

微平行管道内 Eyring 流体的电渗滑移流动

姜玉婷 齐海涛

Electro-osmotic slip flow of Eyring fluid in a slit microchannel

Jiang Yu-Ting Qi Hai-Tao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 174702 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.174702

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.174702>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I17>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

圆截面直流道中微粒黏弹性聚焦机理研究

Viscoelastic focusing of microparticles in circular cross-sectional microchannels

物理学报.2015, 64(15): 154703 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.154703>

含活性剂液滴在倾斜粗糙壁面上的铺展稳定性

Stability of surfactant-laden droplet spreading over an inclined heterogeneous substrate

物理学报.2015, 64(1): 014702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.014702>

连续凹槽基底对含非溶性活性剂薄液膜流动特性的影响

Effect of periodic grooving topography on dynamics of Insoluble surfactant-laden thin film flow

物理学报.2014, 63(22): 224703 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.224703>

微平行管道内 Jeffrey 流体的非定常电渗流动

Transient electroosmotic flow of general Jeffrey fluid between two micro-parallel plates

物理学报.2013, 62(14): 144702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.144702>

单毛细管中赫切尔-巴尔克莱流体的分形分析

Fractal analysis of Herschel-Bulkley fluid flow in a capillary

物理学报.2012, 61(16): 164701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.164701>

## 微平行管道内 Eyring 流体的电渗滑移流动\*

姜玉婷 齐海涛†

(山东大学(威海)数学与统计学院, 威海 264209)

(2014年12月3日收到; 2015年3月23日收到修改稿)

研究了微平行管道内非牛顿流体——Eyring 流体在外加电场力和压力作用下的电渗流动. 在考虑微尺度效应, 电场作用, 非牛顿特性, 滑移边界等情况下, 建立 Eyring 流体在微平行管道内电渗流动的力学模型. 通过解线性 Poisson-Boltzmann 方程和 Cauchy 动量方程, 给出 Eyring 流体速度分布的精确解和近似解析解, 并探讨了上述因素对电渗流动的影响. 将电场力和压力对于 Eyring 流体电渗流动的速度分布的影响进行了比较分析, 得到有意义的结果.

**关键词:** Eyring 流体, 电渗流动, 滑移边界, 解析解

**PACS:** 47.50.-d, 47.61.-k, 47.57.jd

**DOI:** 10.7498/aps.64.174702

## 1 引言

近二十年来, 随着微纳机电系统和生物工程研究和开发的日益发展, 电渗流 (electroosmotic flow) 作为微流体力学的重要研究内容受到关注, 并在化学分析和医学研究等领域都有广泛应用<sup>[1,2]</sup>. Rice 和 Whitehead<sup>[3]</sup> 利用 Debye-Hückel 近似方法分析了细长圆柱状毛细血管中的电渗流. Levine 等<sup>[4]</sup> 进一步研究了高 Zeta 电位下的电动流. Wang 等<sup>[5]</sup> 给出了矩形微通道中周期电渗流的半解析解. Santiago<sup>[6]</sup> 研究了两平行板内流体的惯性力和压力对瞬态电渗流的影响.

早期关于电渗流的研究关注的大多是牛顿流体. 然而, 微流体设备通常用于分析生物流体, 聚合物溶液和胶体悬浮液等, 这些流体通常具有非牛顿特性, 不能看做牛顿流体. 因此, 有必要研究非牛顿流体的电渗流, 国内外在这方面也取得了一系列的研究成果. Das 和 Chakraborty<sup>[7]</sup> 以及 Chakraborty<sup>[8]</sup> 首先得出微平行管道内幂律流体电渗流速度分布的解析解. Zhao 等<sup>[9,10]</sup> 分析了微平行管道内幂律流体电渗流的运动规律, 并且讨论了

电渗流的非牛顿特性. Berli 和 Olivares<sup>[11]</sup> 将幂律流体模型、Bingham 模型以及 Eyring 模型作为本构关系, 研究了不同的非牛顿流体在平行微通道或圆柱形微通道内的电动流. Tang 等<sup>[12]</sup> 数值分析了微平行管道内幂律流体的电渗流. Hayat 等<sup>[13]</sup> 给出了广义 Burgers 流体周期电渗流的解析解. 长龙和菅永军<sup>[14]</sup> 研究了平行板微管道中广义 Maxwell 流体的周期电渗流, 获得了周期电渗流速度分布的半解析解. 刘全生等<sup>[15]</sup> 给出了黏弹性 Jeffrey 流体电渗流速度的解析表达式. 利用同伦分析方法, Zheng 等<sup>[16]</sup> 研究了多孔介质中纳米流体的驻点流动和辐射传热特性, 并分析了多种参数的影响. Zhao 等<sup>[17]</sup> 研究了 Oldroyd-B 流体在毛细管中的非定常电渗流动, 得出了速度分布的解析解并做了相关讨论. 许少峰和汪久根<sup>[18]</sup> 通过分析微通道中高分子溶液 Poiseuille 流, 发现微通道中的高分子溶液呈现非牛顿流体特性, 可用幂律流体来描述. Niu 等<sup>[19]</sup> 探讨了微管道内非牛顿纳米流体的滑移流动和热量传输机理. Tan 等<sup>[20]</sup> 研究了微平行管道内 Eyring 流体在电场中的电渗流, 并给出精确解与近似解. Kang 等<sup>[21]</sup> 研究了有水平通流情况下非

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11102102, 11472161)、山东省自然科学基金 (批准号: ZR2015AM011) 和山东大学自主创新基金 (批准号: 2013ZRYQ002) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: htqi@sdu.edu.cn

均质性多孔介质内幂律型纳米流体的热对流不稳定性问题, 得到热对流发生的临界 Rayleigh 数, 并分析了相关参数对热对流失稳的影响. Ng 和 Qi<sup>[22]</sup> 提出了在压力和电场力共同驱动下非均匀通道内幂律流体电渗流的解析模型. Wang 等<sup>[23]</sup> 给出在圆形长管道内广义 Maxwell 流体电渗流瞬时速度分布的精确解, 并分析了各参数的影响. Mondal 等<sup>[24]</sup> 建立了在高 Zeta 电势下矩形微通道中压力和电场力共同驱动下电渗流的数学模型, 得出了电势、热传导等特性在不同参数下的变化规律. Xie 和 Jian<sup>[25]</sup> 分析了高 Zeta 电势下幂律流体的旋转电渗流, 并讨论了多种参数对速度剖面的影响.

在上述微流体的研究中采用了不同的非牛顿流体本构关系式, 那么是否有一种流体模型能够较好的描述微纳管道内的电渗流动? Yang<sup>[26]</sup> 利用连续介质力学分析纳米管中的 Eyring 流体的流动, 发现该流动在低压梯度下呈现牛顿流体特性, 而在高压梯度下类似于塞形流体, 这与实验结果相似, 从而得出了 Eyring 流体可用于模拟微纳流体流动的结论. 基于此, 本文研究了平行微管道内的非牛顿流体——Eyring 流体在外加电场力和压力共同驱动下的电渗流动. 在 Navier 滑移边界条件下, 给出 Eyring 流体速度分布的精确解和近似解析解, 并数值分析了各参数的影响.

## 2 公式推导和解析解

考虑平行微管道中不可压缩 Eyring 流体的定常电渗流动. 微管道的长度为  $L$ , 宽度为  $W$ , 高度为  $2H$ , 且满足  $L, W \gg 2H$ . 建立二维直角坐标系, 令  $x$  轴  $y$  轴相互垂直并且分别与管道壁面相切, 规定下板位于  $y = -H$  处, 上板位于  $y = H$  处. 假设通道壁面均匀分布着 Zeta 电势  $\psi_\omega$ , 沿着  $x$  轴方向施加场强为  $E_x$  的直流电场和压力梯度为常数的压力场, 流体就在两个力的作用下开始运动. 根据几何中的对称性, 仅考虑通道的上半部分, 即  $0 \leq y \leq H$  区域, 且假设速度分布的形式为  $V = (v_x(y), 0, 0)$ .

忽略重力对电渗流动的影响, 流体满足 Cauchy 动量方程

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} + \rho_e E_x = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1)$$

其中,  $\rho_e$  是通道壁面上双电层 (electric double-layer) 的净电荷体密度,  $E_x$  为外部电场场强,  $\rho_e E_x$

是流体单位体积所受的电场力,  $P$  是压力. Eyring 模型来源于流体的分子理论, 并且已经通过实验得到了改进<sup>[27,28]</sup>. Eyring 流体的本构关系为

$$\tau_{yx} = \tau_0 \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1}{\dot{\gamma}_0} \frac{dv_x}{dy} \right), \quad (2)$$

其中,  $\tau_{yx}$  是切应力,  $\tau_0$  和  $\dot{\gamma}_0$  是流变参数.

根据静电学理论, 电势  $\psi$  满足 Poisson 方程

$$\varepsilon \frac{d^2\psi}{dy^2} = -\rho_e. \quad (3)$$

这里,  $\varepsilon$  是指流体的介电常数. 静电荷密度分布可以表示为溶液中所有离子之和, 即  $\rho_e = -2n_\infty z e \sinh \frac{ze\psi}{k_b T}$ , 其中  $n_\infty$  是指液体离子的体积浓度,  $e$  是电子所带的电荷量,  $z$  是离子的化合价,  $k_b$  是 Boltzmann 常数,  $T$  是绝对温度. 利用 Debye-Hückel 线性近似, 假设电势相对于离子的热能是很小的, 即  $|ze\psi| < |k_b T|$ , 那么有  $\sinh(ze\psi/k_b T) \approx ze\psi/k_b T$ , 于是电势分布满足如下线性 Poisson-Boltzmann 方程

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \kappa^2 \psi, \quad (4)$$

其中,  $\kappa^2 = ((2n_\infty e^2 z^2)/(\varepsilon k_b T))$  称为 Debye-Hückel 参数,  $\kappa^{-1}$  代表双电层的膜厚度, 称为 Debye 长度.

Poission-Boltzmann 方程 (4) 满足如下边界条件:

$$\left. \frac{d\psi}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad \psi(H) = \psi_\omega. \quad (5)$$

其解为

$$\psi(y) = \psi_\omega \frac{\cosh(\kappa y)}{\cosh(\kappa H)}. \quad (6)$$

进而可得静电荷密度分布为

$$\rho_e = -\varepsilon \psi_\omega \kappa^2 \frac{\cosh(\kappa y)}{\cosh(\kappa H)}. \quad (7)$$

通过以上的分析, 动量方程 (1) 可化为

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} - \varepsilon \kappa^2 \psi(y) E_x = \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (8)$$

下面研究方程 (2) 和 (8) 在如下 Navier 滑移边界条件<sup>[26]</sup> 和对称的边界条件下的解

$$v_x(H) = -L_s^0 \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=H}, \quad (9)$$

$$\left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad (10)$$

其中,  $L_s^0$  是恒定的滑移长度. 利用边界条件 (10), 由方程 (8) 可得

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \tau_{ws} \frac{\sinh(\kappa y)}{\cosh(\kappa H)} + \frac{\partial P}{\partial x} y, \\ \tau_{ws} &= \varepsilon \kappa E_x \psi_w. \end{aligned} \quad (11)$$

于是, 速度分布满足如下的常微分方程:

$$\frac{dv_x}{dy} = \dot{\gamma}_0 \sinh \left( \frac{\tau_{ws}}{\tau_0} \frac{\sinh(\kappa y)}{\cosh(\kappa H)} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{y}{\tau_0} \right). \quad (12)$$

对方程 (12) 从  $y \rightarrow H$  积分, 并利用 Navier 滑移边界条件 (9), 可得速度分布为

$$\begin{aligned} v_x(y) &= -\dot{\gamma}_0 \int_y^H \sinh \left( \frac{\tau_{ws}}{\tau_0} \frac{\sinh(\kappa y)}{\cosh(\kappa H)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{y}{\tau_0} \right) dy + v_H \\ &= -\frac{\dot{\gamma}_0}{\kappa} \int_{\kappa y}^{\kappa H} \sinh \left( \frac{\tau_{ws}}{\tau_0} \frac{\sinh(\kappa y)}{\cosh(\kappa H)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\kappa y}{\kappa \tau_0} \right) d\kappa y + v_H. \end{aligned} \quad (13)$$

此处,  $v_H$  由下式给出:

$$\begin{aligned} v_H &= -\dot{\gamma}_0 L_s^0 \sinh \left( \frac{\tau_{ws}}{\tau_0} \frac{\sinh(\kappa H)}{\cosh(\kappa H)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{H}{\tau_0} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

为便于计算, 利用如下双曲正弦函数的近似表达式:

$$\sinh x \approx \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{2} e^x, & x > 1. \end{cases} \quad (15)$$

当  $\tau_{yx} \ll \tau_0$  时, Eyring 流体非常接近于牛顿流体, 且  $\tau_0/\dot{\gamma}_0$  表示流体的黏度. 在实际应用中,  $\tau_0$  通常很大 [29], 故假设  $\tau_{ws} < \tau_0$ , 并在两种情形  $\kappa H > 1$  和  $0 < \kappa H \leq 1$  下分别讨论速度分布的近似解析解.

#### 情形 1 $\kappa H > 1$

当  $\kappa y > 1$  时, 方程 (13) 可近似为下式:

$$\begin{aligned} v_x(y) &= -\frac{\varepsilon E_x \psi_w \dot{\gamma}_0}{\tau_0} \frac{(1 + \kappa L_s^0) e^{\kappa H} - e^{\kappa y}}{2 \cosh(\kappa H)} \\ &\quad - \frac{\dot{\gamma}_0}{\tau_0} \frac{\partial P}{\partial x} \left( \frac{H^2 - y^2}{2} + L_s^0 H \right). \end{aligned} \quad (16)$$

当  $0 \leq \kappa y \leq 1$  时, 可得

$$\begin{aligned} v_x(y) &= -\frac{\varepsilon E_x \psi_w \dot{\gamma}_0}{\tau_0} \frac{1 - e^{-\kappa y} + (1 + \kappa L_s^0) e^{\kappa H}}{2 \cosh(\kappa H)} \\ &\quad - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\dot{\gamma}_0}{\tau_0} \left( \frac{H^2 - y^2}{2} + L_s^0 H \right). \end{aligned} \quad (17)$$

此时, 平均速度为

$$\bar{V} = \frac{1}{H} \int_0^H v_x(y) dy$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\kappa H} \int_0^1 v_x(y) d(\kappa y) \\ &\quad + \frac{1}{\kappa H} \int_1^{\kappa H} v_x(y) d(\kappa y) \\ &= -\frac{\varepsilon E_x \psi_w \dot{\gamma}_0}{\kappa H \tau_0} \frac{2 + 3[\kappa H(1 + \kappa L_s^0) - 1] e^{\kappa H}}{6 \cosh(\kappa H)} \\ &\quad - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\dot{\gamma}_0}{\tau_0} \left( \frac{H^2}{3} + L_s^0 H \right). \end{aligned} \quad (18)$$

特别地, 当  $\tau_{ws} \ll \tau_0$  且边界无滑移即  $L_s^0 = 0$  时, 由 (13) 式可得

$$\begin{aligned} v_N(y) &= -\frac{\varepsilon E_x \psi_w \dot{\gamma}_0}{\tau_0} \left( \frac{\cosh(\kappa y)}{\cosh(\kappa H)} - 1 \right) \\ &\quad - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\dot{\gamma}_0}{\tau_0} \frac{H^2 - y^2}{2}. \end{aligned} \quad (19)$$

当  $\kappa H \gg 1$  时, 平均速度为

$$\begin{aligned} \bar{v}_N &= -\frac{\varepsilon E_x \psi_w \dot{\gamma}_0}{\tau_0} \left( \frac{e^{\kappa H}}{2\kappa H \cosh(\kappa H)} - 1 \right) \\ &\quad - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\dot{\gamma}_0}{\tau_0} \frac{H^2}{3}. \end{aligned} \quad (20)$$

#### 情形 2 $0 < \kappa H \leq 1$

由 (13) 式类似可得, 流体速度和平均速度分别为

$$\begin{aligned} v_x(y) &= -\frac{\dot{\gamma}_0 \varepsilon E_x \psi_w}{\tau_0} \frac{\kappa H(\kappa H + 2\kappa L_s^0) - \kappa^2 y^2}{2 \cosh(\kappa H)} \\ &\quad - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\dot{\gamma}_0}{\tau_0} \left( \frac{H^2 - y^2}{2} + L_s^0 H \right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{V} &= -\frac{\varepsilon E_x \psi_w \dot{\gamma}_0}{\tau_0} \frac{\kappa H(\kappa H + 3\kappa L_s^0)}{3 \cosh(\kappa H)} \\ &\quad - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\dot{\gamma}_0}{\tau_0} \frac{H^2 + 3L_s^0 H}{3}. \end{aligned} \quad (22)$$

### 3 结果与讨论

为了检验近似解的合理性, 取流体的介电常数  $\varepsilon = 6.95 \times 10^{-10} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ , 微平行管道内壁的电势  $\psi_w = -50 \text{ mV}$ , 外部电场的场强  $E_x = 500 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ , 流变参数  $\tau_0 = 43.4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$  [30]. 并引入如下参数 [31]:

$$\begin{aligned} V_s &= -\frac{\varepsilon E_x \psi_w \dot{\gamma}_0}{\tau_0}, \quad \Gamma = -\frac{H^2}{\varepsilon \psi_w E_x} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \kappa H &= H/\kappa^{-1}, \quad d = L_s^0/H, \end{aligned}$$

其中,  $\Gamma$  表示压力与电场力的比率,  $\kappa H$  表示无量纲膜厚度,  $d$  为无量纲滑移长度. 图 1 表示精确解 (13) 与近似解 (16), (17) 和 (21) 的比较. 可以看出, 近似解与精确解的拟合程度非常好, 在下面的分析中用近似解 (16), (17) 和 (21) 来代替精确解 (13), 探讨各因素对速度分布的影响.

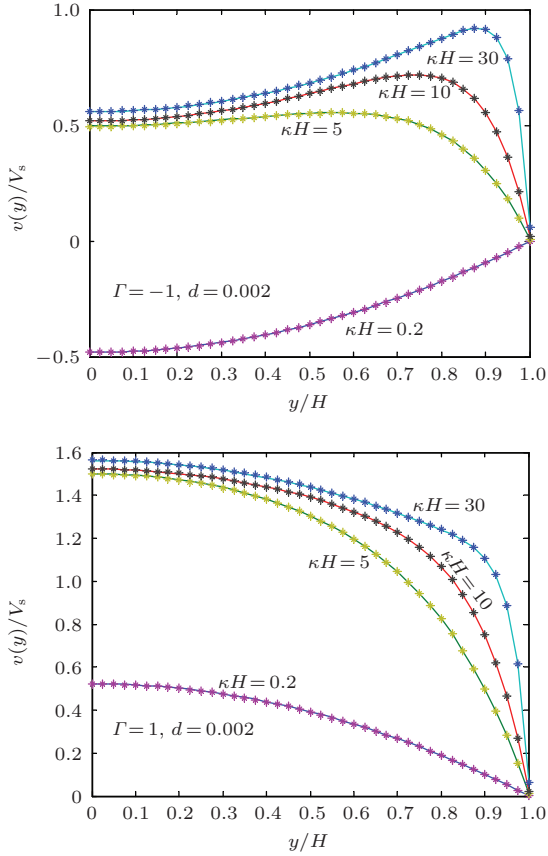


图1  $\kappa H$ 取不同值时精确解(13)与近似解(16), (17)和(21)比较的图像(其中实线为近似解,\*为相应的精确解)  
Fig. 1. The comparison of exact solutions (13) and approximate solutions (16), (17) and (21) for different values of  $\kappa H$ , where the solid lines are the approximate solutions and \* are the corresponding exact solutions.

首先讨论压力与电场力的比值对速度剖面的影响. 当  $\kappa H = 30$  和  $d = 1/4$  时, 图2给出了  $\Gamma$  取不同值时无量纲速度剖面. 可以看出  $\Gamma = -1, 0, 1$  时, 速度分布剖面均接近塞子状, 但当  $\Gamma = 2.5$  时趋向于抛物线形. 这说明  $\Gamma \gg 1$  时, 压力场远大于电场力影响, 压力占主导因素, 此时的速度图像类似于抛物线形. 而且当  $\kappa H, d$  不变时, 速度随着  $\Gamma$  增大而增大. 类似地, 当固定  $\kappa H = 0.2$  和  $d = 1/4$ ,  $\Gamma$  取不同值时无量纲速度的图像如图3, 可以看出速度分布均为抛物线形. 当  $\Gamma$  取不同值时, 无量纲速度大小随着  $y/H$  变化的规律是相同的.

接下来讨论双电层的膜厚度  $\kappa^{-1}$  对速度的影响. 当  $H$  与  $d$  不变, 满足  $\kappa H > 1$  时, 对于相同的  $\Gamma$ , 当  $\kappa H$  增大, 速度增大, 如图4所示. 类似地, 由图5可以看出, 当  $0 < \kappa H < 1$  时, 速度剖面均为抛物线形. 当  $\Gamma \geq 0$  时,  $\kappa H$  增大, 速度增大, 当  $\Gamma < 0$  时,  $\kappa H$  增大, 速度绝对值减小.

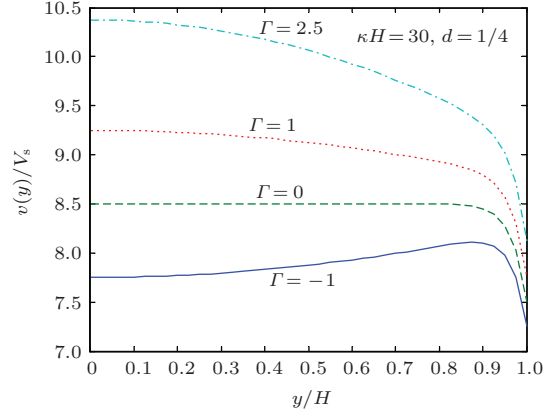


图2 不同的  $\Gamma$  对无量纲速度分布的影响 ( $\kappa H = 30, d = 1/4$ )  
Fig. 2. The dimensionless velocity profiles for different values of  $\Gamma$  ( $\kappa H = 30, d = 1/4$ ).

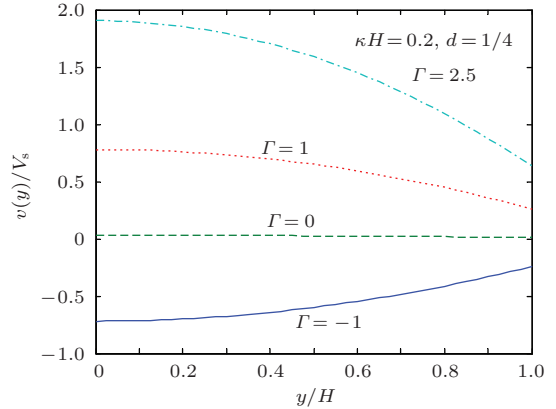


图3 不同的  $\Gamma$  对无量纲速度分布的影响 ( $\kappa H = 0.2, d = 1/4$ )  
Fig. 3. The dimensionless velocity profiles for different values of  $\Gamma$  ( $\kappa H = 0.2, d = 1/4$ ).

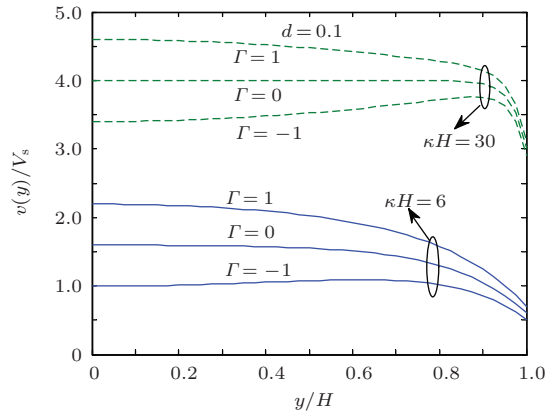


图4  $\Gamma$ 取不同值时无量纲速度剖面 ( $\kappa H = 6, 30; d = 0.1$ )  
Fig. 4. The dimensionless velocity profiles for different values of  $\Gamma$  ( $\kappa H = 6, 30; d = 0.1$ ).

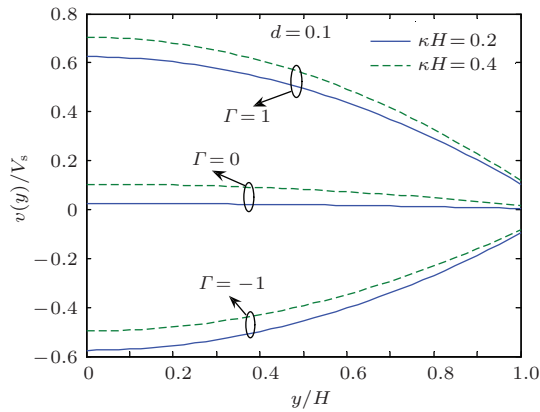


图5  $\Gamma$ 取不同值时无量纲速度剖面 ( $\kappa H = 0.2, 0.4$ ;  $d = 0.1$ )

Fig. 5. The dimensionless velocity profiles for different values of  $\Gamma$  ( $\kappa H = 0.2, 0.4$ ;  $d = 0.1$ ).

最后讨论滑移尺度对速度分布的影响. 如图6, 可以看出当边界无滑移即  $L_s^0 = 0$  时, 在  $\kappa H \rightarrow \infty$  时, 平均速度  $\bar{V}$  趋向于 Smoluchowski 速度  $V_s$ , 但当滑移长度  $L_s^0 \neq 0$  时, 随着  $\kappa H$  增大, 平均速度  $\bar{V}$  明显增大. 而且在给定  $\Gamma$  和  $\kappa H$  时, 平均速度  $\bar{V}$  随着  $d = L_s^0/H$  的增大而增大.

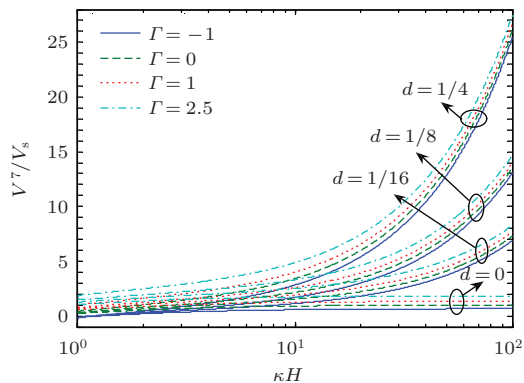


图6 不同滑移长度  $L_s^0$  下无量纲平均速度剖面随电学参数  $\kappa H$  变化

Fig. 6. Dimensionless average velocity profiles versus  $\kappa H$  for different  $L_s^0$ .

## 4 结 论

本文研究了微平行管道内 Eyring 流体在电场力和压力共同作用下的电渗流动. 在 Navier 滑移边界条件下, 获得了电渗流速度分布的精确解和近似解. 结果表明, 速度分布受外部压力与电场力的比值, 双电层的膜厚度以及滑移长度的影响. 通过对比发现, 当  $0 < \kappa H < 1$  时, 速度剖面均为抛物线形, 而当  $\kappa H > 1$  时, 外部压力与电场力比值较小时, 近似于塞子状, 但当压力远大于电场力时, 压力因素会明显改变速度剖面, 使其趋于抛物线形. 当

$H$  与  $d$  不变, 且  $\kappa H > 1$  时, 对于相同的  $\Gamma$ , 当  $\kappa H$  增大, 速度增大. 在  $\kappa H \gg 1$  时, 随着  $\kappa H$  增大, 通道边界处的速度变化越剧烈. 在给定  $\Gamma$  和  $\kappa H$  时, 平均速度  $\bar{V}$  随着  $d = L_s^0/H$  的增大而增大.

## 参考文献

- [1] Hunter R J 1981 *Zeta Potential in Colloid Science* (New York: Academic Press) p15
- [2] Stone H A, Stroock A D, Ajdari A 2004 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **36** 381
- [3] Rice C L, Whitehead R 1965 *J. Phys. Chem.* **69** 4017
- [4] Levine S, Marriott J R, Neale G, Epstein N 1975 *J. Colloid Interface Sci.* **52** 136
- [5] Wang X M, Chen B, Wu J K 2007 *Phys. Fluids* **19** 127101
- [6] Santiago J G 2001 *Anal. Chem.* **73** 2353
- [7] Das S, Chakraborty S 2006 *Anal. Chim. Acta* **559** 15
- [8] Chakraborty S 2007 *Anal. Chim. Acta* **605** 175
- [9] Zhao C L, Zholkovskij E, Masliyah J H, Yang C 2008 *J. Colloid Interface Sci.* **326** 503
- [10] Zhao C L, Yang C 2011 *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **166** 1076
- [11] Berli C L A, Olivares M L 2008 *J. Colloid Interface Sci.* **320** 582
- [12] Tang G H, Li X F, He Y L, Tao W Q 2009 *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **157** 133
- [13] Hayat T, Afzal S, Hendi A 2011 *App. Math. Mech. Engl. Ed.* **32** 1119
- [14] Chang L, Jian Y J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 124702 (in Chinese) [长龙, 菅永军 2012 物理学报 **61** 124702]
- [15] Liu Q S, Yang L G, Su J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 144702 (in Chinese) [刘全生, 杨连贵, 苏洁 2013 物理学报 **62** 144702]
- [16] Zheng L C, Zhang C L, Zhang X X, Zhang J H 2013 *J. Franklin I.* **350** 990
- [17] Zhao M L, Wang S W, Wei S S 2013 *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **201** 135
- [18] Xu S F, Wang J G 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 124701 (in Chinese) [许少峰, 汪久根 2013 物理学报 **62** 124701]
- [19] Niu J, Fu C J, Tan W C 2012 *PLoS ONE* **7** e37274
- [20] Tan Z, Qi H T, Jiang X Y 2014 *App. Math. Mech. Engl. Ed.* **35** 689
- [21] Kang J H, Zhou F B, Tan W C, Xia T Q 2014 *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **213** 50
- [22] Ng C O, Qi C 2014 *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **208** 118
- [23] Wang S W, Zhao M L, Li X C 2014 *Cent. Eur. J. Phys.* **12** 445
- [24] Mondal M, Misra R P, De S 2014 *Int. J. Therm. Sci.* **86** 48
- [25] Xie Z Y, Jian Y J 2014 *Colloids Surf. A* **461** 231
- [26] Yang F Q 2007 *Appl. Phys. Lett.* **90** 133105
- [27] Eyring H 1936 *J. Chem. Phys.* **4** 283
- [28] Bird R B, Armstrong R, Hassager O 1987 *Dynamics of Polymeric Liquids* (New York: John Wiley & Sons) pp169-253

- [29] Liu X L, Jiang M, Yang P R, Kaneta M 2005 *ASME J. Tribology* **127** 70  
[30] Bosse M A, Araya H, Troncoso S A, Arce P E 2002 *Elec-*

- trophoresis* **23** 2149  
[31] Afonso A M, Ferrás L L, Nóbrega J M, Alves M A, Pinho F T 2014 *Microfluid. Nanofluid.* **16** 1131

## Electro-osmotic slip flow of Eyring fluid in a slit microchannel\*

Jiang Yu-Ting Qi Hai-Tao<sup>†</sup>

(School of Mathematics and Statistics, Shandong University, Weihai, Weihai 264209, China)

( Received 3 December 2014; revised manuscript received 23 March 2015 )

### Abstract

The electro-osmotic flow of a non-Newtonian fluid in a slit micro-channel under the Navier's slip boundary condition is investigated. The Eyring constitutive relationship model is adopted to describe the non-Newtonian characteristics of the flow driven by the applied electric field force and pressure. In consideration of the micro-scale effects, electric field, non-Newtonian behavior and slip boundary condition, a mechanical model is built and the effects of these factors on the flow are studied. Analytical expressions are derived for the electric potential and velocity profile by solving the linearized Poisson-Boltzmann equation and the modified Cauchy equation. Approximate expressions of the velocity distribution are also given and discussed. Furthermore, by comparing the effects of electric force with that of pressure on the velocity distribution, some meaningful conclusions are drawn from the obtained graphics.

**Keywords:** Eyring fluid, electro-osmotic flow, slip boundary, exact solutions

**PACS:** 47.50.-d, 47.61.-k, 47.57.jd

**DOI:** 10.7498/aps.64.174702

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11102102, 11472161), the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. ZR2015AM011), and the Independent Innovation Foundation of Shandong University, China (Grant No. 2013ZRYQ002).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [htqi@sdu.edu.cn](mailto:htqi@sdu.edu.cn)