

基于滚动时域估计的飞行器姿态估计及三轴磁强计在线校正

赵国荣 黄婧丽 苏艳琴 孙聪

Attitude estimation and three-axis magnetometer on-line calibration based on moving horizon estimation

Zhao Guo-Rong Huang Jing-Li Su Yan-Qin Sun Cong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 210502 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.210502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I21>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

电感电流伪连续导电模式下 Buck 变换器的动力学建模与分析

Dynamical modeling and analysis of buck converter operating in pseudo-continuous conduction mode

物理学报.2015, 64(18): 180501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.180501>

基于有源广义忆阻的无感混沌电路研究

Inductorless chaotic circuit based on active generalized memristors

物理学报.2015, 64(17): 170503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.170503>

混沌信号的压缩感知去噪

Chaotic signal denoising in a compressed sensing perspective

物理学报.2015, 64(16): 160502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160502>

基于数模混合的混沌映射实现

Chaotic map implementation based on digital-analog hybrid method

物理学报.2015, 64(16): 160501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160501>

基于对偶数理论的资料同化新方法

A new data assimilation method based on dual-number theory

物理学报.2015, 64(13): 130502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130502>

基于滚动时域估计的飞行器姿态估计及三轴磁强计在线校正*

赵国荣¹⁾ 黄婧丽^{1)†} 苏艳琴¹⁾ 孙聪²⁾

1) (海军航空工程学院, 控制科学与工程系, 烟台 264001)

2) (91980 部队, 烟台 264001)

(2015 年 5 月 12 日收到; 2015 年 6 月 22 日收到修改稿)

针对飞行器姿态估计以及三轴磁强计在线校正问题, 提出了一种实时滚动时域估计算法. 首先, 为了解决在卡尔曼滤波框架下系统约束不能显式求解的问题, 设计了滚动时域估计滤波算法. 该算法将飞行器姿态估计问题转化为优化问题, 显式求解四元数归一化性质, 缩小搜索空间的同时提高了搜索效率和精度. 其次, 滤波时域窗内应用高斯-牛顿迭代法求解最优状态估计值, 满足了实时性要求. 最后, 在没有增加系统状态维数的情况下, 在线求解了三轴磁强计校正参数, 保证了磁强计量测值以矢量形式输入系统. 仿真结果表明, 由于合理地利用了历史信息, 该方法精度较高, 且对初始误差、系统误差均不敏感, 具有一定鲁棒性.

关键词: 姿态估计, 滚动时域估计, 三轴磁强计, 在线校正

PACS: 05.45.-a, 02.60.Pn, 07.55.Ge

DOI: 10.7498/aps.64.210502

1 引言

陀螺仪作为目前大多数飞行器上的主导航设备, 具有抗干扰、自主导航等优势^[1]. 而三轴磁强计(three-axis magnetometer, TAM)无积累误差并且和星跟踪器或者GPS(global positioning system)等其他传感器提供的矢量观测相比可完全得到三个自由度的姿态估计^[2,3], 并且作为一种无源导航方式, 不需要无线数据通信链路, 不容易被发现和受到电子战的攻击, 隐蔽性强. 与此同时, 它却也有容易受外界电磁信号干扰, 与地磁图匹配时可出现多值解, 引起滤波发散等缺陷. 考虑到陀螺仪和磁强计互补的特点可以同时安装在飞行器上安装提供角速度测量值的陀螺仪和提供磁场向量观测值的TAM来估计姿态. 该传感器组在军事领域有很大的应用潜力.

通过陀螺仪、TAM的模型可以建立由四元数

表达的非线性姿态估计系统. 对于线性系统的状态估计卡尔曼滤波已经能够很好地解决, 但是在非线性系统中就不那么容易. 目前已有的解决非线性问题的方法也都是线性系统卡尔曼滤波方法的扩展^[4-6], 如最常用的扩展卡尔曼滤波(extended Kalman filter, EKF)^[7,8], 无迹卡尔曼滤波(unscented Kalman filter, UKF)^[9,10]等. 然而这些方法都主要针对了模型的非线性问题, 没有考虑系统约束. 其实大多数实际情况系统是有约束的, 这样就不能以显式求解, 计算过程复杂, 并且精度不高. 同时, EKF, UKF等大多数滤波器对当前时刻的状态估计都是基于先验估计和当前的量测值. 但是对于非线性系统, 先验概率密度函数只能被估计, 这样就只能得到一个次优的估计结果, 导致估计效果比较差或者滤波发散.

为了克服这些困难, 本文提出通过滚动时域状态估计(moving horizon estimation, MHE)^[11]来解决上述问题. MHE是一种基于时域或者叫“窗”的

* 国家自然科学基金(批准号: 61372027, 61473306)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: huangjingli_hy@163.com

优化方法. 这个“窗”包含过去有限的量测值, “窗”的最后一个输出为当前状态估计. 它将估计问题转化成通过代价函数描述的优化问题进行求解, 这样就可以显式地表示约束, 系统地求解. 通常这些约束也更能反映实际情况, 因此可以提供更多信息, 缩小估计器的搜索空间, 提高搜索效率. 考虑到在飞行器姿态估计中四元数有归一化约束, 通过MHE就能很好地解决, 无需每次迭代加入暴力约束, 强行归一化. 减少计算量的同时提高精度. 除了考虑约束之外, 和广为人知的次优非线性状态估计相比, 一些重要的研究表明就精度和鲁棒性而言, 非线性滚动时域估计具有更好的性能^[12]. MHE通过时域窗内包含更多数据来减少对先验概率密度函数和错误初始化的敏感性. 而对TAM来讲, 由于量测容易受到外界干扰, 这些特点将具有重要意义. 同时, MHE作为一种在最小二乘意义下的最优状态估计, 它的稳定性已经被证明^[13].

对于在线校正问题, 目前国内文献鲜有报道, 而国外文献采用的方法通常是将参数化成额外增加的状态^[14,15]. 当校正参数当成增加的状态时必须为已知姿态或者姿态量测值为真实状态, 而校正之前由于误差的存在事实上姿态是未知的. 因此在线校正TAM必须不依赖姿态信息. 目前大部分文献通过测量地磁场标量强度来避免该问题, 如文献^[16, 17], 而这样在姿态估计中不可避免地损失了信息. 与此同时, 上文中建立的MHE算法的另一个好处是未知和缓慢时变的参数扰动可以仅仅当成一个优化问题的自由度与其他状态一起被估计出来. 不依赖姿态同时也不会损失信息, 在校正TAM的同时实现姿态的矢量估计. 为此本文提出了基于滚动时域估计算法的飞行器姿态估计以显式求解四元数归一化性质, 同时利用该方法在线校正磁强计, 保证量测信息的矢量输入.

2 传感器模型的建立及离散化

在惯性空间描述刚体姿态的方法有很多种, 比如方向余弦矩阵、欧拉角、旋转矢量、欧拉对称参数、罗德里格参数或吉布斯向量、四元数^[18]等. 目前已经证明任何包含三个元素的方法都具有奇异性, 比如欧拉角^[19]. 而其中的四元数方法有效地避免了该问题并且计算量较小, 因此广泛应用于姿态估计领域中.

姿态四元数向量 $\mathbf{q}$ 可以定义为

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} e_x \sin(\alpha/2) \\ e_y \sin(\alpha/2) \\ e_z \sin(\alpha/2) \\ \cos(\alpha/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1:3} \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中, $\mathbf{e} = [e_x \ e_y \ e_z]^T$ 为主旋转轴, α 描述了参考坐标系到载体系旋转的角度. 因此四元数完全并且唯一地描述了刚体在参考坐标系下的方向. 从这个定义来看, 它必须满足一个归一化约束, 即 $\|\mathbf{q}\| = 1$.

姿态矩阵 $\mathbf{A}$ (有时称为姿态余弦矩阵)用四元数可以表示为

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = (q_4^2 - \mathbf{q}_{1:3}^T \mathbf{q}_{1:3}) \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\mathbf{q}_{1:3} \mathbf{q}_{1:3}^T - 2q_4 [\mathbf{q}_{1:3} \times], \quad (2)$$

其中矩阵 $[\mathbf{q}_{1:3} \times]$ 为差乘反对称矩阵; $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 是 3×3 的单位矩阵. 四元数动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Xi}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ 为载体坐标系下的角速度. 该四元数动力学方程在任意旋转时都不会出现奇点.

下文以四元数为基础建立了陀螺和TAM的离散数学模型.

2.1 陀螺仪模型

载体上的陀螺仪提供角速度量测值. 下面给出一个简单但是广泛应用的陀螺仪模型^[20]:

$$\boldsymbol{\omega}^m(t) = \boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{\beta}(t) + \boldsymbol{\eta}_v(t), \quad (4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(t) = \boldsymbol{\eta}_u(t), \quad (5)$$

其中, η_v 是陀螺仪的零均值高斯白噪声, 陀螺仪的偏差建模为随机游走:

$$\begin{aligned} E[\eta_v(t)\eta_v^T(\tau)] &= \mathbf{I}_{3 \times 3} \sigma_v^2 \delta(t - \tau), \\ E[\eta_u(t)\eta_u^T(\tau)] &= \mathbf{I}_{3 \times 3} \sigma_u^2 \delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (6)$$

为了求解必须将模型离散化. 下面给出了一个离散对偶积分器^[19]:

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{\Delta t}{4} \boldsymbol{\Omega}(\omega_k)\right) \mathbf{q}_{k+1} \\ &= \left(1 + \frac{\Delta t}{4} \boldsymbol{\Omega}(\omega_k)\right) \mathbf{q}_k. \end{aligned} \quad (7)$$

通过上式可以由四元数轨迹方程得到角速度向量

$$\begin{aligned} \omega_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) \\ = (\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{q}_k) + \boldsymbol{\Xi}(\mathbf{q}_{k+1}))^{-1}(\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k), \end{aligned} \quad (8)$$

由于 ω 有三个分量而 $\mathbf{q}$ 有四个, 我们需要在每步加上归一化约束以便很好的定义 ω 和 $\mathbf{q}$ 之间的关系.

对于漂移偏差, 一个简单的前向欧拉离散化方法为

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \Delta t \beta_k. \quad (9)$$

2.2 TAM模型

在每个离散时刻 k 的三轴磁强计量测模型为

$$\mathbf{b}_k^m = \mathbf{A}(\mathbf{q}_k) \mathbf{b}_k + \mathbf{v}_k, \quad (10)$$

其中, $\mathbf{b}_k$ 为地理坐标系下的地磁场向量; $\mathbf{b}_k^m$ 为载体坐标系下的地磁场量测向量, 量测噪声为零均值的高斯白噪声 $\mathbf{v}_k$, 方差为 $\mathbf{R}_k$.

3 基于MHE的飞行器姿态估计

考虑到四元数的归一化性质, 下文通过连续线性化只给出了解带有等式约束的滚动时域估计问题方案. 该方法在后续两部分将用来估计飞行器的姿态和在线校正 TAM.

3.1 MHE问题的表示

Bryson 与 Frazier^[21] 在 1963 年首先给出了卡尔曼滤波与最优关系的结论, 并指出卡尔曼滤波就是无约束最小方差估计. 由于最小方差估计方法的目标函数是二次型形式, 事实上有约束情况下的二次型优化问题已经得到很好解决. 然而, 这种方法考虑了所有以前的测量数据, 随着时间推移, 需要

处理的数据越来越多, 最终将导致问题不可解, 因此只考虑当前时刻以前固定数量的数据, 同时将历史数据对估计的影响用一种方法来近似描述, 则每次参与优化的数据量不变, 可避免数据无限累加, 这种方法实现起来就像一个滚动的观测“窗口”, 这就是 MHE 的基本思想.

本文提出采用滚动时域估计器来估计四元数和陀螺偏差, 窗口长度定义为 L ($i = 1, 2, \dots, L$), 其中窗口最后的一个点 ($i = L$) 代表现在时刻 k . 滚动时域估计问题则为

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_L \\ \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_L \\ \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{L-1}}} & \frac{1}{2} \sum_{i=2}^L \mathbf{v}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \mathbf{w}_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{w}_i \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_1^0 - \mathbf{x}_1)^T (\mathbf{P}_1^0)^{-1} (\mathbf{x}_1^0 - \mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (11a)$$

s.t.

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) + \mathbf{w}_i, \quad i = 1, \dots, L-1, \quad (11b)$$

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{i+1}) + \mathbf{v}_{i+1}, \quad i = 2, \dots, L, \quad (11c)$$

$$l_i(\mathbf{x}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, L. \quad (11d)$$

其中 $\mathbf{x}_i$ 是待估计的状态. (11b) 式描述了在离散情况下的状态递推过程. 在该递推方程中 $\mathbf{u}_i$ 是已知输入, 它的过程噪声为 $\mathbf{w}_i$, 过程噪声方差为 $\mathbf{Q}_i$. 方程 (11c) 为量测方程, $\mathbf{y}_i$ 为量测值, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{R}_i$ 分别为量测噪声和量测噪声方差. 在时域内的第一个时刻点为 $\mathbf{x}_1^0$, 方差为 $\mathbf{P}_1^0$. (11a) 式第三项为代价函数, 它描述了到达代价. 值得注意的是 $i = 1$ 时刻的量测值并没有包含在代价函数中. 假定从量测中得到的所有信息已经包含在先验估计 $\mathbf{x}_1^0$ 中. 等式约束由 (11d) 式给出. 滚动时域估计问题的输出为 $\mathbf{x}_L$: 时域“窗”中最后一个时刻的估计状态向量. 图 1 为 MHE 的工作原理.

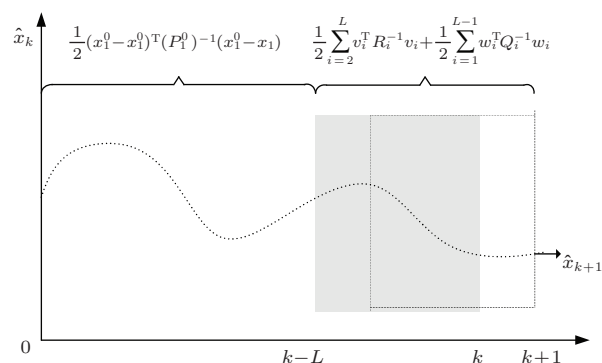


图 1 滚动时域估计原理

Fig. 1. The principle of moving horizon estimation.

这就是一个带权重的最小二乘问题, 在该问题中权重就是方差阵的逆

$$\mathbf{W}_{m,i} = \mathbf{R}_i^{-1}, \quad (12a)$$

$$\mathbf{W}_{p,i} = \mathbf{Q}_i^{-1}, \quad (12b)$$

$$\mathbf{W}_a = (\mathbf{P}_1^0)^{-1}. \quad (12c)$$

采用二范数记法:

$$[a]^T \mathbf{W} [a] = \|a\|_W^2. \quad (13)$$

把方程 (11b)、方程 (11c)、方程 (11d) 代入到代价函数 (11a) 中, 得到下式:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_i} \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=2}^L \|y_i - h(\mathbf{x}_i)\|_{\mathbf{W}_{m,i}}^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \|\mathbf{x}_{i+1} - f(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)\|_{\mathbf{W}_{p,i}}^2 \\ & + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_1^0 - \mathbf{x}_1\|_{\mathbf{W}_a}^2 \end{aligned} \quad (14a)$$

s.t.

$$l_i(\mathbf{x}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, L. \quad (14b)$$

这样就将状态估计问题转化成了非线性规划 (NPL) 问题, 可以用数值优化的方法求解.

3.2 MHE 问题的求解

该 NLP 问题可用高斯牛顿迭代法解决. 在每次的迭代中, 通过前一个解 $\bar{\mathbf{x}}_i$ (如果前一个解得不

到可以用最优估计替代) 线性化测量和状态方程. 其中 $\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i$ 是对真实值的偏离:

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{x}_i} \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=2}^L \left\| y_i - h(\bar{\mathbf{x}}_i) - \frac{\partial h(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \Delta \mathbf{x}_i \right\|_{\mathbf{W}_{m,i}}^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \left\| \bar{\mathbf{x}}_{i+1} - f(\bar{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_i) \right. \\ & \left. + \Delta \mathbf{x}_{i+1} - \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \Delta \mathbf{x}_i \right\|_{\mathbf{W}_{p,i}}^2 \\ & + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_1^0 - \bar{\mathbf{x}}_1 - \Delta \mathbf{x}_1\|_{\mathbf{W}_a}^2, \end{aligned} \quad (15a)$$

s.t.

$$l_i(\bar{\mathbf{x}}_i) + \frac{\partial l_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \Delta \mathbf{x}_i = 0, \quad i = 1, \dots, L. \quad (15b)$$

通过在全部的时域内引入状态偏离轨迹 $\Delta \mathbf{X} = [\Delta \mathbf{x}_1^T, \Delta \mathbf{x}_2^T, \dots, \Delta \mathbf{x}_L^T]^T$, 该优化问题可以重写为

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{X}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{A}_m \Delta \mathbf{X} - \mathbf{B}_m\|_{\mathbf{W}_m}^2 \\ & + \frac{1}{2} \|\mathbf{A}_p \Delta \mathbf{X} - \mathbf{B}_p\|_{\mathbf{W}_p}^2 \\ & + \frac{1}{2} \|\mathbf{A}_a \Delta \mathbf{X} - \mathbf{B}_a\|_{\mathbf{W}_a}^2, \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{A}_{\text{eq}} \Delta \mathbf{X} - \mathbf{B}_{\text{eq}} = 0, \quad (16b)$$

其中, 和量测有关的矩阵和向量是

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m &= \text{diag} \left(-\frac{\partial h(\bar{\mathbf{x}}_2)}{\partial \mathbf{x}_2}, -\frac{\partial h(\bar{\mathbf{x}}_3)}{\partial \mathbf{x}_3}, \dots, -\frac{\partial h(\bar{\mathbf{x}}_L)}{\partial \mathbf{x}_L} \right), \\ \mathbf{B}_m &= [(h(\bar{\mathbf{x}}_2) - y_2)^T, (h(\bar{\mathbf{x}}_3) - y_3)^T, \dots, (h(\bar{\mathbf{x}}_L) - y_L)^T]^T, \\ \mathbf{W}_m &= \text{diag}(\mathbf{R}_2^{-1}, \mathbf{R}_3^{-1}, \dots, \mathbf{R}_L^{-1}). \end{aligned} \quad (17)$$

和递推状态代价函数相关的矩阵和向量是

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{u}_2)}{\partial \mathbf{x}_2} & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}_{L-1}, \mathbf{u}_{L-1})}{\partial \mathbf{x}_{L-1}} & 1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{B}_p = [(f(\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}_1) - \bar{\mathbf{x}}_2)^T, (f(\bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{u}_2) - \bar{\mathbf{x}}_3)^T, \dots, (f(\bar{\mathbf{x}}_{L-1}, \mathbf{u}_{L-1}) - \bar{\mathbf{x}}_L)^T]^T, \quad (19)$$

$$\mathbf{W}_p = \text{diag}(\mathbf{Q}_1^{-1}, \mathbf{Q}_2^{-1}, \dots, \mathbf{Q}_{L-1}^{-1}). \quad (20)$$

与最终代价有关的矩阵和向量是

$$\mathbf{A}_a = [-1, 0, \dots, 0],$$

$$\mathbf{B}_a = [\bar{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_1^0],$$

$$\mathbf{W}_a = (\mathbf{P}_1^0)^{-1}. \quad (21)$$

最后, 与等式约束有关的矩阵和向量是

$$\mathbf{A}_{eq} = \text{diag} \left(\frac{\partial l_1(\bar{\mathbf{x}}_1)}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{\partial l_2(\bar{\mathbf{x}}_2)}{\partial \mathbf{x}_2}, \dots, \frac{\partial l_L(\bar{\mathbf{x}}_L)}{\partial \mathbf{x}_L} \right),$$

$$\mathbf{B}_{eq} = [-l(\bar{\mathbf{x}}_1)^T, -l(\bar{\mathbf{x}}_2)^T, \dots, -l(\bar{\mathbf{x}}_L)^T]^T. \quad (22)$$

将代价函数(14)线性化后可以写成

$$J(\Delta \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{X}^T (\mathbf{A}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{A}_m + \mathbf{A}_p^T \mathbf{W}_p \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_a^T \mathbf{W}_a \mathbf{A}_a) \Delta \mathbf{X} - (\mathbf{A}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{B}_m + \mathbf{A}_p^T \mathbf{W}_p \mathbf{B}_p + \mathbf{A}_a^T \mathbf{W}_a \mathbf{B}_a) \Delta \mathbf{X} + \frac{1}{2} \mathbf{C}$$

$$= \frac{1}{2} [\Delta \mathbf{X}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{X} - 2 \mathbf{M} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{C}], \quad (23)$$

其中, $\mathbf{C}$ 是一个常数矩阵, $\mathbf{M}$, $\mathbf{H}$ 由方程(23)中相应的项确定. 这样就得到一个带有线性约束的最小二乘目标函数. 该非线性规划问题可以通过引入拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\Lambda} = [\lambda_1^T, \lambda_2^T, \dots, \lambda_L^T]$ 和建立如下 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 矩阵来解决:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{A}_{eq}^T \\ \mathbf{A}_{eq} & \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{B}_{eq} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

该优化问题的解是

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}. \quad (26)$$

目前(26)式是求逆过程较复杂, 如果不进行处理, 计算负担较大. 目前主要的方法有迭代和稀疏矩阵方法两种. 本文主要采用稀疏矩阵的方法.

3.3 飞行器的姿态估计

将上文建立的 TAM 与陀螺仪的离散化模型代入 MHE 算法中, 即可得到

$$\min_{\substack{q_1, \dots, q_L \\ \beta_1, \dots, \beta_L}} \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^0 - \mathbf{q}_1 \\ \beta_1^0 - \beta_1 \end{bmatrix} \right\|_{W_a}^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=2}^L \left\| \mathbf{b}_i^m - \mathbf{A}(\mathbf{q}_i) \mathbf{b}_i \right\|_{W_{m,i}}^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \left\| \boldsymbol{\omega}_i^m - \boldsymbol{\omega}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}) - \beta_i \right\|_{W_{v,i}}^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \left\| \beta_{i+1} - \beta_i \right\|_{W_{u,i}}^2, \quad (27a)$$

s.t.

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i - 1 = 0, \quad i = 1, \dots, L, \quad (27b)$$

其中, $\boldsymbol{\omega}_i$ 的计算式见(8)式.

在每步的迭代过程中, 该非线性最小二乘问题都是沿着参考轨迹

$$\mathbf{q}_i = \bar{\mathbf{q}}_i + \Delta \mathbf{q}_i,$$

$$\beta_i = \bar{\beta}_i + \Delta \beta_i. \quad (28)$$

进行线性化来得到线性的最小二乘优化问题, 以使原问题可以通过一次矩阵因式分解求得.

线性化后的代价函数为

$$\min_{\substack{\Delta q_1, \dots, \Delta q_L \\ \Delta \beta_1, \dots, \Delta \beta_L}} \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^0 - \bar{\mathbf{q}}_1 - \Delta \mathbf{q}_1 \\ \beta_1^0 - \bar{\beta}_1 - \Delta \beta_1 \end{bmatrix} \right\|_{W_a}^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=2}^L \left\| \mathbf{b}_i^m - \bar{\mathbf{b}}_i - \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \Delta \mathbf{q}_i \right\|_{W_{m,i}}^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \left\| \boldsymbol{\omega}_i^m - \bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\bar{\mathbf{q}}_i, \bar{\mathbf{q}}_{i+1}) - \bar{\beta}_i - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \Delta \mathbf{q}_i \right.$$

$$\left. - \Delta \beta_i - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{q}_{i+1}} \Delta \mathbf{q}_{i+1} \right\|_{W_{v,i}}^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \left\| \bar{\beta}_{i+1} + \Delta \beta_{i+1} - \bar{\beta}_i - \Delta \beta_i \right\|_{W_{u,i}}^2, \quad (29a)$$

s.t.

$$\bar{\mathbf{q}}_i^T \bar{\mathbf{q}}_i - 1 + 2 \bar{\mathbf{q}}_i^T \Delta \mathbf{q}_i = 0, \quad i = 1, \dots, L, \quad (29b)$$

其中, 部分偏微分为

$$\frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial \mathbf{q}_i}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_1} \mathbf{b}_i & \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_2} \mathbf{b}_i & \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_3} \mathbf{b}_i & \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_4} \mathbf{b}_i \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{q}_i} = -\frac{2}{\Delta T} \boldsymbol{\Xi}^T(\mathbf{q}_{i+1}), \quad (31)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{q}_{i+1}} = \frac{2}{\Delta T} \boldsymbol{\Xi}^T(\mathbf{q}_i). \quad (32)$$

(30) 式中的偏微分可以通过(10)式求解. 在代价函数里 $\bar{\mathbf{b}}$ 是载体坐标系中被估计的参考向量, 可以表示为

$$\bar{\mathbf{b}}_i = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}_i) \mathbf{b}_i. \quad (33)$$

每步迭代之后, 四元数轨迹通过(28)式来更新. 到达代价则借用 EKF 的思想进行更新求解.

综上所述, 基于 MHE 算法的飞行器姿态估计主要步骤为

步骤1 初始化: 给定 $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}_0$, 初始状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 和滚动时域窗口长度 L ;

步骤2 当 $k \leq L$ 时, 求解根据 EKF 更新公式计算当前时刻状态的估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$;

步骤3 当 $k \geq L$ 时, 根据 (24)—(26) 式求解优化问题 (29), 得到优化解 $\Delta \mathbf{x}_k$;

步骤4 根据 (28) 式计算当前时刻的状态估计值 $\bar{\mathbf{x}}_k$;

步骤5 由 EKF 更新公式计算下一时刻先验估计状态 $\mathbf{x}_2^0$ 和误差方差矩阵 $\mathbf{P}_2^0$;

步骤6 在 $k+1$ 时刻, 获得量测 $\mathbf{b}_{k+1}^m$, 构造新的量测数据集, 返回步骤3.

4 TAM的在线校正

TAM 是一种质轻、可靠性高、能量消耗少的传感器. 因此, 大多数微小型低轨卫星采用它作为姿态传感器. 目前大多数文献不考虑 TAM 的在线校正问题, 即假定传感器在线下是校正过后已能够满足精度要求, 如文献 [22, 23]. 而事实上仪器实际工作环境和线下测试时有很大区别, 极端的温度梯度、机械压力、复杂的电磁环境等均对传感器的状态有较大影响 [24]. 尺度因素、零偏、非对准误差等都会有变化, 对姿态精度起着重要的作用. 因此飞行器的另外一个重要目标是能够实时估计传感器误差参数以便校正. 在实际应用中, 综合考虑 TAM 非正交误差、尺度因素误差和零偏误差这三种误差建立如下校正模型:

$$\mathbf{b}_i^m = \mathbf{A}(\mathbf{q}_i)((\mathbf{I} + \mathbf{K})_i \mathbf{b}_i + \mathbf{n}_i) + \mathbf{v}_i, \quad (34)$$

式中

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} s_x & \phi + \alpha & \theta - \gamma \\ -\alpha & s_y & \beta + \psi \\ \gamma & -\beta & s_z \end{bmatrix}, \quad (35)$$

其中, s_x, s_y, s_z 为 TAM 的尺度因素, $\mathbf{n}$ 为零偏, ψ, θ, φ 为非正交误差角. 令

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} + \mathbf{K} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\mathbf{n} = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T. \quad (37)$$

则误差参数向量 δ 为

$$\delta = [D_{11}, \dots, D_{33}, n_1, n_2, n_3]^T. \quad (38)$$

根据模型 (34) 得到如下非线性 MHE 问题:

$$\min_{\substack{q_1, \dots, q_L \\ \beta_1, \dots, \beta_L \\ \delta_1, \dots, \delta_L}} \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^0 - \mathbf{q}_1 \\ \beta_1^0 - \beta_1 \\ \delta_{p1}^0 - \delta_{p1} \end{bmatrix} \right\|_{W_a}^2$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^L \|\mathbf{b}_i^m - \mathbf{A}(\mathbf{q}_i)(\mathbf{D}_i \mathbf{b}_i + \mathbf{n}_i)\|_{W_{m,i}}^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \|\boldsymbol{\omega}_i^m - \hat{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}) - \beta_i\|_{W_{v,i}}^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \|\beta_{i+1} - \beta_i\|_{W_{u,i}}^2, \end{aligned} \quad (39)$$

其中

$$\delta_i = \bar{\delta}_i + \Delta \delta_i. \quad (40)$$

5 仿真验证

为了验证方法的有效性, 以 TAM 和陀螺仪为姿态测量敏感器, 进行了蒙特卡洛仿真. TAM 的采样周期为 1 s, 采用 10 阶全球地磁场模型 (IGRF) 来近似地磁场分布, 并假设 TAM 的量测噪声为均值为 0、标准差为 50 nT 的高斯白噪声. 陀螺仪噪声特性为 $\sigma_v = 1.4 \mu\text{rad/s}^{1/2}$, $\sigma_u = 1.3 \mu\text{rad/s}^{3/2}$. 仿真时间为 1000 s. 建立了关于三轴姿态均方根误差 (RSS) 指标来描述算法总体性能.

5.1 不考虑校正

为了分析算法性能, 在初始姿态误差比较小和比较大以及不同窗口长度情况下, 分别采用 EKF, UKF 与 MHE 来估计飞行器的三轴姿态, 并对这几种算法进行了性能分析.

5.1.1 不同窗口长度对算法性能的影响

考虑到窗口长度是计算精度与计算量的折中, 太小会引起发散, 太大则计算时间过长, 建议首先尝试窗口长度 L 分别设为 6, 12, 18, 24. 设飞行器初始姿态误差角为 $[1 \ 1 \ 2]^T \text{ deg}$, 初始方差阵为 $(0.5^0)^2 \mathbf{I}_{3 \times 3}$. 无初始陀螺漂移误差, 初始陀螺漂移方差为 $(0.2^0/h)^2 \mathbf{I}_{3 \times 3}$.

下图为不同窗口长度下姿态估计误差. 从图 2 可以看出, 当 $L = 6$ 时, MHE 算法不能收敛; 当 $L = 12$ 时, MHE 算法收敛, 但精度没有 $L = 18$ 和 $L = 24$ 时高; 而 $L = 18$ 与 $L = 24$ 时算法精度没有太大差别, 因此在实际应用中因综合考虑计算负担与精度选取窗口长度.

实际上, Rao 和 Rawlings 已经证明了 MHE 的稳定性 [25], 同时提出时域的长度 L 不应该比系统状态的个数少, 否则将不能保证算法稳定性. 建议选择系统阶数的 2—3 倍作为时域长度 [13]. 本文中

的结果与该准则基本吻合, 因此选择 $L = 18$ 较为合理, 下文仿真环境均设 $L = 18$.

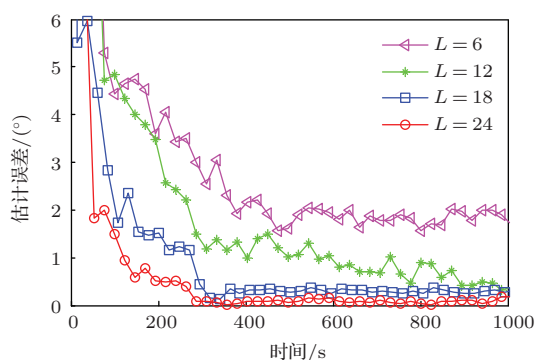


图2 (网刊彩色) 不同窗口长度下的姿态估计误差
Fig. 2. (color online) Attitude estimation errors for different window length.

5.1.2 不同初始姿态误差对算法性能的影响

设计较大初始误差和较小初始误差的条件进行仿真对比EKF, UKF, MHE三种算法的性能.

仿真环境1 设飞行器初始姿态误差角为 $[1 \ 1 \ 2]^T$ deg, 初始姿态方差阵为 $(0.5^\circ)^2 \mathbf{I}_{3 \times 3}$. 无初始陀螺漂移误差, 初始陀螺漂移方差为 $(0.2^\circ/h)^2 \mathbf{I}_{3 \times 3}$;

仿真环境2 设飞行器初始姿态误差角为 $[10 \ 10 \ 20]^T$ deg, 初始姿态方差阵为 $(5^\circ)^2 \mathbf{I}_{3 \times 3}$; 无初始陀螺漂移误差, 初始陀螺漂移方差为 $(2^\circ/h)^2 \mathbf{I}_{3 \times 3}$.

在初始姿态误差角较小角度时, 如图3所示, EKF, UKF 算法虽然精度低于MHE算法, 估计误差也都不太大. 在这种情况下, 由于MHE具有较大的计算量, 因此并不占优势.

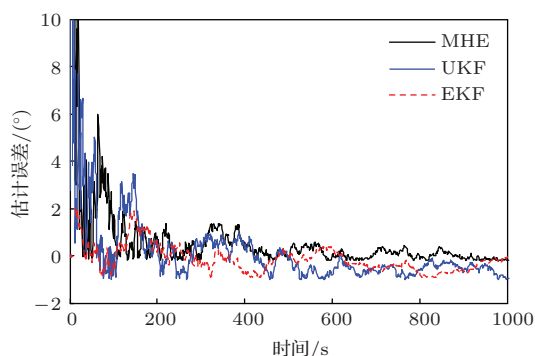


图3 (网刊彩色) 较小初始姿态误差下的姿态估计误差
Fig. 3. (color online) Attitude estimation errors of small initial attitude errors.

但当初始姿态误差角较大时, 如图4所示, EKF 算法滤波精度下降很快. 这是由于在大角

度较强非线性的情况下, EKF 算法的高阶截断误差对滤波精度和稳定性都产生很大的影响. UKF 虽然能够收敛, 但收敛速度及精度远不及MHE.

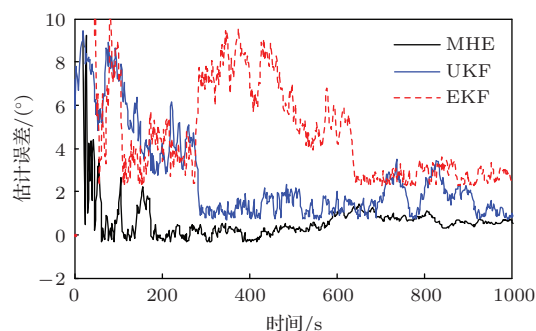


图4 (网刊彩色) 较大初始姿态误差下的姿态估计误差
Fig. 4. (color online) Attitude estimation errors of large initial attitude errors.

5.2 考虑校正

本节仿真参数的设置同5.1.2节中的仿真环境1. 在有系统误差的情况下, EKF, UKF 和MHE 三种算法姿态估计误差见下表1, 系统的误差参数真实值以及估计值见表2. 从结果可以看出, 由于MHE算法是采用过去的一组批量数据, 因此估计误差较EKF, UKF 更高.

表1 不同滤波器下均方根姿态误差
Table 1. RMS attitude errors of different filters.

滤波器	EKF	UKF	MHE
RMS/($''$)	78	41	35

表2 TAM 真实参数误差和MHE 估计值
Table 2. TAM calibration truth error parameter and the estimation results for MHE.

	零偏/nT	尺度因素误差	非正交因素/($^\circ$)
真实值	0.10	0.01	0.17
	-0.20	-0.01	-0.28
	0.30	0.01	0.54
估计值	0.099	0.009	0.174
	-0.201	-0.008	-0.278
	0.298	0.009	0.551

6 结 论

本文通过设计一种滚动时域估计算法, 将状态估计问题转化为优化问题. 利用优化问题在求解约束方面的优势, 显式求解了四元数归一化性质, 省

去了以往滤波算法每次迭代过程中的暴力约束, 减少了计算量, 提高了精度. 同时为了满足实时性要求, 窗内采用高斯-牛顿迭代法, 减少了寻优时间. 此外由于TAM在工作时地面校正参数不再适用, 因此提出TAM的在线校正问题. 利用以建立好的MHE算法, 在姿态估计的同时在线求解校正参数. 这样不会新增加系统状态维数, 并且TAM仍可以以矢量的形式作为观测值, 保证了姿态估计的信息量. 仿真结果表明, 该方法具有一定的鲁棒性, 对系统误差、初始误差均不敏感, 精度更高.

参考文献

- [1] Goldenberg F 2006 *Proceedings of IEEE/ION PLANS* San Diego, Canada, April 25–27, 2001 p684
- [2] BarI I Y, Harman R R 1997 *Gu. Contr. Dyn.* **20** 208
- [3] Markley F 1989 *Acta Astro. S.* **37** 41
- [4] Chen W D, Liu Y L, Zhu Q G, Chen Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **17** 105 (in Chinese) [陈卫东, 刘要龙, 朱奇光, 陈颖 2013 物理学报 **17** 105]
- [5] Sheng Z 2011 *Acta Phys. Sin.* **11** 820 (in Chinese) [盛峥 2011 物理学报 **11** 820]
- [6] Zhao L 2012 *Acta Phys. Sin.* **10** 231 (in Chinese) [赵龙 2012 物理学报 **10** 231]
- [7] Huang X Y, Wang J M 2014 *IEEE Veh. Techn.* **63** 4221
- [8] Wu X D, Song Z H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3241
- [9] Liu Y, Wang H, Hou C H 2013 *IEEE Sign. Proc.* **61** 4988
- [10] Zu T Z, Jia S Z 2010 *Chin. Phys. B* **19** 104601
- [11] Canale M, Fagiano L, Novara C 2014 *IEEE Contr. Syst. Techn.* **22** 2048
- [12] Tor A J, Dan S, Roar N 2013 *IEEE Contr. Syst. Techn.* **21** 2114
- [13] Rao C V, Rawlings J B, Mayne D Q 2003 *IEEE Aut. Contr.* **48** 246
- [14] Jyh C J, Yung F T, Chiu T T 2012 *Aero. Sci. Techn.* **21** 47
- [15] Inamori T, Nakasuka S, Sako N 2009 *Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference* Chicago, USA, August 10–13, 2009 p1
- [16] John C S, James W C 2012 *IEEE Gu. Contr. Dyn.* **35** 1080
- [17] John L C, Kok L L 2005 *IEEE Gu. Contr. Dyn.* **28** 115
- [18] Vasconcelos J F, Elkaim G, Silvestre C 2011 *IEEE Aero. El. Syst.* **47** 1293
- [19] Wu Z W, Yao M L, Ma H G 2013 *IEEE Veh. Techn.* **62** 1084
- [20] Wertz J R 2012 *Spacecraft attitude determination and control* (Vol. 73) (Berlin: Springer Science & Business Media) p342–345
- [21] Marsden J E, West M 2001 *Acta Num.* **10** 357
- [22] Zhao H Y 2007 *Ph. D. Dissertation* (Changchun: Jilin University) (in Chinese) [赵海燕 2007 博士学位论文 (长春: 吉林大学)]
- [23] Pang H, Li J, Chen D 2013 *Measurement* **46** 1600
- [24] Alonso R, Shuster M D 2002 *IEEE Astro. S.* **50** 477
- [25] Rao C V, Rawlings J B 2002 *IEEE Aich. E.* **48** 97

Attitude estimation and three-axis magnetometer on-line calibration based on moving horizon estimation*

Zhao Guo-Rong¹⁾ Huang Jing-Li^{1)†} Su Yan-Qin¹⁾ Sun Cong²⁾

1) (Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China)

2) (Naval Unit 91980, Yantai 264001, China)

(Received 12 May 2015; revised manuscript received 22 June 2015)

Abstract

According to the attitude estimation and three-axis magnetometer on-line calibration, a real time moving horizon estimation algorithm is presented in this paper. First, moving horizon estimation filter is designed since system constraints existing in most practical cases cannot be solved analytically in the framework of Kalman filter. Taking advantage of the optimal problem in dealing with constraints, the presented method converts the attitude estimation problem into an optimal one by which the quaternion normalization property can be solved analytically in smaller searching space with better efficiency and accuracy. Second, through a series of linearization of system equations, Gauss-Newton iterative method is applied in the horizon window composed of finite history information to obtain the best state estimation and meet the real time requirement at the same time. Once the newest best state estimation value is obtained, it will be sacked into the horizon window and the oldest one discarded. By this way, the filter is moving forward. Finally, based on the proposed method, the three-axis magnetometer parameter on-line calibration combined with attitude estimation is solved without adding any system state dimension, which can also make sure that the measurements with three-axis magnetometer are in the form of vector as its obvious benefits in the sense of ensuring information quantity. On considering the extreme environment such as great temperature gradient, mechanical pressure and complex electromagnetic fields, different from that of the off-line calibration, the calibration parameter is changed definitely. So the on-line calibration is necessary though neglected by most papers. Simulation results show that under the condition of small initial errors, the difference of accuracy among EKF, UKF and moving horizon estimation is small. But the computational burden of the last one is relatively large. The advantage of the described method is not so obvious in this case. But when the initial errors are large, the moving horizon estimation still can get the precise results no matter how great are the EKF (extended Kalman filter) and UKF (unscented Kalman filter) deviated from the true values. Thus the proposed method has its high accuracy and poor sensitivity of the initial and systematic errors along with fast convergence, all of which are vital in most actual environments.

Keywords: attitude estimation, moving horizon estimation, three-axis magnetometer, on-line calibration

PACS: 05.45.-a, 02.60.Pn, 07.55.Ge

DOI: 10.7498/aps.64.210502

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61372027, 61473306).

† Corresponding author. E-mail: huangjingli_hy@163.com