

耦合振子系统的多稳态同步分析

黄霞 徐灿 孙玉庭 高健 郑志刚

Multiple synchronous states in a ring of coupled phase oscillators

Huang Xia Xu Can Sun Yu-Ting Zheng Zhi-Gang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 170504 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.170504

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.170504>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I17>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

电感电流伪连续导电模式下 Buck 变换器的动力学建模与分析

Dynamical modeling and analysis of buck converter operating in pseudo-continuous conduction mode

物理学报.2015, 64(18): 180501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.180501>

基于有源广义忆阻的无感混沌电路研究

Inductorless chaotic circuit based on active generalized memristors

物理学报.2015, 64(17): 170503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.170503>

基于对偶数理论的资料同化新方法

A new data assimilation method based on dual-number theory

物理学报.2015, 64(13): 130502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130502>

两级式光伏并网逆变器建模与非线性动力学行为研究

Numerical modeling and research on nonlinear dynamic behaviors of two-stage photovoltaic grid-connected inverter

物理学报.2015, 64(13): 130503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130503>

一类可变禁区的不连续系统的加周期分岔

Period-adding bifurcations in a discontinuous system with a variable gap

物理学报.2015, 64(12): 120502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.120502>

耦合振子系统的多稳态同步分析*

黄霞¹⁾²⁾ 徐灿¹⁾ 孙玉庭¹⁾ 高健¹⁾ 郑志刚^{1)†}

1)(北京师范大学物理学系, 北京 100875)

2)(华北电力大学数理系, 北京 102206)

(2015年1月28日收到; 2015年4月30日收到修改稿)

本文讨论了一维闭合环上 Kuramoto 相振子在非对称耦合作用下同步区域出现的多定态现象. 研究发现振子数 $N \leq 3$ 情形下系统不会出现多态现象, 而 $N \geq 4$ 多振子系统则呈现规律的多同步定态. 我们进一步对耦合振子系统中出现的多定态规律及定态稳定性进行了理论分析, 得到了定态渐近稳定解. 数值模拟多体系统发现同步区特征和理论描述相一致. 研究结果显示在绝热条件下随着耦合强度的减小, 系统从不同分支的同步态出发最终会回到同一非同步态. 这说明, 耦合振子系统在非同步区由于运动的遍历性而只具有单一的非同步态, 在发生同步时由于遍历性破缺会产生多个同步定态的共存现象.

关键词: Kuramoto 模型, 同步, 相振子, 多定态

PACS: 05.45.Xt, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.64.170504

1 引言

同步现象及其相关问题的研究涵盖了化学、物理、生物等自然科学和工程学等许多领域^[1-3], 甚至社会科学中的一些行为都与同步的基本性质有密切关系. 许多具体问题如约瑟夫森结^[4], 纳米力学^[5]、萤火虫的同步闪动^[6]、心脏起搏器^[7], 帕金森氏综合症^[8]、反冲原子激光器等^[9] 都发现存在同步现象. 近年来, 复杂网络的同步动力学行为也成为热门的研究专题之一^[10-14]. 为了对大量相互作用的单元之间的同步行为加以理解, 人们在理论上进行了很多探讨, Winfree 和 Kuramoto 等先后从物理上将大量相互作用的单元简化为以相位为慢变量的极限环振子, 并从数学上构建了一个简单的理论框架, 从而很好地解释了大量存在于这些表面上看起来完全不同系统中的同步行为, 其中 Kuramoto 提出的全局耦合振子平均场模型^[15-17] 被认为是最普适常用的模型之一,

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i),$$

$$i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

此处 θ_i 代表第 i 个振子的相位, ω_i 为其自然频率, 通常满足一定的分布 (如高斯, Lorentz 分布等), N 为总的振子数目, K 为耦合强度. 为了刻画系统中振子之间相位的相干程度, 可以引入宏观量

$$Z = R e^{i\Phi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}, \quad (2)$$

此处 Z 是一个复序参量, 表征系统的有序程度, 振幅为 R , Φ 为平均相位. 从方程 (2) 可知, 当系统达到完全同步时 ($\theta_i(t) = \theta_j(t)$, $\forall i, j \in 1, \dots, N$) $R = 1$, 而当振子没有达到同步时, 振子之间的相位没有固定关系 (不相干), 在热力学极限 ($N \rightarrow \infty$) 下 $R = 0$. Kuramoto 利用平均场理论得到 R 的自治方程, 并通过理论推导发现当耦合强度 K 从零增加到一个阈值 K_0 时, 序参量 R 会经历从零到非零的转变, 系统经历从非相干态到相干态的二级非平

* 国家自然科学基金 (批准号: 11475022)、中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2014MS60) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zgzhen@bnu.edu.cn

衡相变. 可以引入如下平均频率 Ω_i 来刻画同步的微观机理,

$$\Omega_i = \langle \dot{\theta}_i \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \dot{\theta}_i dt, \quad (3)$$

其中 T 表示演化时间, $\langle \cdot \rangle$ 代表时间平均. 当两个振子达到同步时, 其平均频率相等, 两个振子锁相 (即它们的相差不会随着时间变化). 随着耦合强度的增加, 同步振子的相差将逐渐趋近于零, 最终所有振子达到完全同步. 通过同步分岔树 [18] 可以很好地理解系统的同步过程, 即随着耦合强度的增加, 自然频率相近的振子会先行同步形成小集团, 进而集团之间相互耦合达到同步, 最终所有振子的平均频率均相等.

平均场的 Kuramoto 模型在近几年的研究中被不断推广到各种情形如局域耦合、振幅效应、非简谐耦合甚至混沌振子等, 其中最典型的一种推广模型是局域耦合振子模型, 即振子只与相邻的 2 个或多个振子之间存在相互作用. 对于最近邻耦合情形 [19-31],

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i = & \omega_i + K \sin(\theta_{i+1} - \theta_i) \\ & + K \sin(\theta_{i-1} - \theta_i). \end{aligned} \quad (4)$$

最近邻耦合振子系统的同步由于空间局域近邻耦合和振子频率差之间的竞争而具有丰富的动力学行为 [32]. 文献 [33] 通过数值模拟发现, 自然频率的分布会对同步产生重要影响. 当系统振子自然频率满足粗糙度最大时, 系统达到完全同步的临界耦合强度越小, 而且随着振子数的增加, 临界耦合强度趋于有限值. 文献 [34] 进一步理论分析了以上构型出现小临界耦合强度的原因, 证实了局域耦合的长程相关性和该构型的鲁棒性. Tilles 及其合作者 [35] 研究了最近邻耦合振子环同步区域出现多个吸引域的情形, 即在可解区存在多重解, 且这些解的特点取决于它们出现在可解区边界的位置. 文献 [36] 研究了最近邻耦合振子在受到时间延迟耦合作用时也会出现同步和去同步的多稳态现象. 在文献 [37] 中, 作者通过数值模拟和理论分析得出最近邻耦合的有限振子数系统在同步区存在多定态稳定解, 且这些解可以用不同回转数来表征.

我们注意到全局耦合方程 (1) 和最近邻耦合方程 (4) 都是对称耦合, 即 i 对 j 的作用等于 j 对 i 的作用. 以往所研究的同步现象都基于相互耦合方式, 本文将要讨论的情形是非对称特别是单向耦合

振子的同步行为. 单向最近邻环上非线性振子的动力学模型可表为

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + 2K \sin(\theta_{i+1} - \theta_i), i = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

为了便于讨论, 不失一般性, 所有振子自然频率 ω_i 的平均值可以置为零. 如果自然平均频率平均值不为零, 只需对宏观参量平均频率 Ω 作 $\bar{\omega}$ 的平移 [25], 系统整体行为特征保持不变. 讨论环上振子, 因而采用周期性边界条件 ($\theta_{N+1} = \theta_1$), 这样耦合振子系统就形成一个单向耦合环.

在本文中, 我们将集中分析闭合环上单向耦合振子的动力学行为. 通过研究少数耦合极限环系统 ($N = 2, N = 3$) 的行为发现, 当耦合强度大于一定阈值时, 所有振子都被同步到平均频率上, 序参量随耦合强度增加趋于 1, 而振子数较多 ($N \geq 4$) 的系统在整个同步区域的序参量呈现出多分支态, 尽管所有振子的频率已经相等. 理论分析表明, 少振子耦合系统在同步区只有稳定的对应于序参量为 1 的频率和相位同步态, 不存在多分支定态, 而多振子系统随着振子数的增加, 分支数目会呈现规律的增加, 对应于这些不同分支上任意相邻振子的相位差取特定的分立值. 通过分析系统各种不同分支态的动力学稳定性, 我们发现雅可比矩阵的特征值实部小于零, 说明这些分支解是渐近稳定的. 如果系统初始处于不同的稳态分支, 在绝热减小耦合强度的情况下, 系统都会回到非同步区的同一个分岔树上, 即在非同步区耦合振子系统呈现单一非同步的动力学吸引域. 我们的研究表明耦合振子系统在发生同步时会产生多种不同的锁相态, 它们在同一耦合强度下共存, 反映了系统在同步区的多稳性.

2 同步多稳态分支现象

我们首先研究方程 (5) 所描述的相振子在同步区和非同步区的宏观参量平均频率 Ω_i , 以便对系统的全局动力学行为有个普遍认识. 不失一般性, 可取自然频率平均值 $\bar{\omega} = 0$. 图 1 给出了系统大小分别为 $N = 3, N = 10, N = 20, N = 50$ 的平均频率 Ω_i 随振子耦合强度 K 变化的同步分岔树. 每个振子的自然频率 ω_i 在 $[-1, 1]$ 范围内随机选取, 初始时刻的相位选择 $[0, 2\pi]$ 范围内任意值. 从图 1 (a) 中可以看到, 对于 $N = 3$ 系统, 随着耦合强度的

增加, 3个振子的平均频率逐渐汇聚到相同的频率 $\omega = 0$ 上, 从而产生同步. 图 1(b)–(d) 分别给出了 $N = 10, 20$ 和 50 的同步分岔树, 系统在不同的耦合强度下, 初始相位都是 $[0, 2\pi]$ 范围内随机选择. 可以发现, 在非同步区, 虽然初始条件不同, 但对于所有不同 N 的情形, 同步分岔树都是单一的, 这说明在非同步区系统的动力学具有遍历性, 即具有单一的吸引子. 不同的结果则发生在振子完全同步时, 可以看到对于 $N > 3$ 的系统, 除了平均频率 $\omega = 0$ 的同步定态外, 还存在其他的同步定态. 注意这里图 1(b)–(d) 在同步分岔树 K 比较大时的频率多支行为不同于 K 比较小时, K 较小时的不同分支是不同振子的频率, 而 K 较大时则是所有振子频

率落在同一分支上, 不同分支代表从不同初始条件演化到不同的同步分支. 分支的数目与系统振子个数有关, 我们发现随着系统大小的变化, 分支数目成对增加. 由于自然频率和初始相位的任意性, 在给定耦合强度的情况下, 系统演化的终态可能会落在不同分支的任一定态上, 在整个全局耦合同步区, 定态所在的分支与耦合强度呈线性关系. 因此, 耦合振子系统在达到同步时出现了多个同步定态共存的现象. 这一现象与振子自然频率的分布情况无关, 我们考虑振子的自然频率为其他分布 (如高斯分布) 情况时, 发现系统同样会出现多定态分支现象.

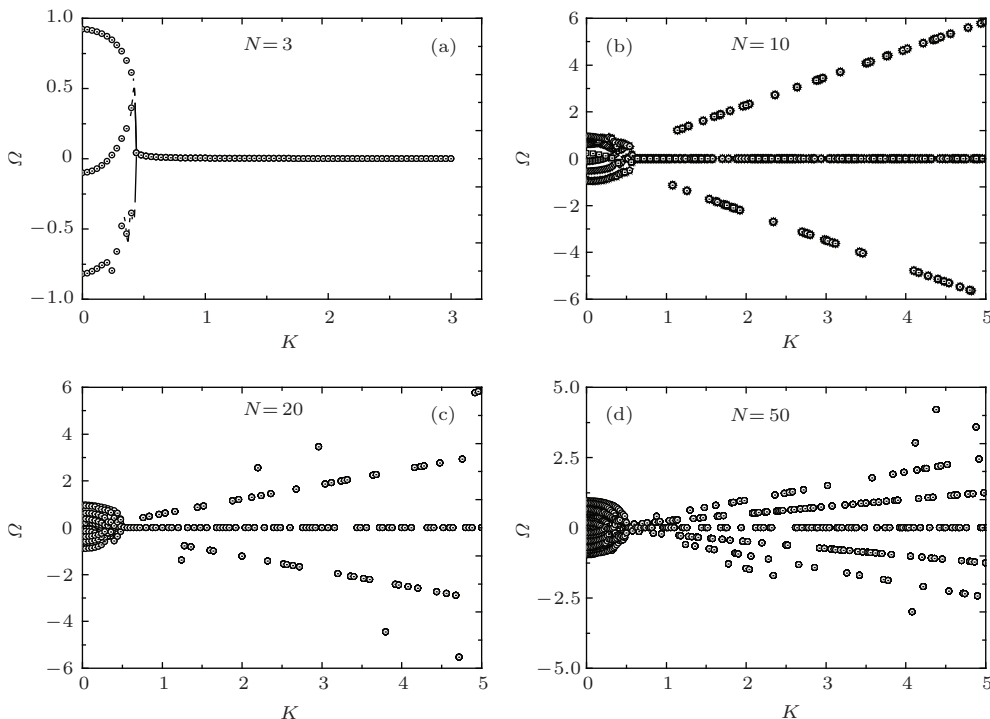


图 1 不同振子数系统平均频率 Ω 随耦合强度 K 变化的同步分岔图 (a) $N = 3$; (b) $N = 10$; (c) $N = 20$; (d) $N = 50$

Fig. 1. Bifurcation trees of average frequency for different system sizes $N = 3, 10, 20, 50$, respectively.

这一有趣现象在考察系统的序参量过程中也有所体现. 图 2 给出了与图 1 相同系统的序参量 R , 可以看到对于系统 $N = 3$, 序参量从非零值逐渐增加到 1, 说明系统从非同步态经历二级相变逐渐达到完全同步态, 即相位锁定在同一值上. 对于同一耦合强度, 计算系统从不同初始条件出发, 终态结果只有一个对应的序参量 R 值. 而对于 $N > 3$ 系统, 在同步区域通过随机初始条件扫描发现, 序参

量除了有 $R \rightarrow 1$ 这个分支外, 还存在其他的分支, 这些分支随着耦合强度的增加非但不增加趋近于 1, 反而逐渐减小趋近于 0, 呈现为多条趋近于零的 R 分支. 此处 $R \rightarrow 0$ 的诸多分支并不是说明系统同步被破坏, 而是系统中的振子处于多个不同的同步态, 同时振子的相位不是被锁定在同一值上, 而是相互之间出现不同的相位差均匀分散在单位圆上, 第 3 部分我们将做详细分析.

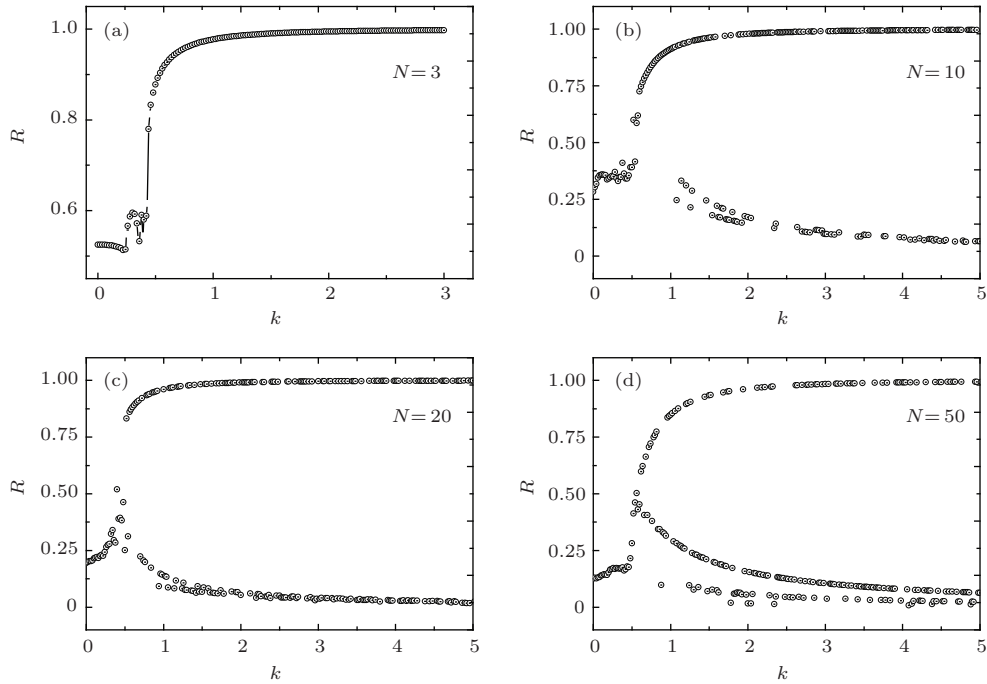


图2 不同振子数系统序参量 R 随耦合强度 K 变化关系图 (a)—(d) 分别对应大小为 $N = 3, 10, 20$ 和 50
 Fig. 2. The plots of R versus K for different systems sizes $N = 3, 10, 20, 50$, respectively.

为了更清楚说明在给定耦合强度下系统处于哪一支定态分支, 我们选取 $N = 10$ 的体系, 并将图 1(b) 和图 2(b) 的相同区域进行放大, 如图 3 所示. 在图 3 中, 可以清楚发现当系统处于平均频率为零的定态分支时, 序参量趋于 1. 而系统平均频率不为零的其他任一定态分支, 序参量则随着耦合强度的增加接近于零, 可见此定态下振子的相位并没有被锁定到相同值上. 图 3(a) 可看出对于平均频率不为零的定态分支, 随着耦合强度的增加, 其平均频率与耦合强度之间呈线性增加关系.

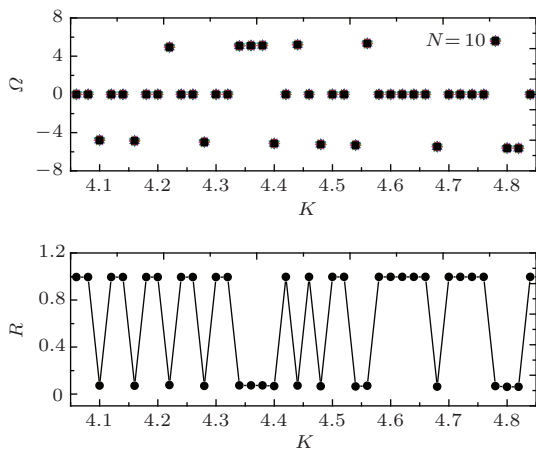


图3 图 1(b) 和图 2(b) 的局部放大图
 Fig. 3. Partial enlarged plots of figure 1(b) and figure 2(b).

3 理论分析和数值计算

上面所看到的多态行为表明, 系统在达到同步时可以存在多个不同的同步态, 因此有必要从理论上对这些态的特点、存在性以及稳定性进行较为细致的讨论. 振子数 N 很大时, 系统较为复杂, 我们首先从少数耦合振子情形出发来进行分析. 对于 $N = 2$ 的单向非对称耦合系统, 引入相位差 $\phi = \theta_1 - \theta_2$, 则可以得到其演化方程为

$$\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \Delta\omega - K \sin \phi, \quad (6)$$

其中 $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ (不失一般性, 令 $\Delta\omega \geq 0$). 当 K 很小时, 方程 (6) 无定态解, 随着 K 的增加, 系统在 $K = \Delta\omega$ 处发生鞍结分岔, 出现一对不动点满足 $\dot{\phi} = 0$, 锁相角 $\sin \phi = \frac{\Delta\omega}{K}$. 根据线性稳定性分析可知, 其中解 $\phi = \sin^{-1} \frac{\Delta\omega}{K}$ 是稳定的, 而另一个解 $\phi = \pi - \sin^{-1} \frac{\Delta\omega}{K}$ 则为不稳定解. 对于一个给定的耦合强度 K , 振子 1 的平均频率为

$$\begin{aligned} \langle \dot{\theta}_1 \rangle &= \omega_1 - K \langle \sin \phi \rangle \\ &= \omega_2 + \sqrt{(\Delta\omega)^2 - K^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

显然, 随着 K 的增加, $\langle \dot{\theta}_1 \rangle$ 逐步趋向于 ω_2 . 达到锁相时 $\langle \dot{\theta}_1 \rangle = \omega_2$, 即两振子发生共振. 由此可见, $N = 2$ 振子系统达到同步时只有一个稳定态.

对于 $N = 3$ 的单向耦合情形, 引入相差 $\phi_1 = \theta_2 - \theta_1$ 和 $\phi_2 = \theta_3 - \theta_2$, 得到如下相差方程:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \Delta\omega_{21} + K(\sin\phi_2 - \sin\phi_1), \\ \dot{\phi}_2 &= \Delta\omega_{32} - K(\sin(\phi_1 + \phi_2) + \sin\phi_2). \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\Delta\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1, \Delta\omega_{32} = \omega_3 - \omega_2$, 图 4 给出了 ϕ_1 和 ϕ_2 的相图, 三个振子的自然频差为零, 耦合强度取为 2, 从而保证系统满足同步条件. 分析发现当耦合强度足够大时系统存在 3 个不动点, 分别为 $(0, 0), (0, \pi)$ 和 $(0, -\pi)$, 即为图 4 中的三个交点. 下面我们分析这些点的稳定性. 对于二维系统, 雅可比矩阵定义为

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\phi}_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \dot{\phi}_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial \dot{\phi}_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \dot{\phi}_2}{\partial \phi_2} \end{pmatrix},$$

则方程 (8) 对应的雅可比矩阵为

$$J = K \begin{pmatrix} -\cos\phi_1 & \cos\phi_2 \\ -\cos(\phi_1 + \phi_2) & -\cos(\phi_1 + \phi_2) - \cos\phi_2 \end{pmatrix}.$$

对于 $(0, 0)$ 解, 其相应的本征值为 $\lambda_{1,2} = K(-3 \pm \sqrt{3}i)/2$, 其实部均小于 0, 是稳定结点, 即为图 4 中虚线和实线交叉的稳定点. 图中星号表示初始态, 经过长时间演化后最终会收敛到稳定点 $(0, 0)$ 上. 对于解 $(0, \pm\pi)$, 其本征值为 $\lambda_{1,2} = K(1 \pm \sqrt{5}i)/2$, 实部大于零, 因此 $(0, \pm\pi)$ 均为不稳定鞍点, 即为图 4 中的不稳定 A 点和不稳定 B 点. 由此可知 $N = 3$ 系统同样不会出现多定态分支.

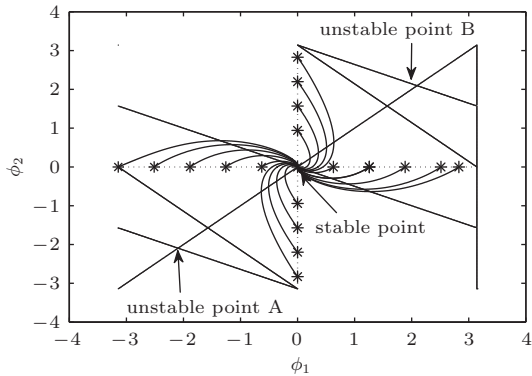


图 4 ϕ_1 和 ϕ_2 的相图, 图中星号表示系统的初始状态, 系统从不同的初始条件出发最终均收敛于同一稳定点 $(0, 0)$. 而另外两个交点 A 和 B 则为不稳定点

Fig. 4. Phase diagram of ϕ_1 vs ϕ_2 . The stars are the initial states of the system. From this figure, we can see that the system will convergence to the point $(0, 0)$ from arbitrary initial state. A and B are unstable fixed points.

对于多体系统同步区出现的多分支定态现象, 理论分析较简单系统要复杂得多. 考虑到我们仅限于分析同步区振子长时间演化下的动力学行为, 不妨将振子视为频率相等的全同振子, 取值为 0. 方程 (5) 可进一步简化为

$$\dot{\theta}_i = 2K\sin(\theta_{i+1} - \theta_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

我们将通过方程 (9) 分析系统可能出现的定态以及定态满足的条件. 引入相邻振子的相差 $\phi_i = \theta_{i+1} - \theta_i$, 方程 (9) 描述 N 维相振子系统, 依次相减可简化为 $N - 1$ 维系统

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i &= 2K(\sin\phi_{i+1} - \sin\phi_i), \\ i &= 1, 2, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

显然, 当系统处于同步态, 振子的相位锁定, 即 $\dot{\phi}_1 = \dots = \dot{\phi}_i = \dots = \dot{\phi}_{N-1} = 0$, 则定态下相邻振子相差的正弦值相等, 即 $\sin(\phi_1) = \dots = \sin(\phi_N)$.

方程 (10) 中所有项相加可得: $\sin\left(-\sum_{i=1}^{N-1} \phi_i\right) - \sin\phi_1 = 0$, 由此可见系统处于定态时, 相邻振子的相位差有以下两种可能性

$$\begin{aligned} \phi_{i1} &= \frac{2\pi k_1}{N} + 2m_1\pi; \\ \phi_{i2} &= \frac{(2k_2 + 1)\pi}{N - 2} + 2m_2\pi, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\forall k_1, k_2 \in 0, 1, \dots, N - 1, \forall m_1, m_2 \in Z$. 多维 (相空间维数 $N > 2$) 系统定态解的稳定性可以采用线性化方法进行分析, 给出方程在定态解下的雅可比矩阵, 再根据特征值方程分析特征值的实部, 如果实部小于零, 说明定态解是稳定的, 反之如果实部大于零则是不稳定解. 方程 (9) 定态解的雅可比矩阵可写为

$$J = 2K \begin{pmatrix} -c_1 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_i & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{N-2} & c_{N-1} \\ c_N & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{N-1} \end{pmatrix},$$

其中 $c_i = \cos\phi_i$, 根据方程 (11) 可以推断, 定态解 ϕ_{i1} 和 ϕ_{i2} 可能会是所有象限区间内的任意值, 但是相差 ϕ_i 的余弦值符号只有两种可能, 即 $\cos\phi_i > 0$ 或者 $\cos\phi_i < 0$. 我们只讨论定态下所有相邻振子相差的余弦值 $\cos\phi_i$ 相等的情形, 那么矩阵的特

征解为

$$\lambda_n = 2K \cos(\phi_i) \left[-1 + \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \right],$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-2, \quad (12)$$

可见, 定态解 $\cos \phi_i > 0$ 时, 对应特征值实部均不大于零, 说明该解是渐近稳定的, 定点 ϕ_i 为稳定焦点. 而如果 $\cos \phi_i < 0$, 代入特征值方程 (12) 可见实部不小于零, 对应不稳定解. 基于以上分析可以得出系统同步条件下, 相邻振子的相差有效范围落在第一象限和第四象限内, 即满足

$$\phi_i = \frac{2k\pi}{N} + 2m\pi$$

$$\left(\forall k, m \in Z, |k| \leq \frac{N}{4} \right). \quad (13)$$

此处 k 的取值个数代表系统的稳态解的个数. 由此可知, 只有 $N \geq 4$ 的系统才会出现多个定态, 与前面理论分析结果相一致. 而振子系统在同步区域可

能出现的定态数 L 为

$$L = 2|k| + 1. \quad (14)$$

以上理论分析确定了任意大小系统可能存在的定态数, 但是由于初始条件存在任意性, 从单一初始条件出发并不能遍历系统相空间所有的吸引域, 因而对于较大系统, 平均频率分岔树在同步区域并不会出现所有理论预测的同步分支. 图 5 和图 6 给出 $N = 4, N = 10$ 相振子系统的平均频率分岔树、不同定态分支相应的斜率、定态的相差满足条件以及相应序参量. 按照前面的理论分析, $N = 4$ 体系同步区应该会出现 $k = 0, k = \pm 1$ 三种同步分支, 对应的有效相差 ϕ 分别为 $0, \pm \frac{\pi}{2}$, 而序参量则分别是 $R = 1$ 和 0 . 根据方程 (9) 可知平均频率与耦合强度 K 呈线性关系, 斜率 $p = \frac{2}{N} \sum_i \sin \phi_i$. 不同的耦合强度下, 同一分支上的定态斜率值应该保持一致, 将定态下对应的有效相差代入斜率表达式, 可知三个定态对应的斜率分别是 $0, \pm 2$. 图 5 (a), (b), (c), (d) 中的数值模拟与以上理论分析

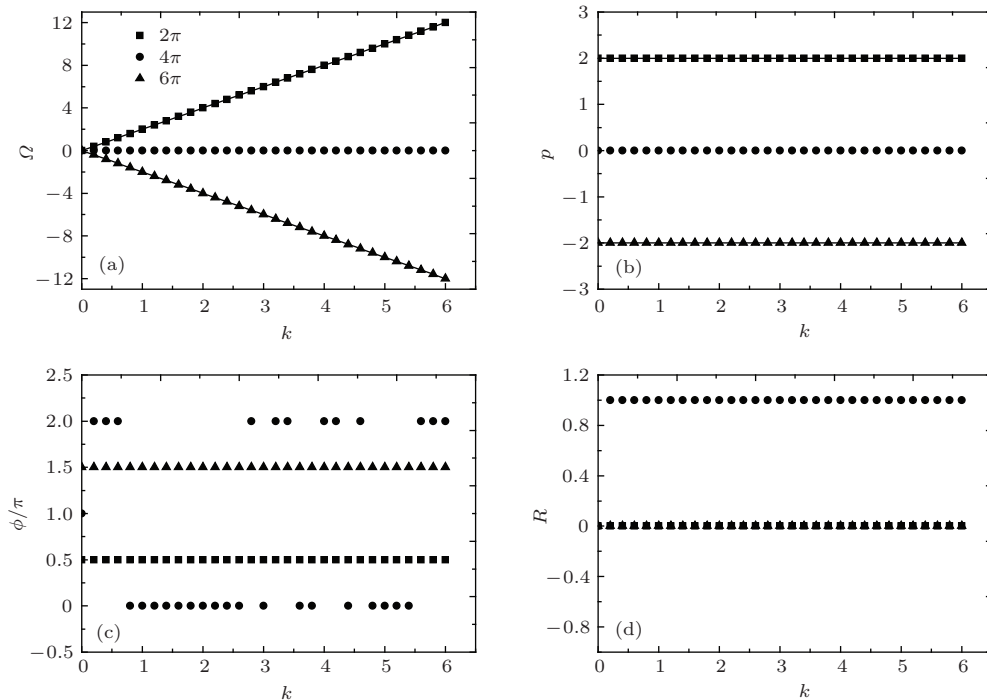


图 5 $N = 4$ 系统同步态特性 (a) 平均频率分岔树, 非零分支线和理论直线完全重合; (b) 三个不同定态分支相应的斜率大小, 图中三角形、方形和圆形给出的是数值模拟的斜率大小, 直线为理论结果; (c) 各定态下相邻振子的相位差 ϕ , 有效值分别是 $0, \pm\pi/2$; (d) 不同定态对应的序参量, 零分支对应 $R = 1$, 非零分支对应 $R = 0$

Fig. 5. The synchronization features of $N = 4$: (a) The bifurcation tree of average frequency. Nonzero branch line coincide with the theoretical result; (b) The slopes of three different steady states. The slopes marked with triangle, square and circular are obtained by the numerical simulation, and the line shows the theoretical results; (c) The phase difference of neighbor oscillators are $0, \pm\pi/2$, respectively; (d) The order parameter $R = 1$ is corresponding to zero branch and $R = 0$ for other states.

结果相一致. 图5(b)是数值计算系统稳态下斜率大小. 图5(a), (b)中的直线为理论线, 而将图5(a), (b)中非零分支进行线性拟合, 与理论结果完全吻合. 图5中实心圆对应初始相位是均分 4π , 而经过长时间演化, 末态相邻振子对应的相差为零或是 π 的偶数倍, 即在单位圆上振子锁定在同一位置, 则序参量等于1, 平均频率分支对应的斜率也等于零. 方块和三角对应的初始相位分别均分 2π 和 6π , 定态下的相差则分别

是 0.5π 和 1.5π , 平均分散在单位圆上, 则序参量为零. 而对于 $N = 10$ 的体系, 利用相同的理论方法分析, 存在5种不同的定态分支, 分别对应 $k = 0, k = \pm 1, k = \pm 2$, 相应的相差为 $0, \pm \frac{\pi}{5}, \pm \frac{2\pi}{5}$, 代入斜率公式 $p = \frac{2}{N} \sum_i \sin \phi_i$ 得出分支对应的斜率理论值分别为 $0, \pm 1.17557, \pm 1.90211$, 序参量也分别是 $R = 1$ 和 0 . 图6(a), (b)中的直线为理论线, 数值模拟得出分岔树有5个分支, 其斜率、相差以及序参量都与理论结果相吻合.

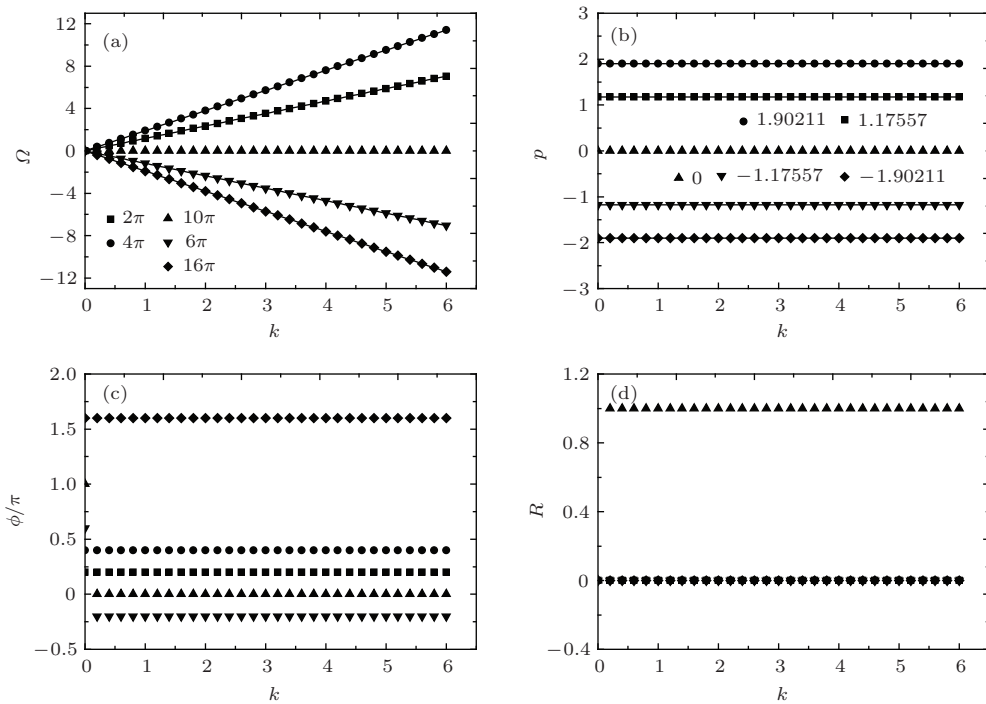


图6 $N = 10$ 系统同步态的特性 (a) 同步分岔树. 图中不同形状的分支对应初始相位分别是均分 $2\pi, 4\pi, 10\pi, 6\pi, 16\pi$; (b) 五个不同定态分支对应的斜率大小, 图中标记的数值模拟斜率大小和文中理论值相同; (c) 同步定态下相邻振子的相位差 ϕ ; (d) 不同定态对应的序参量

Fig. 6. The synchronization features of $N = 10$ system: (a) The bifurcation tree of average frequency. The initial phase of different branches is divided by $2\pi, 4\pi, 10\pi, 6\pi, 16\pi$, respectively; (b) The slopes of five different steady states. The size of slope from numerical simulation coincides with our theoretical results; (c) The phase difference of neighbor oscillators in synchronous states; (d) The order parameters of different states.

上面我们分析了全同振子系统的多稳态情况, 而对于非全同振子系统来说定态雅可比矩阵并没有发生变化, 根据该矩阵性质可知稳定态解个数也将不会改变, 因而对于非全同振子系统而言结论(14)依然成立. 值得注意的是, 对于一般的非全同振子系统, 我们虽然能够确定定态解的最大个数, 但并非每个定态解都能出现, 正如文献[20]所描述的那样耦合强度的不同会导致不同的定态解; 而如果我们采用全同振子, 则所有的定态解都能出现.

所以在本文中为分析方便, 我们重点讨论了全同情形.

4 非同步区系统动力学行为

以上我们分析了同步区出现多稳态的规律, 对于非同步区, 频率相近的振子会首先同步形成小集团, 平均频率相近的集团之间随着耦合强度的增加再逐渐同步到相同的频率上, 整个系统达到全局同

步. 下面我们探讨系统处于不同分支定态, 随着绝热减小耦合强度, 从同步态经过鞍结分岔失稳进入非同步区域的情形. 研究发现系统从任一定态分支出发, 伴随耦合强度减少, 系统仍然会保持在这一吸引域中, 直到耦合强度越过一阈值, 系统直接跳到平均频率为零的稳态, 期间会伴有迟滞现象. 如图 7 所示, 系统大小 $N = 9$, 图 7(a) 给出系统随着耦合强度的增加, 平均频率的同步分岔树, 发现当耦合强度为 $K = 1.51$ 时, 出现平均频率大于零的分支(正分支), 而当 $K = 1.54$ 时, 另一个对称的平均频率小于零分支(负分支)也出现. 图 7(b) 中系统从平均频率等于零(零分支)的稳态 ($K = 4.00$) 出发, 经历鞍结分岔而进入非同步区域. 图 7(c) 系统从平均频率小于零(负分支)的稳态 ($K = 4.38$) 出发, 绝热减小耦合强度, 发现在 $K = 1.16$ 时, 系统从此负分支定态跳跃至平均频率等于零的稳态, 此处的临界耦合强度小于图 7(a) 中的 $K = 1.54$, 即存在迟滞现象, 随后历经鞍结分叉进入非同步

区. 图 7(d) 系统处于平均频率大于零(正分支)的某一稳态 ($K = 5.04$), 随着耦合强度绝热减小, 在 $K = 1.27$ 时, 系统同样从正分支跳跃到零分支, 临界耦合强度也是小于图 7(a) 中对应的 $K = 1.5$, 同样存在迟滞现象. 从图 7(b), (c), (d) 中可以看出, 系统从任一非零分支稳态出发, 随着耦合强度绝热减小, 都会跳跃到零分支稳态, 随后经历相同的演化过程进入非同步区. 而在非同步区域, 正向演化和三种反向演化呈现完全相同的动力学行为演化, 图 8(a), (b), (c), (d) 分别对应着图 7(a), (b), (c), (d) 中非同步区域的局部放大图. 图 7(a) 中正向集团化同步过程和 (b), (c), (d) 中反向去同步行为完全一致, 即系统从任一稳态出发, 随着耦合强度绝热减小到零, 都回到同一个非同步分岔树上(非相关态). 这一现象也进一步说明耦合振子系统在非同步区由于运动的遍历性存在单一的非同步的动力学吸引域.

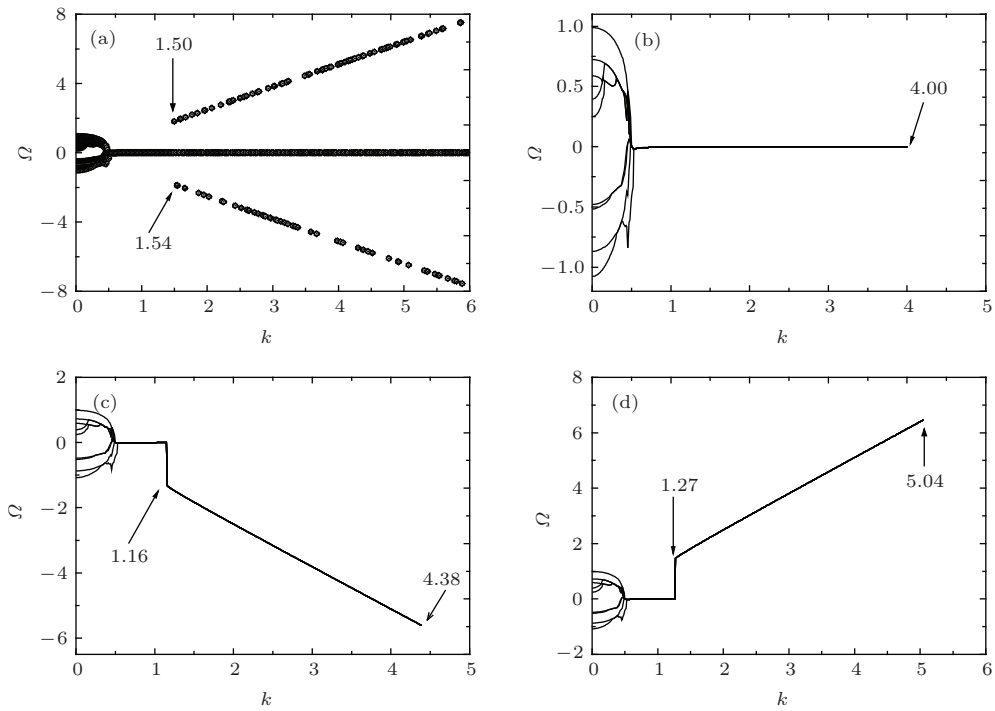


图 7 振子数 $N = 9$ 系统的平均频率随着耦合强度增加(正向)和减小(反向)的关系演化图 (a) 正向分岔树, 耦合强度从零逐渐增加; (b) 零分支反向分岔树, 耦合强度从 $K = 4.00$ 出发逐渐绝热减小; (c) 负分支反向分岔树, 耦合强度从 $K = 4.38$ 出发逐渐绝热减小; (d) 正分支反向分岔树, 耦合强度从 $K = 5.04$ 出发逐渐绝热减小; (b), (c), (d) 图中初始相位是 (a) 图中对应耦合强度下的终态相位

Fig. 7. Bifurcation trees for system with $N = 9$: (a) Bifurcation tree with increasing coupling strength from zero; (b) The plots of Ω versus K , the coupling strength decreases adiabatically from $K = 4.00$ gradually and the initial state is in a zero branch; (c) The plots of Ω versus K , the coupling strength decreases adiabatically from $K = 4.38$ gradually and the initial state is in a negative branch; (d) The plots of Ω versus K , the coupling strength decreases adiabatically from $K = 5.04$ gradually and the initial state is in a positive branch. The initial phase in (b)(c)(d) is chosen as the final phase under the corresponding coupling strength in figure (a).

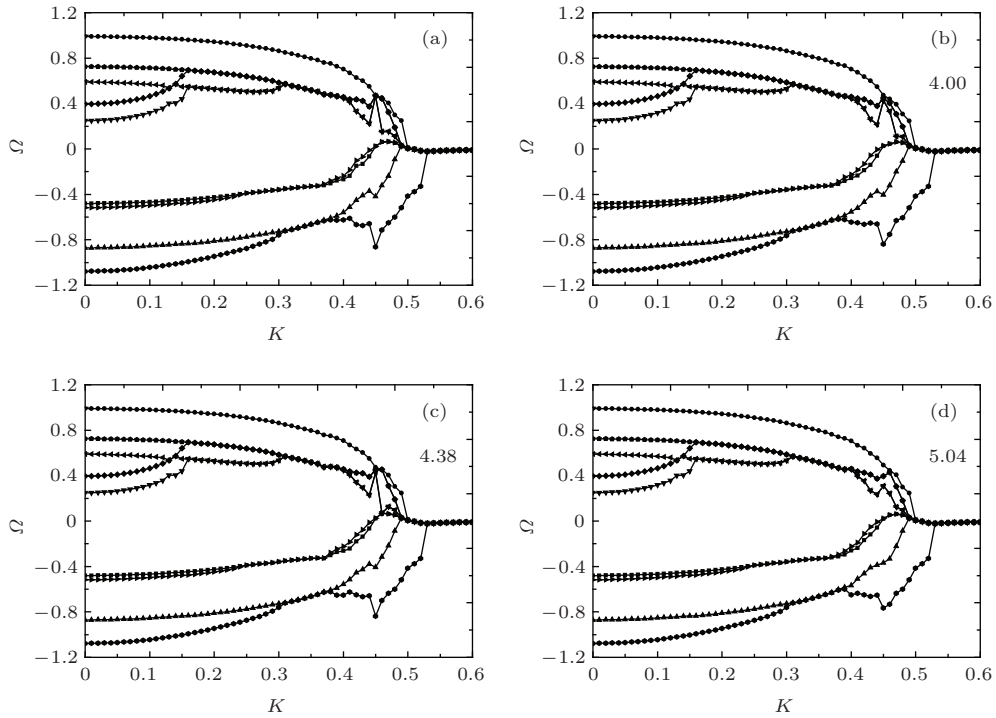


图8 图7中振子数 $N = 9$ 耦合系统的非同步区域放大图

Fig. 8. Partial enlarged plots of figure 7 of $N = 9$ system on non-synchronous area.

5 结 论

本文利用 Kuramoto 模型研究一维闭合环上振子在单向耦合作用下的同步动力学行为, 我们发现由于非对称耦合作用, 频率分岔树同步区出现多定态分支现象. 为了揭示同步区域出现的多定态机理, 我们分析了少体系统和多体全同振子系统, 即频率相同的振子, 结果表明非零稳态分支出现的数量与系统的大小紧密相关, 即 $2\text{int}(N/4) + 1$. 而在同步区的不同定态下, 相邻振子的相差满足条件 $\phi = 2k\pi/N + 2m\pi (m \in Z)$, 进一步利用线性稳定性原理分析得出该解是渐近稳定解. 非同步区的动力学行为相对比较复杂, 但是集团化的过程比较明显, 正向演化(耦合强度增加)对应集团化过程的形成, 最终达到全局同步. 反向演化(耦合强度减少)则对应去同步化过程, 不同的非零分支反向演化会跳跃到零分支定态, 此过程存在迟滞现象, 这一现象通常在系统发生一级相变时出现. 在耦合强度逐渐绝热减小的过程中, 系统会发生鞍结分岔失稳, 进入非同步区. 研究结果表明无论从哪个定态分支出发, 系统都会进入到同一个分岔树, 在非同步区域的动力学演化机理完全一致, 这是由于系统在非

同步区运动的遍历性, 只能出现单一的非同步态. 本文研究了一维闭合环上的 Kuramoto 模型的同步现象, 其动力学方程满足周期性边界条件. 而在其他边界条件, 例如开放边界条件下的一维振子链系统的同步动力学行为, 我们将在今后的工作中做深入研究.

参考文献

- [1] Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J 2001 *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, England)
- [2] Strogatz S 2004 *Sync: How Order Emerges From Chaos In the Universe, Nature, and Daily Life* (Hyperion, New York)
- [3] Kuramoto Y 1984 *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin)
- [4] Wiesenfeld K, Colet P, Strogatz S H 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 404
- [5] Cross M C, Zumdieck A, Lifshitz R, Rogers J L 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 224101
- [6] Ermentrout B 1991 *J. Math. Biol.* **29** 571
- [7] Vinogradova et al T M 2006 *Circ. Res.* **98** 505
- [8] Stam C J 2005 *Clin. Neurophysiol.* **116** 2266
- [9] Javaloyes J, Perrin M, Politi A 2008 *Phys. Rev. E.* **78** 011108
- [10] Zhu T X, Wu Y, Xiao J H 2012 *Acta Phys. Sin.* **62** 040502 (in Chinese) [朱廷祥, 吴晔, 肖井华 2012 物理学报 **62** 040502]

- [11] Feng C, Zou Y L, Wei F Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 070506 (in Chinese) [冯聪, 邹艳丽, 韦芳琼 2013 物理学报 **62** 070506]
- [12] Ma X J, Wang Y, Zheng Z G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4426 (in Chinese) [马晓娟, 王延, 郑志刚 2009 物理学报 **58** 4426]
- [13] Park M J, Kwon O M, Park J H, Lee S M, Cha E J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 110504
- [14] Cai G L, Jiang S Q, Cai S M, Tian L X 2013 *Chinese Physics B* **22** 0502
- [15] Kuramoto Y 1975 in *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, Lecture Notes in Physics Vol. 39, edited by H. Araki (Springer, New York, 1975)
- [16] Strogatz S H 2000 *Physica D* **143** 1
- [17] Acebron J A, Bonilla L L, Vicente J C P, Ritort F, Spigler R 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 137
- [18] Zheng Z G, Hu G, Hu B 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5318
- [19] Hu B, Zheng G Z 2000 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10** 2399
- [20] Ochab J, Góra P F 2010 *Acta Physica Polonica B Proceedings Supplement* **3** 453
- [21] Strogatz S H, Mirollo R E 1988 *Physica D* **31** 143
- [22] Sakaguchi H 1988 *Prog. Theor. Phys.* **79** 1069
- [23] Rogers J L, Wille L T 1996 *Phys. Rev. E* **54** R2193
- [24] El-Nashar H F, Cerdeira H A 2009 *Chaos* **19** 033127
- [25] Muruganandam P, Ferreira F F, El-Nashar H, Cerdeira H A 2008 *Pramana* **70** 1143
- [26] Maistrenko Y, Popovych O, Burylko O, Tass P A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 084102
- [27] Brede M 2007 *Phys. Lett. A* **372** 2618
- [28] Chen M Y, Shang Y, Zou Y, Kurths J 2008 *Phys. Rev. E* **77** 027101
- [29] Liu W Q, Wu Y, Xiao J H, Zhan M 2013 *Europhys. Lett.* **101** 38002
- [30] Gomez G J, Gomez S, Arenas A, Moreno Y 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 128701
- [31] Ji P, Peron T, Menck P, Rodrigues F, Kurths J 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 218701
- [32] Zheng Z G, Hu B, Hu G 2000 *Phys. Rev. E* **62** 402
- [33] Wu Y, Xiao J H, Hu G, Zhan M 2012 *Europhys. Lett.* **97** 40005
- [34] Huang X, Zhan M, Li F, Zheng Z G 2014 *J. Phys. A: Math. Theor* **47** 125101
- [35] Tilles P, Ferreira F, Cerdeira 2011 *Phys. Rev. E* **83** 066206
- [36] Kim S, Park S H, Ryu C S 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 2911
- [37] Ochab J, Góra P F 2009 *arXiv preprint arXiv:0909.0043*

Multiple synchronous states in a ring of coupled phase oscillators*

Huang Xia¹⁾²⁾ Xu Can¹⁾ Sun Yu-Ting¹⁾ Zheng Zhi-Gang^{1)†}

1) (Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

2) (Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

(Received 28 January 2015; revised manuscript received 30 April 2015)

Abstract

A significant phenomenon in nature is that of collective synchronization, in which a large population of coupled oscillators spontaneously synchronizes at a common frequency. Nonlinearly coupled systems with local interactions are of special importance, in particular, the Kuramoto model in its nearest-neighbor version. In this paper the dynamics of a ring of Kuramoto phase oscillators with unidirectional couplings is investigated. We simulate numerically the bifurcation tree of average frequency observed and the multiple stable states in the synchronization region with the increase of the coupling strength for $N > 4$, which cannot be found for $N \leq 3$. Oscillators synchronize at a common frequency $\bar{\omega} = 0$ when K is larger than a critical value of $N = 3$. Multiple branches with $\Omega \neq 0$ will appear besides the zero branch, and the number of branches increases with increasing oscillators for the system $N > 3$. We further present a theoretical analysis on the feature and stability of the multiple synchronous states and obtain the asymptotically stable solutions. When the system of $N = 2$ reaches synchronization, the dynamic equation has two solutions: one is stable and the other is unstable. And there is also one stable solution for $N = 3$ when the system is in global synchronization. For the larger system ($N > 3$), we study the identical oscillators and can find all the multiple branches on the bifurcation tree. Our results show that the phase difference between neighboring oscillators has different fixed values corresponding to the numbers of different branches. The behaviors in the synchronization region computed by numerical simulation are consistent with theoretical calculation very well. The systems in which original states belong to different stable states will evolve to the same incoherent state with an adiabatic decreasing of coupling strength. Behaviors of synchronization of all oscillators are exactly the same in non-synchronous region whenever the system evolves from an arbitrary branch according to the bifurcation trees. This result suggests that the only incoherent state can be attributed to the movement ergodicity in the phase space of coupled oscillators in an asynchronous region. When the system achieves synchronization, the phenomenon of the coexistence of multiple stable states will emerge because of the broken ergodicity. All these analyses indicate that the multiple stable states of synchronization in nonlinear coupling systems are indeed generically observable, which can have potential engineering applications.

Keywords: Kuramoto model, synchronization, phase oscillator, multiple stable states

PACS: 05.45.Xt, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.64.170504

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11475022), the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant No. 2014MS60).

† Corresponding author. E-mail: zgzheng@bnu.edu.cn