作用下基态的三个自旋分量的均方差, 进而检测基态的平面压缩和纠缠性质.

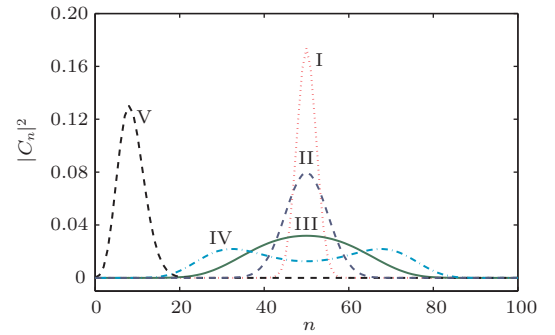


图 1 哈密顿 (1) 式描述的 BEC 基态的系数  $c_n$  分布,  $N = 100$ . 图中曲线分别表示双模近似下原子间有效排斥作用  $N/\Lambda = 21.15$  (I), 无有效相互作用  $\chi = 0$  (II), 有效吸引作用  $N/\Lambda = -1.02$  (III),  $-1.1$  (IV),  $-1.8$  (V).  
Fig. 1. The number distribution of Bose-Einstein condensate for the ground state solution of the Hamiltonian (1),  $N = 100$ . The lines I, II, III, IV, V present different number distribution corresponding to the parameters  $N/\Lambda = 21.15$  (effective repulsive coupling),  $\chi = 0$  (no effective coupling),  $N/\Lambda = -1.02, -1.1, -1.8$  (effective attractive coupling), respectively.

### 2.2 自旋压缩和平面自旋压缩

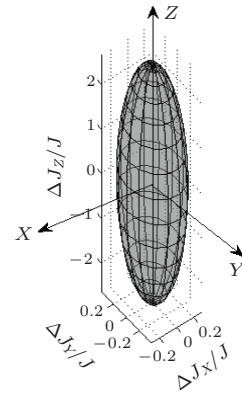
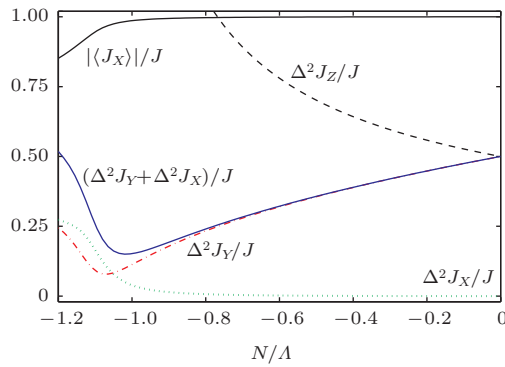
#### 2.2.1 自旋压缩

自旋压缩态的概念由日本物理学家 Kitagawa 和 Ueda [13] 在 1993 年提出, 他们利用两个经典的非线性耦合产生了自旋压缩态, 将量子光学中的压缩定义推广到自旋算符中. 至今, 关于自旋压缩的研究发展迅猛, 已取得较多研究成果 [17]. 对于哈密顿 (1) 描述的双分量 BEC 系统, 假定  $X$  为平均自旋方向,  $\langle J \rangle = \langle J_X \rangle$ ,  $\langle J_Y \rangle = \langle J_Z \rangle = 0$ , 三个正交自旋分量的不确定性关系为  $\Delta J_Y \Delta J_Z \geq |\langle J_X \rangle|/2$ , 如果  $J_Y$  或者  $J_Z$  的不确定度小于 SQL, 这里即  $|\langle J_X \rangle|/2$ , 则 BEC 基态处于自旋压缩态. 这里使用 Wineland 等 [1,2] 定义的自旋压缩参数  $\xi = \sqrt{N} \Delta J_{\perp, \min} / \langle J \rangle$ , 其中  $\langle J \rangle$  为平均自旋长度,  $\Delta J_{\perp, \min}$  是垂直于平均自旋的平面上自旋分量涨落的最小值,  $\xi < 1$  即证

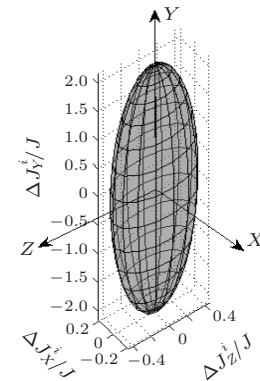
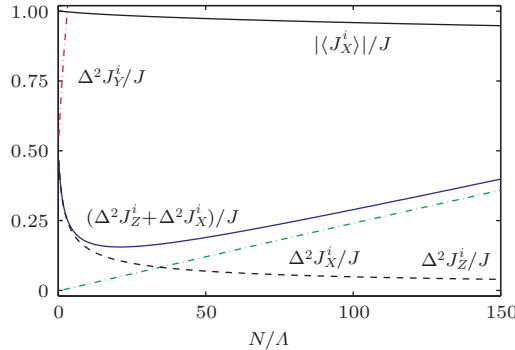
明存在自旋压缩. 图2给出了系统基态三个自旋分量的均方差与平均自旋长度随有效相互作用参数  $N/\Lambda = N\chi/\Omega$  的变化情况. 当原子间没有有效相互作用时,  $\Delta^2 J_Y = \Delta^2 J_Z = |\langle J_X \rangle|/2 = J/2 = N/4$ , 自旋压缩系数  $\xi = 1$ , 此时系统处于自旋相干态. 随着有效相互作用增强, 平均自旋长度减小  $\langle J \rangle = |\langle J_X \rangle| < J$ , 垂直于平均自旋方向的两个自旋分量的涨落分别出现压缩和反压缩, 系统处于自旋压缩态. 当原子间表现为有效吸引作用时,  $\Delta^2 J_Y < |\langle J_X \rangle|/2$ ,  $\Delta^2 J_Z > |\langle J_X \rangle|/2$ , 自旋参数  $\xi = \sqrt{N}\Delta J_Y/\langle J \rangle < 1$ . 当原子间表现为有效排斥

作用时,  $\Delta^2 J_Z^i < |\langle J_X^i \rangle|/2$ ,  $\Delta^2 J_Y^i > |\langle J_X^i \rangle|/2$ , 自旋参数  $\xi = \sqrt{N}\Delta J_Z^i/\langle J \rangle < 1$ .

从图2还可以看出, 随着原子间有效排斥作用增强, 压缩方向的自旋分量涨落 ( $\Delta^2 J_Z^i$ ) 逐渐减小, 趋向于零. 然而, 当原子间有效吸引作用增强时, 被压缩的自旋分量的涨落  $\Delta^2 J_Y$  不是单调递减, 在相互作用达到某个强度后涨落会出现拐点增大, 这对应图1中曲线IV给出的BEC基态系数分布的突然变化, 分布从中间对称的高斯波包变为两个不同的波峰.



(a)



(b)

图2 双分量BEC系统基态自旋分量的均方差与平均自旋长度,  $N = 100$  (a) 原子间有效吸引作用为  $N/\Lambda = -1.02$  时,  $\Delta^2 J_X + \Delta^2 J_Y$  最小; (b) 原子间有效排斥作用为  $N/\Lambda = 21.15$  时,  $\Delta^2 J_X^i + \Delta^2 J_Z^i$  有最小值, 在移相器和分束器作用下,  $\Delta^2 J_X^i + \Delta^2 J_Z^i$  可以转换为  $\Delta^2 J_X + \Delta^2 J_Y$ , 取最小值时, 对应量子态的三个自旋分量均方差的全部取值分别对应各自右侧的椭球

Fig. 2. The individual spin variances and mean spin  $\langle J_X \rangle$  versus the parameter  $N/\Lambda$  for  $N = 100$ , for the ground state solution of the Hamiltonian (1). We find that (a) the sum of spin variances  $\Delta^2 J_X + \Delta^2 J_Y$  is minimized by a critical value of effective attractive coupling  $N/\Lambda = -1.02$ , and (b) the sum of spin variance  $\Delta^2 J_X^i + \Delta^2 J_Z^i$  is minimized by a critical value of effective repulsive coupling  $N/\Lambda = 21.15$ . After phase shifting and beam splitter operations,  $\Delta^2 J_X^i + \Delta^2 J_Z^i$  becomes a PQS state with a strongly reduced variance in the internal interferometer spin operators,  $\Delta^2 J_X + \Delta^2 J_Y$ . Three-dimensional plots of uncertainties for PQS are shown on the right side, respectively.

由于表现有效排斥作用的BEC系统某个相位角度自旋涨落可以被压缩趋近于零, 因此对于提高原子干涉仪的灵敏度和原子钟的精度有重要意

义<sup>[1,13]</sup>. 目前很多关于BEC系统的理论和实验工作都在试图逼近可获得的最大压缩极限<sup>[14-16]</sup>, 从而获得最高相位测量灵敏度. 然而, 这种压制某个

事先确定相位 (predetermined phase) 附近的量子涨落的方法, 需要对被测相位角度有个好的预估, 或者需要多次测量以逐渐逼近压缩极限. 如果位相在测量之前是完全未知的, 或者由于系统量子态的不可重复制备而只能对系统进行单次测量, 就很难实现超越标准量子极限的相位测量.

### 2.2.2 平面自旋压缩

我们之前的研究结果给出了自旋为  $J$  的理想平面压缩态自旋分量涨落的值<sup>[19]</sup>, 分别为:  $|\langle J_X \rangle| = J - (J/4)^{1/3}/2$ ,  $\Delta^2 J_X \sim (2J)^{2/3}/8$ ,  $\Delta^2 J_Y \sim (2J)^{2/3}/4$ ,  $\Delta^2 J_Z \sim (J^2/2)^{2/3}$ . 下面我们以哈密顿(1)所描述的 BEC 系统的基态为例, 研究产生上述平面压缩态的可能性. 从图 2(a) 可以看出原子间有效作用表现为吸引时, 包含平均自旋方向  $X$  的两个自旋分量均方差的和  $\Delta^2 J_{\parallel} = \Delta^2 J_X + \Delta^2 J_Y$  在  $N/\Lambda = -1.02$  时出现最小值. 从右侧三维图可以清晰地看出此时三个自旋分量涨落呈椭球状,  $X$ - $Y$  平面上的自旋分量涨落  $\Delta^2 J_X$  和  $\Delta^2 J_Y$  同时被压缩到 SQL 以下, 且平均方向的自旋分量涨落压缩最大, 而垂直于压缩平面的自旋分量  $J_Z$  的涨落会增大, 此时的 BEC 基态为 PQS 态. 图 2(b) 给出了原子间有效作用表现为排斥时的结果, 与吸引作用时情况类似, 包含平均自旋方向  $X$  在内的两个自旋分量涨落的和  $\Delta^2 J_{\parallel} = \Delta^2 J_X^i + \Delta^2 J_Z^i$  在  $N/\Lambda = 21.15$  时出现最小值.

图 3 更好地展现了 BEC 基态呈现出的平面压缩性质, 图中给出了  $\Delta^2 J_{\parallel}$  出现最小值时 BEC 基态的系数分布与理论计算出的理想平面压缩态的系数分布对比结果. 当原子表现为有效吸引相互作用时, 系数分布概率  $P(n) = |c_n|^2$  重合非常好, 表明此时的 BEC 基态即理想的平面压缩态. 当原子表现为有效排斥相互作用时, 概率分布基本符合, 在波包接近底部处稍有差异, 较好地实现了平面压缩.

为了明确其中的机理, 我们以自旋算符重新表示哈密顿(1), 可得<sup>[20]</sup>

$$H/\hbar = \Omega J_X + \chi J_Z^2 = \chi \left\{ J^2 + \frac{\Lambda^2}{4} - \left[ \left( J_X - \frac{\Lambda}{2} \right)^2 + J_Y^2 \right] \right\}, \quad (3)$$

其中  $J^2 + \Lambda^2/4$  是常数项, 与所有算符对易, 可以忽略; 而剩余两项变量与自旋涨落的和  $\Delta^2 J_X + \Delta^2 J_Y$

相关. 我们选择有效吸引相互作用  $\chi < 0$ , 当调节参数使得  $\langle J_X \rangle = \Lambda/2$  时, BEC 的基态可以降低平面自旋涨落  $\Delta^2 J_{\parallel} = \Delta^2 J_X + \Delta^2 J_Y$  到最小<sup>[13]</sup>. 因此我们只需要调节参数使得  $|\Lambda| = 2|\langle J_X \rangle| = 2J - (J/4)^{1/3}$  就可以得到理想的平面压缩态. 这里我们需要的原子间有效吸引相互作用可以在  $^{39}\text{K}$  系统中实现<sup>[42]</sup>.

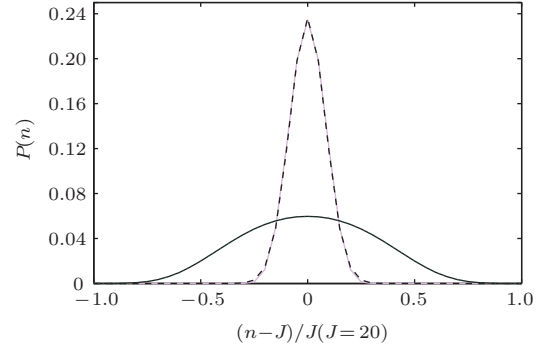


图 3  $\Delta^2 J_{\parallel}$  出现最小值时 BEC 系统基态系数分布与平面压缩态系数分布的对比,  $N = 40$ . 当原子间有效吸引相互作用  $N/\Lambda = -1.02$  时 (展宽波包), BEC 基态系数分布 (实线) 与 PQS 的系数分布 (虚线) 完全重合, 表示此时的 BEC 基态是理想的平面压缩态; 当原子间有效排斥相互作用  $N/\Lambda = 21.15$  (窄波包), BEC 基态系数分布 (实线) 与 PQS 的系数分布 (虚线) 基本符合, 波包接近底部稍有差异, 较好地实现了平面压缩.

Fig. 3. The comparison between the coefficient distribution of Bose-Einstein condensate ground state which gives the minimum of  $\Delta^2 J_{\parallel}$  and the ideal planar squeezed state. For the effective attractive case  $N/\Lambda = -1.02$  (wider wave packet), the coefficient distribution for the ground state (solid) coincides with the ideal planar squeezed state (dashed) exactly. For the effective repulsive case  $N/\Lambda = 21.15$  (narrower wave packet), the coefficient distribution for the ground state (solid) nearly coincides with the planar squeezed state (dashed).

## 3 平面自旋压缩与模式纠缠

自旋压缩与多粒子量子纠缠有着密切联系, 当自旋压缩参数  $\xi < 1$  时, BEC 系统存在多原子纠缠, 这是源于原子间相互作用的非线性效应. 然而, 由于 BEC 系统中的原子具有全同性, 自旋压缩只能作为多粒子纠缠的存在判据, 而无法分辨出具体是哪些原子纠缠在一起. 为了在量子信息处理中发挥更大作用, 有时需要制备并检测由两个或多个可分辨的体系或者模式构成的纠缠态, 如 BEC 的内部能级之间、多势阱之间、或者原子系综与光子等不同体系之间. 借助平面压缩, 我们只需要测量两

个正交自旋分量就可以检测两个可分辨模式间的纠缠.

两个不同模式  $a$  和  $b$  之间的纠缠一般可以由 Hillery-Zubairy 给出的非厄米算符的乘积来检测<sup>[43]</sup>, 即  $|\langle a^\dagger b \rangle|^2 > \langle a^\dagger a b^\dagger b \rangle$ , 这是两个模式纠缠的充分条件. 根据自旋算符的定义,  $\langle a^\dagger b \rangle = \langle J_X + iJ_Y \rangle$ , 这个判据可以改写成自旋形式<sup>[39]</sup>:

$$\begin{aligned} E_{\text{PQS}} &= \frac{\Delta^2 J_X + \Delta^2 J_Y}{\langle N \rangle / 2} \\ &= \frac{\Delta^2 J_{\parallel}}{\langle N \rangle / 2} < 1. \end{aligned} \quad (4)$$

由于自旋算符  $J_X$  与  $J_Y$  不对易, 它们的不确定度不能同时为零,  $\Delta^2 J_{\parallel}$  不可能为零, 最小值为  $C_J \sim 3(2J)^{2/3}/8$ <sup>[19]</sup>, 因此理想的 PQS 态可以给出最小的  $E_{\text{PQS}}$ . 系统原子数越多, 纠缠越明显, 甚至可以实现更强的量子关联, 即量子导引<sup>[39,44]</sup>:

$$E_{\text{PQS}} < 1/2. \quad (5)$$

同时, 与 Sorenson 和 Mølmer<sup>[45]</sup> 提出的利用自旋压缩判定系统中纠缠粒子数目的方法类似, 当原子数  $N \rightarrow \infty$  时, 平均自旋  $J \rightarrow \infty$ ,  $E_{\text{PQS}} \rightarrow 0$ , 从而得到最大纠缠, PQS 也可以判定系统中纠缠的粒子数目, 以此作为一种度量多体系统纠缠的手段<sup>[19]</sup>.

#### 4 平面压缩与原子干涉相位精密测量

自旋压缩不仅可以用来检验和度量多粒子纠缠, 还可以实现超越标准量子极限的原子干涉相位精密测量<sup>[1,13]</sup>. 由于冷原子与磁场和引力场的相互作用, 冷原子传感器在超灵敏磁力计与重力计中具有重要应用. 这里, 我们考察 PQS 在原子干涉相位测量中的效果. 让开始处于平面压缩态的两个纠缠的玻色子模式  $a, b$  通过移相器和四端口的 50 : 50 分束器, 假定  $\phi$  是需要测量的相移量,  $\theta$  是提供参考的相移量. 通过测量输出端口的粒子数差  $\mathcal{N} = N_+ - N_-$  和它对相位的敏感度  $\partial \langle \mathcal{N} \rangle / \partial \phi$ , 可以得到被测相位的不确定度  $\Delta \phi = \sqrt{\Delta^2 \mathcal{N}(\phi) / |\partial \langle \mathcal{N} \rangle / \partial \phi|}$ <sup>[19,20]</sup>. 根据初始的自旋不确定度可得单次测量的相位噪声值<sup>[19]</sup>

$$\Delta \phi = \frac{\sqrt{\Delta^2 J_X \cos^2(\phi - \theta) + \Delta^2 J_Y \sin^2(\phi - \theta)}}{|\langle J_Y \rangle \cos(\phi - \theta) - \langle J_X \rangle \sin(\phi - \theta)|}. \quad (6)$$

显然, 在做任何相位测量时, 都必须避免干涉仪在条纹峰值附近  $\partial \langle \mathcal{N} \rangle / \partial \phi \sim 0$  的不灵敏区域. 定义  $\varphi = \phi - \theta$ , 单次测量的量子噪声值  $\Delta^2 J_X \cos^2 \varphi + \Delta^2 J_Y \sin^2 \varphi \leq \Delta^2 J_{\parallel}$ , 这表明平面自旋涨落是干涉仪输出粒子数差的总量子噪声上限, 压缩该噪声上限至标准量子极限以下, 可以提高对完全未知相位的测量灵敏度. 因此, 平面自旋压缩态可以有效减小很大范围内的未知相位内的噪声值. 最佳情况是当  $\Delta^2 J_{\parallel}$  取最小值  $C_J \sim J^{2/3}$  时, 单次测量的最低相位不确定度  $\Delta \phi \propto J^{-2/3}$ .

当  $\varphi = \pi/2$ , (6) 式变为单分量压缩  $\Delta \phi = \Delta J_Y / |\langle J_X \rangle| = \xi / \sqrt{N}$ . 对于原子间相互作用为零的自旋相干态, 其相位灵敏度为  $\Delta \phi = \sqrt{J/2}/J = 1/\sqrt{N}$  (即标准量子极限, 又叫作散粒噪声极限). 如果自旋压缩参数  $\xi < 1$ , 那么  $\Delta \phi < 1/\sqrt{N}$ , 相位的不确定度突破标准量子极限. 海森堡不确定性原理给出了相位灵敏度的极限, 即  $\Delta \phi < 1/N$ , 称为海森堡极限.

利用平面压缩态的优势之一是可以更少原子即更低的原子数密度进行干涉测量, 而原子数密度通常受限于原子两体或三体碰撞损耗, 因此使用平面自旋压缩机理具有非常重要的实际操作价值. 例如, 利用包含  $10^6$  个原子的平面自旋压缩机理的干涉仪, 其单次相位测量可以实现的灵敏度量级约为  $10^{-4}$ , 而采用传统相干机理的干涉仪使相位灵敏度达到该量级则需要  $10^8$  个原子, 即原子数密度为采用平面自旋压缩机理时的 100 倍.

与单分量压缩提高相位测量灵敏度相比, 利用平面压缩态具有另外一个优势. 图 4 给出了参数  $N/\Lambda$  取不同值时表现有效排斥相互作用的 BEC 基态可以实现的干涉相位测量灵敏度  $\Delta \phi$ . 当  $N/\Lambda = 21.15$  (实线), BEC 基态为接近理想的平面压缩态, 可以在大范围内实现对未知相位的优于  $\Delta \phi \propto J^{-2/3}$  ( $\varphi = \pi/4, 3\pi/4$ ) 的超高测量灵敏度. 当增大非线性相互作用, 尽管测量灵敏度更高, 会在某个特定测量相位角度逐渐逼近海森堡极限  $1/N$  (点线), 但达到超越标准量子极限  $1/\sqrt{N}$  以下的测量相位的范围也逐渐变窄. 最优相位测量灵敏度在  $\phi - \theta = \pi/2$  附近, 由自旋压缩参数  $\xi$  决定, 而只使用两次垂直自旋分量的测量就可以获得一个未知相位的最大范围则由平面压缩给出.

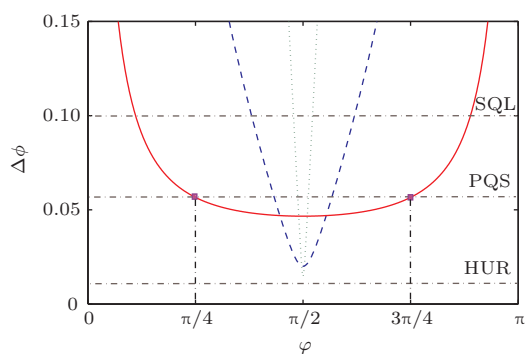


图4 相位的测量灵敏度  $\Delta\phi$ ,  $N = 100$  原子间表现为有效排斥作用时, 参数分别为  $N/\Lambda = 21.15$  (实线)、 $N/\Lambda = 10^3$  (虚线)、 $N/\Lambda = 10^4$  (点线); 图中 SQL 表示自旋相干态给出的相位灵敏度极限  $\Delta\phi = 1/\sqrt{N}$  (即标准量子极限), PQS 表示平面压缩态给出的相位灵敏度  $\Delta\phi \propto J^{-2/3}$ , HUR 表示由海森堡不确定原理给出的量子测量可能实现的最高精度  $\Delta\phi = 1/N$

Fig. 4. The measured phase uncertainty  $\Delta\phi$  for  $N = 100$ . Phase sensitivity is better than shot noise level if  $\Delta\phi < 1/\sqrt{N}$ . Optimum sensitivity is at  $\varphi = \pm\pi/2$  and is determined by the spin-squeezing parameter  $\Delta\phi = \xi/\sqrt{N}$ . The solid curve corresponds to the critical value of  $N/\Lambda = 21.15$  for the effective repulsive regime, which gives the critical value of  $E_{\text{PQS}} = C_J/J$  at  $\varphi = \pi/2 \pm \pi/4$  and hence gives the phase sensitivity  $\Delta\phi \propto J^{-2/3}$ . Increasing  $N/\Lambda$  to  $10^3$  (dashed) and  $10^4$  (dotted) improves the optimum phase uncertainty, however the useful region of phase angles becomes narrower. For detecting an unknown phase using only two orthogonal measurements, the sensitivity over the quiet quadrant  $\varphi = \pi/2 \pm \pi/4$  becomes relevant.

## 5 结 论

本文研究了双模近似下双分量 BEC 系统基态的平面自旋压缩、内态模式纠缠, 以及原子干涉机理. 平面自旋压缩机理的重要特点可以总结如下: 压缩平面上的两个自旋分量的涨落的和受到一个只与自旋  $J$  有关的常数  $C_J$  的限制, 而与具体的量子态无关; 平均自旋矢量方向总包含在压缩平面内, 且该方向涨落压缩最大; 压缩平面上与平均自旋方向垂直的自旋分量涨落同时受到压制; 当逐渐接近海森堡极限时, 平面压缩逐渐转变为垂直平均自旋方向的单自旋分量压缩; 利用平面自旋压缩可以降低所有相位的干涉测量噪声, 并且可以用来作为宏观自旋纠缠存在的判定依据.

## 参考文献

[1] Wineland D J, Bollinger J J, Itano W M, Heinzen D J 1994 *Phys. Rev. A* **50** 67

[2] Wineland D J, Bollinger J J, Itano W M, Moore F L, Heinzen D J 1992 *Phys. Rev. A* **46** 6797  
 [3] Kuzmich A, Mølmer K, Polzik E S 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4782  
 [4] Agarwal G S, Puri R R 1990 *Phys. Rev. A* **41** 3782  
 [5] Zou H M, Fang M F, Yang B Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 120303  
 [6] Hofmann H F, Takeuchi S 2003 *Phys. Rev. A* **68** 032103  
 [7] Tóth G, Knapp C, Gühne O, Briegel H J 2009 *Phys. Rev. A* **79** 042334  
 [8] Liu S Y, Zheng K M, Jia F, Hu L Y, Xie F S 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 140302 (in Chinese) [刘世右, 郑凯敏, 贾芳, 胡利云, 谢芳森 2014 物理学报 **63** 140302]  
 [9] Zhou B J, Peng Z H, Jia C X, Jiang C L, Liu X J 2014 *Chin. Phys. B* **23** 120305  
 [10] Cavalcanti E G, Drummond P D, Bachor H A, Reid M D 2009 *Opt. Express* **17** 18693  
 [11] Reid M D, Drummond P D, Bowen W P, Cavalcanti E G, Lam P K, Bachor H A, Andersen U L, Leuchs G 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 1727  
 [12] Cavalcanti E G, Jones S J, Wiseman H M, Reid M D 2009 *Phys. Rev. A* **80** 032112  
 [13] Kitagawa M, Ueda M 1993 *Phys. Rev. A* **47** 5138  
 [14] Estève J, Gross C, Weller A, Giovanazzi S, Oberthaler M K 2008 *Nature* **455** 1216  
 [15] Riedel M F, Böhi P, Li Y, Hänsch T W, Sinatra A, Treutlein P 2010 *Nature* **464** 1170  
 [16] Gross C, Zibold T, Nicklas E, Estève J, Oberthaler M K 2010 *Nature* **464** 1165  
 [17] Ma J, Wang X G, Sun C P, Nori F 2011 *Phys. Rep.* **509** 89  
 [18] Chang F, Wang X Q, Gai Y J, Yan D, Song L J 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 170302 (in Chinese) [常峰, 王晓茜, 盖永杰, 严冬, 宋立军 2014 物理学报 **63** 170302]  
 [19] He Q Y, Peng S G, Drummond P D, Reid M D 2011 *Phys. Rev. A* **84** 022107  
 [20] He Q Y, Vaughan T G, Drummond P D, Reid M D 2012 *New J. Phys.* **14** 093012  
 [21] Smerzi A, Fantoni S 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3589  
 [22] Liu J, Wang W G, Zhang C W, Niu Q, Li B W 2005 *Phys. Rev. A* **72** 063623  
 [23] Yan D, Song L J, Chen D W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3679 (in Chinese) [严冬, 宋立军, 陈殿伟 2009 物理学报 **58** 3679]  
 [24] Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. A* **61** 23402  
 [25] Liu J, Wu B, Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404  
 [26] Wu B, Liu J, Niu Q 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 140402  
 [27] Raghavan S, Smerzi A, Fantoni S, Shenoy S R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 620  
 [28] Wang G F, Fu L B, Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **73** 13619  
 [29] Liu B, Fu L B, Yang S P, Liu J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 33601  
 [30] Kasamatsu K, Tsubota M, Ueda M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 150406  
 [31] Kasamatsu K, Tsubota M 2009 *Phys. Rev. A* **79** 023606  
 [32] Mason P, Aftalion A 2011 *Phys. Rev. A* **84** 033611

- [33] Wang C, Gao C, Jian C M, Zhai H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 160403
- [34] Xu Z F, Lu R, You L 2011 *Phys. Rev. A* **83** 053602
- [35] Hu H, Ramachandran B, Pu H, Liu X J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 010402
- [36] Xu Z F, Kawaguchi Y, You L, Ueda M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 033628
- [37] Wang C, Gao C, Jian C M, Zhai H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 160403
- [38] Puentes G, Colangelo G, Sewell R J, Mitchell M W 2013 *New J. Phys.* **15** 103031
- [39] He Q Y, Drummond P D, Olsen M K, Reid M D 2012 *Phys. Rev. A* **86** 023626
- [40] He Q Y, Reid M D, Vaughan T G, Gross C, Oberthaler M, Drummond P D 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 120405
- [41] Law C K, Ng H, Leung P 2001 *Phys. Rev. A* **63** 055601
- [42] Fattori M, D’Errico C, Roati G, Zaccanti M, Jona L M, Modugno M, Inguscio M, Modugno G 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 080405
- [43] Hillery M, Zubairy M S 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 050503
- [44] Cavalcanti E G, He Q Y, Reid M D, Wiseman H M 2011 *Phys. Rev. A* **84** 032115
- [45] Sørensen A S, Mølmer K 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4431

SPECIAL ISSUE — Quantum metrology and control

# Planar quantum squeezing and atom interferometry\*

Huang Xin-Yao<sup>1)</sup> Xiang Yu<sup>1)</sup> Sun Feng-Xiao<sup>1)</sup> He Qiong-Yi<sup>1)2)†</sup> Gong Qi-Huang<sup>1)2)</sup>

1) (State Key Laboratory of Mesoscopic Physics, School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

2) (Collaborative Innovation Center of Quantum Matter, Beijing 100871, China)

( Received 30 March 2015; revised manuscript received 18 May 2015 )

## Abstract

Reduction of quantum noise in one spin component is a significant tool for enhancing the sensitivities of interferometers and atomic clocks. It has been recently implemented for ultra-cold atomic Bose-Einstein condensate (BEC) interferometer. This type of quantum noise reduction reduces the measurement noise near some predetermined phase. However, if the phase is completely unknown prior to measurement, then it is not known which phase quadrature should be in a squeezed state. We introduce a novel planar squeezing uncertainty relation for spin variance in a plane, and analyze how to obtain such a planar quantum squeezed (PQS) state by using a double-well single component BEC, through the use of local nonlinear S-wave scattering interaction between trapped atoms. Here, we consider the PQS that is generated by using two hyperfine states in a two components BEC system, which is useful for quantum metrology. By comparison with the case of two spatial wells, the Hamiltonian parameters can be controlled in a more efficient way. The spin component can be measured by detecting the occupation number difference between the two internal modes, while one needs to observe a spatial interference pattern in the double well BEC case. This is the major difference between the internal and external cases. Another difference is that one can use the Rabi frequency  $\Omega$  instead of the Josephson parameters to switch the Hamiltonian parameters through using a diabatic technique. Therefore the coupling could be switched off or on to study the different evolutions. PQS simultaneously reduces the quantum noises of two orthogonal spin projections below the standard quantum limit, while increases the noise in the third dimension. This allows the improvement in phase measurement at any phase-angle. PQS states that reductions of fluctuations everywhere in a plane have potential utility in “one-shot” phase measurement, where iterative or repeated measurement strategies cannot be utilized. The improved interferometric phase measurements and planar uncertainty relations are useful for detecting the entanglement in mesoscopic system between two distinguished modes regardless of the third component.

**Keywords:** Bose-Einstein condensate, spin squeezing, entanglement, atom interferometry

**PACS:** 03.75.Gg, 37.25.+k, 42.50.Dv

**DOI:** 10.7498/aps.64.160304

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11274025, 61475006, 11121091).

† Corresponding author. E-mail: [qiongyihe@pku.edu.cn](mailto:qiongyihe@pku.edu.cn)