物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

事件空间中完整力学系统的梯度表示

吴惠彬　梅凤翔

A gradient representation of holonomic system in the event space

Wu Hui-Bin　Mei Feng-Xiang

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 234501 (2015)　DOI: 10.7498/aps.64.234501
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.234501
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I23

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 64, No. 23 (2015) 234501

事件空间中完整力学系统的梯度表示*

吴惠彬[1)†] 梅凤翔[2)]

1) (北京理工大学数学学院, 北京 100081)

2) (北京理工大学宇航学院, 北京 100081)

(2015 年 6 月 1 日收到; 2015 年 8 月 4 日收到修改稿)

本文研究事件空间中完整力学系统的梯度表示和分数维梯度表示, 建立系统的微分方程并将其表示为一阶形式, 给出系统成为梯度系统的条件以及成为分数维梯度系统的条件. 最后, 举例说明结果的应用.

关键词: 完整系统, 事件空间, 梯度, 分数维动力学

PACS: 45.20.Jj, 11.30.–j **DOI:** 10.7498/aps.64.234501

1 引 言

Synge在他的著作中研究了各种空间, 包括事件空间中的完整保守系统动力学[1]. 这种研究不仅有几何意义, 而且有力学意义. Rumyatsev将这一思想发展, 得到事件空间中非完整系统带乘子的参数方程[2]. 有关事件空间中的动力学研究已取得重要进展[2−13]. 近年来, 分数维动力学已在理论物理, 力学和应用数学等诸多领域得到应用. 文献[14]指出, 任意阶$\beta \neq 1$ (包括β为整数)的梯度系统都称为分数维的. 书中研究了Lorenz方程, Rössler系统, 证明它们都是阶$\beta = 2$的分数维梯度系统. 文献[15]指出, Hamilton系统和梯度系统是微分方程和动力系统中两类重要系统. 有关梯度系统的研究正受到越来越多的关注, 并且已经取得重要进展[16−21]. 本文研究事件空间中完整力学系统的梯度表示和分数维梯度表示.

2 事件空间中完整系统的运动微分方程

假设力学系统受有双面理想完整约束, 其位形由n个广义坐标$q_s(s = 1, 2, \cdots, n)$来确定. 建立$n + 1$维扩充的位形空间, 即事件空间. 对此空间中点的坐标$q_s(s = 1, 2, \cdots, n)$和时间t引入记号

$$x_s = q_s, x_{n+1} = t, \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{1}$$

那么所有变量$x_\alpha(\alpha = 1, 2, \cdots, n + 1)$可作为某参数$\tau$的已知函数. 当然, t的位置亦可选在别的$x_\alpha(\alpha \neq n + 1)$. 令$x_\alpha = x_\alpha(\tau)$是$C^2$类曲线, 使得

$$\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = x'_\alpha, \tag{2}$$

不同时为零, 则有

$$\dot{x}_\alpha = \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{x'_\alpha}{x'_{n+1}}. \tag{3}$$

对位形空间中给定的Lagrange函数$L = L(q_s, t, \dot{q}_s)$, 事件空间中参数形式的Lagrange函数为[2]

$$\Lambda(x_\alpha, x'_\alpha) = x'_{n+1} L\left(x_1, \cdots, x_{n+1}, \frac{x'_1}{x'_{n+1}}, \cdots, \frac{x'_n}{x'_{n+1}}\right). \tag{4}$$

对位形空间中给定的非势广义力$Q_s = Q_s(q_k, t, \dot{q}_k)$, 事件空间中的广义力由下式确定[3]:

$$P_s(x_\alpha, x'_\alpha) = x'_{n+1} Q_s\left(x_1, \cdots, x_{n+1}, \frac{x'_1}{x'_{n+1}}, \cdots, \frac{x'_n}{x'_{n+1}}\right),$$

---

* 国家自然科学基金 (批准号: 10932002, 11272050) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: huibinwu@bit.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

$$P_{n+1}(x_\alpha, x'_\alpha) = -Q_s x'_s. \tag{5}$$

事件空间中一般完整系统的运动微分方程为[8]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} = P_\alpha,$$
$$(\alpha = 1, 2, \cdots, n+1). \tag{6}$$

(6) 式中 $n+1$ 个方程不是彼此独立的, 因为有

$$x'_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} - P_\alpha\right) = 0. \tag{7}$$

下面研究方程 (6) 不含 x_{n+1} 的情形. 因为参数 τ 可任意选取[2], 当方程中不出现 x_{n+1} 时取 $x_{n+1} = \tau$ 会带来方便, 此时有

$$\frac{x'_s}{x'_{n+1}} = \frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}x_{n+1}} = \frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}\tau},$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x'_s}{x'_{n+1}}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 x_s}{\mathrm{d}x_{n+1}^2}x'_{n+1} = \frac{\mathrm{d}^2 x_s}{\mathrm{d}\tau^2},$$
$$(s = 1, 2, \cdots, n). \tag{8}$$

这样, (6) 式的前 n 个方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_s}{\mathrm{d}\tau^2} = f_s\left(x_k, \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}\tau}\right),$$
$$(s, k = 1, 2, \cdots, n). \tag{9}$$

取记号

$$a^{\mu\cdot} = \frac{\mathrm{d}a^\mu}{\mathrm{d}x_{n+1}} = \frac{\mathrm{d}a^\mu}{\mathrm{d}\tau}. \tag{10}$$

则方程 (9) 可表示为一阶形式

$$a^{\mu\cdot} = F_\mu(\boldsymbol{a}), \quad (\mu = 1, 2, \cdots, 2n), \tag{11}$$

其中

$$a^s = x_s, \quad a^{n+s} = a^{s\cdot}, \quad F_s = a^{n+s},$$
$$F_{n+s} = f_s, (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{12}$$

当然, 也可选 $x_\alpha = \tau(\alpha \neq n+1)$, 如文献 [3] 那样.

3 系统的梯度表示

一般地, 方程 (11) 不是一个梯度系统, 仅在一定条件下才能成为梯度系统. 对此有如下结果:

命题 1 对系统 (11), 若满足如下条件

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial a^\nu} - \frac{\partial F_\nu}{\partial a^\mu} = 0, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n), \tag{13}$$

则它是一个梯度系统. 此时, 可求得势函数 $V = V(\boldsymbol{a})$ 使得

$$F_\mu = -\frac{\partial V}{\partial a^\mu}. \tag{14}$$

4 系统的分数维梯度表示

一般地, 方程 (11) 不是一个分数维梯度系统, 仅在一定条件下才能成为分数维梯度系统. 对此有如下结果:

命题 2 对系统 (11), 若满足如下条件

$$\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial(a^\nu)^2} - \frac{\partial^2 F_\nu}{\partial(a^\mu)^2} = 0,$$
$$(\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n). \tag{15}$$

则它是一个阶 $\beta = 2$ 的分数维梯度系统. 此时, 可求得势函数 $V = V(\boldsymbol{a})$ 使得

$$F_\mu = -\frac{\partial^2 V}{\partial(a^\mu)^2}, \quad (\mu = 1, 2, \cdots, 2n). \tag{16}$$

5 算 例

例 1 二自由度完整系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2),$$
$$Q_1 = -\dot{q}_2, \quad Q_2 = \dot{q}_1.$$

在事件空间中, 有

$$\Lambda = x'_3\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x'_1}{x'_3}\right)^2 + \left(\frac{x'_2}{x'_3}\right)^2\right] + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right\},$$
$$P_1 = -x'_3\frac{x'_2}{x'_3} = -x'_2, \quad P_2 = x'_1.$$

方程 (9) 给出

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}x_3^2} = x_1 - \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_3},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}x_3^2} = x_2 + \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_3},$$

方程 (11) 给出

$$a^{1\cdot} = a^3, \quad a^{2\cdot} = a^4,$$
$$a^{3\cdot} = a^1 - a^4, \quad a^{4\cdot} = a^2 + a^3.$$

容易验证, 条件 (13) 不满足. 因此, 它不是一个梯度系统. 但是, 条件 (15) 满足. 因此, 它是一个阶 $\beta = 2$ 的分数维梯度系统. 利用 (16) 式可求得势函数

$$V = -\frac{1}{2}a^3(a^1)^2 - \frac{1}{2}a^4(a^2)^2 - \frac{1}{2}(a^1 - a^4)(a^3)^2$$
$$-\frac{1}{2}(a^2 + a^3)(a^4)^2.$$

例 2 在例 1 中, 设 $Q_1 = Q_2 = 0$. 此时, 方程 (11) 给出

$$a^{1\cdot} = a^3, \quad a^{2\cdot} = a^4, \quad a^{3\cdot} = a^1, \quad a^{4\cdot} = a^2.$$

容易看出, 条件(13)满足. 因此, 这是一个梯度系统. 根据梯度系统在任一平衡点处的线性化系统只有实特征根的重要性质, 可知零解 $a^1 = a^2 = a^3 = a^4 = 0$ 是不稳定的.

6 结 论

本文研究了事件空间中完整力学系统的梯度表示以及分数维($\beta = 2$)梯度表示. 事件空间比位形空间更广泛. 因此, 位形空间的结果是本文的特殊情形. 如果原系统能成为梯度系统, 那么可根据梯度系统的重要性质, 来研究原系统的稳定性, 如例2. 一般地, 分数维梯度系统还不是通常的梯度系统.

参考文献

[1] Synge J L 1960 *Classical Dynamics* (Berlin: Springer-Verlag)

[2] Rumyatsev V V 1984 *P. M. M.* **48** 540 (in Russian)

[3] Mei F X 1990 *Acta Mech. Sin.* **6** 160

[4] Li Y C, Zhang Y, Liang J H 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 543

[5] Fang J H 2002 *Appl. Math. Mech.* **23** 89

[6] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W 2005 *Chin. Phys.* **14** 888

[7] Jia L Q, Zhang Y Y, Luo S K 2007 *Chin. Phys.* **16** 3168

[8] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京: 北京理工大学出版社)]

[9] Zhang Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4365

[10] Zhang Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2643 (in Chinese) [张毅 2008 物理学报 **57** 2643]

[11] Zhang Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080301

[12] Zhang B, Fang J H, Zhang W W 2012 *Chin. Phys. B* **21** 070208

[13] Zhang X W, Li Y Y, Zhao X X, Luo W F 2014 *Chin. Phys. B* **23** 104501

[14] Tarasov V E 2010 *Fractional Dynamics* (Beijing: Higher Education Press)

[15] Hirsch M W, Smale S, Devaney R L 2008 *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos* (Singapore: Elsevier)

[16] Quispel G RW, Capel H W 1996 *Physics Letters A* **218** 223

[17] Quispel G RW, Turner G S 1996 *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** L341

[18] Hong J L, Zhai S X, Zhang J J 2011 *S IA M J. Numer. Anal.* **49** 2017

[19] Mei F X, Wu H B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 214501 (in Chinese) [梅凤翔, 吴惠彬 2013 物理学报 **62** 214501]

[20] Ge W K, Xue Y, Lou Z M 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 110202 (in Chinese) [葛伟宽, 薛纭, 楼智美 2014 物理学报 **63** 110202]

[21] Mei F X, Wu H B 2015 *Chin. Phys. B* **24** 054501

A gradient representation of holonomic system in the event space*

Wu Hui-Bin[1)†] Mei Feng-Xiang[2)]

1) (School of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

2) (School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(Received 1 June 2015; revised manuscript received 4 August 2015)

Abstract

The dynamics research in the event space has important geometric and mechanical meanings, and great progress has been made in this field. A gradient system is a kind of important systems in differential equations and dynamical systems, and is receiving more and more attention. In this paper, a gradient representation and a fractional gradient representation of a holonomic system in the event space are studied. First, the differential equations of motion for the system are established and expressed in the first order form. Second, we have obtained the condition under which the system can be considered as a gradient system and also the condition under which the system can be considered as a fractional gradient system. When a constrained mechanical system is transformed into a gradient system or a fractional gradient system, one can use the properties of the gradient system or the fractional gradient system to study the integration and the stability of a constrained mechanical system. Finally, two examples are given to illustrate the application of the results. The event space is known as more extensive than the configuration space, therefore, the result in the configuration space is a special case of this paper.

Keywords: holonomic system, event space, gradient, fractional dynamics

PACS: 45.20.Jj, 11.30.–j **DOI:** 10.7498/aps.64.234501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10932002, 11272050).

† Corresponding author. E-mail: huibinwu@bit.edu.cn