

转子耦合摆系统的同步行为理论研究

方潘 侯勇俊 张丽萍 杜明俊 张梦媛

Synchronous behavior of a rotor-pendulum system

Fang Pan Hou Yong-Jun Zhang Li-Ping Du Ming-Jun Zhang Meng-Yuan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 014501 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.014501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.014501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I1>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于 Coulomb 摩擦效应的一类非线性相对转动系统的混沌研究

Chaos of a kind of nonlinear relative rotation system based on the effect of Coulomb friction

物理学报.2015, 64(6): 064501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.064501>

一类含三势阱 Mathieu-Duffing 振子的相对转动系统的分岔和混沌

Bifurcation and chaos of some relative rotation system with triple-well Mathieu-Duffing oscillator

物理学报.2014, 63(17): 174502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.174502>

一类两自由度参激系统在常数激励下的响应研究

Constant-excitation caused response in a class of parametrically excited systems with two degrees of freedom

物理学报.2014, 63(13): 134501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.134501>

一类含时变间隙的强非线性相对转动系统分岔和混沌

Bifurcation and chaos of some strongly nonlinear relative rotation system with time-varying clearance

物理学报.2014, 63(7): 074501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.074501>

一类含 Mathieu-Duffing 振子的相对转动系统的分岔和混沌

Bifurcation and chaos in some relative rotation systems with Mathieu-Duffing oscillator

物理学报.2013, 62(23): 234501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.234501>

转子耦合摆系统的同步行为理论研究*

方潘¹⁾ 侯勇俊^{1)†} 张丽萍¹⁾ 杜明俊¹⁾ 张梦媛²⁾

1)(西南石油大学机电工程学院, 成都 610500)

2)(中国石油大学(北京) 地球科学学院, 北京 102249)

(2015年6月8日收到; 2015年8月21日收到修改稿)

转子耦合摆系统广泛应用于航空动力装置、矿业筛分机械和并联机器人等高速旋转设备. 但是对转子耦合摆系统同步行为(稳定相位差值)研究甚少, 系统同步行为通常影响系统的工作执行精度. 基于这一特殊背景, 提出了转子与摆耦合系统的简化物理模型. 利用庞加莱法研究转子耦合摆系统的同步问题, 进一步揭示了该类系统同步现象的本质机理. 首先运用拉格朗日方程建立了转子同向和反向旋转的系统动力方程, 随后将系统动力方程转换为无量纲方程. 然后利用拉普拉斯法对无量纲方程解耦, 计算出了系统各个自由度的近似稳态响应解. 继而采用庞加莱法导出了系统实现同步的平衡方程和稳定准则. 只有系统的物理参数同时满足系统同步平衡方程和稳定准则时, 系统才能实现稳定的同步行为. 通过理论研究发现, 系统的同步行为主要受弹簧刚度、摆杆安装倾角和转子旋转方向的影响. 同时系统同步“临界点”会造成相位差角无解, 导致系统动态特性表现为混沌. 最后, 使用计算机模拟验证了理论计算的正确性, 两者的结果相符.

关键词: 转子, 摆杆, 稳定性, 同步行为**PACS:** 45.20.dc, 45.40.-f, 45.40.Bb**DOI:** 10.7498/aps.65.014501

1 引言

“同步现象”广泛存在于自然和日常生活中, 所谓的自同步现象是指振动系统依靠自身较弱的耦合特性调节子系统频率, 使子系统频率协调统一^[1,2]. 近年来, 同步现象的研究主要涉及物理、生物、化学和社会等领域, 例如复杂的网络系统^[3-5]、非线性耦合混沌系统^[6,7]、耦合摆系统^[8-12]和耦合转子系统^[1,13-19]. 对耦合摆系统同步研究, 最早可以追溯到1665年, 惠更斯发现了钟摆反相同步的现象. 在现代的分析计算中, 文献^[8, 9]考虑到了弹簧刚度的差异对同步行为的影响, 并且对惠更斯钟摆同相和反相自同步做了研究. 与此同时, 惠更斯钟摆衍生模型, 如两个耦合双摆^[10]、弹性力作用下的耦合摆^[11]和由线性弹簧连接的耦合摆^[12], 吸引了众多国内外学者的关注. 另一方面对转子同

步行为的研究, 最早是由俄罗斯Blekhman教授^[1]提出的庞加莱法, 现今, 该方法依旧广泛应用于现代工程设计. 在Blekhman方法的基础上, 许多科学家提出了其他的方法来研究转子的同步性. Wen等^[13]提出了均值法来计算多个耦合转子的同步性和稳定性. 随后, Zhao等^[14,15]提出了小参数修正平均值法, 极大地简化了转子系统同步问题的求解过程. Sperling等^[16]采用了数值法研究了一种双平面自动平衡转子系统的同步问题. Balthazar等^[17,18]利用数值仿真分析了非线性振动系统中四个非理想的激振器的同步行为. Djanan等^[19]研究了三个转子耦合板同步行为问题, 发现系统同步行为取决于电机和矩形板的物理结构特性.

上述研究主要针对耦合摆系统或转子系统自同步性, 目前国内外学者对摆耦合转子系统同步行为的研究较少. 转子耦合摆系统在航空动力装置、并联机器人和矿业筛分机械等领域的应用是非常

* 国家自然科学基金(批准号: 51074132)和四川省科技创新苗子工程重点项目(批准号: 2016RZ0059)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yongjunhou@126.com

重要的. 直升机桨叶与轮毂(转子)的动力耦合就是一个典型的转子耦合摆系统^[20]. 由于轮毂的高速旋转, 可能导致桨叶发生弯曲和扭转振动, 所以研究这类系统动力特性时通常将一片桨叶视为一根弯曲梁或者若干个串联的摆杆^[20,21]. Warminski等^[22]将直升机的一片桨叶简化为一个单摆, 研究了多片桨叶耦合轮毂(转子)的同步和分叉行为. 又如并联高速切削机器人系统由多个高速旋转的刀盘和机械手臂, 高速旋转的刀盘切削工件时, 柔性的机械手臂发生弯曲振动, 通常研究这类系统同步行为时将机械手臂和刀盘分别视为摆杆和转子, 而机械手臂之间的同步行为影响着工件的加工精度^[23]. 在矿业筛分机械应用中, Hou和Zhang^[24]提出平行轴双激振电机椭圆振动机, 振动机中的一个激振电机安装于振动体上, 另一个固定于摆杆的末端, 同时摆杆与振动体由线性的扭转弹簧连接, 它是另一种典型的转子耦合摆系统. 随后, Fang等^[25]对该转子耦合摆结构处于超共振状态的同步行为做了理论研究, 但忽视了弹簧刚度、摆杆安装倾角和转子反向旋转等因素对系统同步行为的影响. 基于庞加莱法, 本文对相关系统同步行为理论做了延续性的研究. 通过研究发现, 系统的同步行为主要由弹簧刚度、摆杆安装倾角和转子旋转方向决定.

2 理论及模型

2.1 基本理论

假设旋转系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} J_i \ddot{\varphi}_i &= \mu \Phi_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_i, x, \dot{x}, \ddot{x}) \\ (i &= 1, 2, \dots, k), \\ \ddot{x} + 2\omega_x \xi_x \dot{x} + \omega_x^2 x &= \sum_{i=1}^k F_i(\omega t, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \end{aligned} \quad (1a)$$

$$+ \sum_{i=1}^k \mu F_{i+1}(\omega t, \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (1b)$$

式中,

$$\mu \Phi_i = M_{ei}(\dot{\varphi}) - R_{ei}(\dot{\varphi}) - f_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_i, x, \dot{x}, \ddot{x});$$

μ 为小参数; J_i , M_{ei} 和 R_{ei} 分别为第 i 个电机轴的转动惯量、电磁转矩和机械阻尼矩; ξ_x 为系统 x 方向的阻尼系数; ω_x 为系统在 x 方向的自然频率; φ_i , $\dot{\varphi}_i$, $\ddot{\varphi}_i$ 分别为第 i 个转子的相位角、转子的机械转速和转子的加速度; x , $\dot{x}$, $\ddot{x}$ 分别为振动质体的位移、速度和加速度; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 分别为第 $1, 2, \dots, k$ 个转子的初相位.

根据文献^[1]和(1)式, 振动系统的转子同步行为可以按如下步骤分析.

1) 在周期 $T = 2\pi/\omega$ 内, 忽略小参数项的影响(即假设(1b)式中 $\mu = 0$), 假设振动体的强迫稳态振动响应为

$$x = x(\omega t, \alpha_1, \dots, \alpha_k). \quad (2)$$

设转子的初相位为 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, 那么转子的相位角

$$\varphi_i = (\omega t + \alpha_i). \quad (3)$$

2) 假设(3)式中参数 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 各自对应一个常数值, 满足方程

$$P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \langle \mu \Phi_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_i, x, \dot{x}, \ddot{x}) \rangle = 0. \quad (4)$$

式中的方括号 $\langle * \rangle$ 代表在一个周期内对 $*$ 关于时间 t 积分然后取平均, 即

$$\langle * \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T * dt, \quad (5)$$

式中符号 $*$ 是关于时间 t 的函数.

3) 如果参数 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 的一组常数值满足(4)式, 且代数方程

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(P_1 - P_k)}{\partial \alpha_1} - \chi & \frac{\partial(P_1 - P_k)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial(P_1 - P_k)}{\partial \alpha_{k-1}} \\ \frac{\partial(P_2 - P_k)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial(P_2 - P_k)}{\partial \alpha_2} - \chi & \dots & \frac{\partial(P_2 - P_k)}{\partial \alpha_{k-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial(P_{k-1} - P_k)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial(P_{k-1} - P_k)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial(P_{k-1} - P_k)}{\partial \alpha_{k-1}} - \chi \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

(6) 式中的所有 χ 的根实部为负, 那么在 μ 足够小的情况下 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 这组常值是惟一的, 这时方程 (1) 存在渐近稳定周期解. 如果 χ 至少存在一个根的实部为正的, 那么相应的解是不稳定的. 如果 χ 至少存在一个根的实部为零, 周期解的稳定性可以利用中心流形定理判定.

2.2 物理模型

转子摆杆耦合系统的力学模型如图 1 所示, 该模型由一质量为 m_0 [kg] 的刚性振动体和两个质量为 m_i [kg] ($i = 1, 2$) 的偏心转子构成, 偏心转子由异步电机驱动. 刚性振动体由线性弹簧与基座连接, 弹簧的弹性系数为 k_x [N/m], 阻尼常数为 f_x [N·s/m]; 偏心转子考虑为一个质点, 质点到电机中心轴的距离为 r [m]. 系统中的一个激振电机安装于振动体上, 而另一个则固定在摆杆的末端, 摆杆与振动体由线性的扭转弹簧连接, 弹簧的刚度和阻尼系数分别为 k_φ [N/rad] 和 f_φ [Nm/(rad/s)]. 设第 i 个转子的转角为 $\varphi_i \in S^1$ ($i = 1, 2$) [rad]; 摆杆的振动角为 $\varphi_3 \in S^1$ [rad]; 摆杆的安装角为 $\beta \in S^1$ [rad]; x 为振动质体在水平方向的位移 [m].

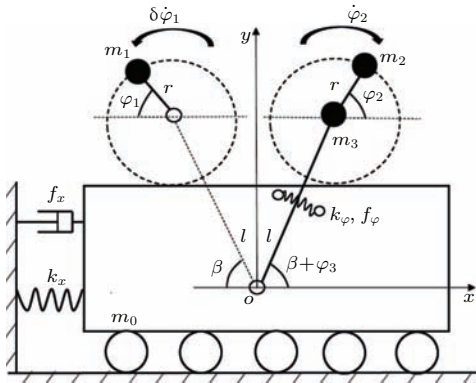


图 1 简化物理模型

Fig. 1. Simplified physical model.

根据系统动力学理论, 系统的总动能为

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 [(\dot{x} + \delta r \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1)^2 + (r \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1)^2] + \frac{1}{2} m_2 [(\dot{x} - r \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 - l \dot{\varphi}_3 \sin(\beta + \varphi_3))^2 + (r \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + l \dot{\varphi}_3 \cos(\beta + \varphi_3))^2] + \frac{1}{2} m_3 [(\dot{x} - l \dot{\varphi}_3 \sin(\beta + \varphi_3))^2 + (l \dot{\varphi}_3 \cos(\beta + \varphi_3))^2] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \dot{\varphi}_i^2; \quad (7)$$

同时, 系统总势能为

$$V = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_\varphi \varphi_3^2; \quad (8)$$

另外, 系统总耗散能为

$$D = \frac{1}{2} f_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} f_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} f_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} f_3 \dot{\varphi}_3^2. \quad (9)$$

利用拉格朗日方程建立系统的动力学方程, 拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q} = Q_i, \quad (10)$$

取 $q = \{x, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ 为系统的广义坐标, 则广义力为 $Q_x = Q_{\varphi_3} = 0$, $Q_{\varphi_1} = M_{e1} - R_{e1}$, $Q_{\varphi_2} = M_{e2} - R_{e2}$. 因为系统的参数满足 $m_1 \ll m_0$, $m_2 \ll m_0$, 所以转子和摆杆的不对称造成的惯性耦合可以忽略不计. 将方程 (7), (8) 和 (9) 代入方程 (10), 同时考虑 $\sum_{k=0}^3 m_k = M$, $m_1 = m_2 = m$, $J_1 + m_1 r^2 = m r^2$, $J_3 + m_2 l^2 + m_3 l^2 \approx m l^2 + m_3 l^2$, 系统的动力学方程表示为

$$M \ddot{x} + f_x \dot{x} + k_x x = -\delta m r (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) + m r (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2) + (m l + m_3 l) (\ddot{\varphi}_3 \sin \beta + \dot{\varphi}_3^2 \cos \beta), \quad (11a)$$

$$m r^2 \ddot{\varphi}_1 = M_{e1} - R_{e1} - \delta m r \ddot{x} \sin \varphi_1, \quad (11b)$$

$$m r^2 \ddot{\varphi}_2 = M_{e2} - R_{e2} + m r (\ddot{x} \sin \varphi_2 - l \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_2 - \beta) - l \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_2 - \beta)), \quad (11c)$$

$$(m + m_3) l^2 \ddot{\varphi}_3 + f_\varphi \dot{\varphi}_3 + k_\varphi \varphi_3 = (m l + m_3 l) \ddot{x} \sin \beta - m r l (\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \beta) - \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \beta)). \quad (11d)$$

式中,

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{转子逆时针转动,} \\ -1, & \text{转子顺时针转动.} \end{cases} \quad (12)$$

由于 $\varphi_3 \ll 1$ 且系统阻尼非常小, 引入小参数 μ , 方程 (11) 可以改写为 (1) 式的形式:

$$M \ddot{x} + k_x x = -\delta m r (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) + m r (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2) + (m l + m_3 l) \ddot{\varphi}_3 \sin \beta + \mu [(m l + m_3 l) \dot{\varphi}_3^2 \cos \beta] - \mu f'_x \dot{x}, \quad (13a)$$

$$m r^2 \ddot{\varphi}_1 = \mu \Phi_1, \quad (13b)$$

$$m r^2 \ddot{\varphi}_2 = \mu \Phi_2, \quad (13c)$$

$$\begin{aligned} & (ml^2 + m_3l^2)\ddot{\varphi}_3 + k_\varphi\varphi_3 \\ & = (ml + m_3l)\ddot{x}\sin\beta - mrl(\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \beta) \\ & \quad - \dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2 - \beta)) - \mu f'_\varphi\dot{\varphi}_3, \end{aligned} \quad (13d)$$

式中,

$$\mu\Phi_1 = M_{e1} - R_{e1} - \delta m r \ddot{x} \sin\varphi_1, \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \mu\Phi_2 &= M_{e2} - R_{e2} + m r (\ddot{x} \sin\varphi_2 \\ &\quad - l \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_2 - \beta) \\ &\quad - l \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_2 - \beta)). \end{aligned} \quad (14b)$$

根据文献[12], 当两个电机同步旋转时, 在转速 $\dot{\varphi}_i = \omega_m$ 附近, 异步电机的电磁转矩线性化为

$$M_{ei} = n_p \frac{L_{mi}^2 U_{S0}^2}{L_{si}^2 \omega_m R_{ri}} (\omega_s - n_p \omega_m), \quad (15)$$

式中, L_{mi} 为第 i 个感应电机的互感系数; L_{si} 为第 i 个电机的定子电感; n_p 为电机的极对数; ω_m 为转子同步速度; ω_s 为电网供电频率; R_{ri} 为第 i 个电机的转子电阻; U_{S0} 为定子电压的幅值.

3 系统稳态近似解

由方程(13a)和(13d)可看出系统关于自由度 x 和 φ_3 的耦合动力学方程. 忽略小参数的相关项, 并引入以下的无量纲参数:

$$\begin{aligned} r_l &= r/l, \quad \omega_x = \sqrt{k_x/M}, \quad r_m = m/M, \\ \eta &= m_3/m_1, \quad f_1(t) = r_m r_l (-\delta \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2), \\ f_2(t) &= -\sigma r_l \sin(\varphi_2 - \beta), \\ \omega_\varphi &= \sqrt{k_\varphi/(ml^2 + m_3l^2)}, \quad \sigma = 1/(1 + \eta). \end{aligned} \quad (16)$$

方程(13a)和(13d)简化为无量纲方程:

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x = \omega_m^2 l f_1(t) + \frac{r_m l \sin\beta}{\sigma} \ddot{\varphi}_3, \quad (17a)$$

$$\ddot{\varphi}_3 + \omega_\varphi^2 \varphi_3 = \frac{\sin\beta}{l} \ddot{x} - \omega_m^2 f_2(t). \quad (17b)$$

将方程(17)进行拉普拉斯变换, 则有

$$(s^2 + \omega_x^2)X(s) = \omega_m^2 l F_1(s) + \frac{r_m l s^2 \sin\beta}{\sigma} \phi(s), \quad (18a)$$

$$(s^2 + \omega_\varphi^2)\phi(s) = \frac{s^2}{l} X(s) \sin\beta - \omega_m^2 F_2(s). \quad (18b)$$

对方程(18)求解, $X(s)$ 和 $\phi(s)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{G(s)} \left[l(s^2 + \omega_\varphi^2) \omega_m^2 F_1(s) \right. \\ &\quad \left. - (\eta_{21} + \eta_{31}) l r_m s^2 \omega_m^2 F_2(s) \sin\beta \right], \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\phi(s) = \frac{s^2 \omega_m^2 F_1(s) \sin\beta - (s^2 + \omega_x^2) \omega_m^2 F_2(s)}{G(s)}, \quad (19b)$$

式中

$$G(s) = (s^2 + \omega_x^2)(s^2 + \omega_\varphi^2) - \frac{r_m s^4 \sin^2\beta}{\sigma}.$$

将(19)式的分子分母同时除以 $\omega_\varphi^2 \omega_x^2$, 然后进行拉普拉斯逆变换, 同时引入频率比量纲:

$$n_x = \omega_m/\omega_x, \quad n_\varphi = \omega_m/\omega_\varphi. \quad (20)$$

此时, 弹簧刚度 k_x 和 k_φ 转化为关于频率比 n_x 和 n_φ 的函数.

由(18)和(19)式, 系统在 x 和 φ_3 方向的稳态响应表示为

$$x = \frac{\sigma l (1 - n_x^2) n_\varphi^2 f_1(t) + l r_m n_x^2 n_\varphi^2 f_2(t) \sin\beta}{\sigma (1 - n_x^2)(1 - n_\varphi^2) - r_m n_x^2 n_\varphi^2 \sin^2\beta}, \quad (21a)$$

$$\varphi_3 = \frac{-\sigma n_x^2 n_\varphi^2 f_1(t) \sin\beta + \sigma (n_x^2 - 1) n_\varphi^2 f_2(t)}{\sigma (1 - n_x^2)(1 - n_\varphi^2) - r_m n_x^2 n_\varphi^2 \sin^2\beta}. \quad (21b)$$

整理可得

$$\begin{aligned} x &= \mu_1 r_m r (\delta \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) \\ &\quad - \mu_2 \sigma r \sin(\varphi_2 - \beta), \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \mu_3 r_m r_l (\delta \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) \\ &\quad - \mu_4 \sigma r_l \sin(\varphi_2 - \beta), \end{aligned} \quad (22b)$$

式中,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\sigma (n_x^2 - 1) n_\varphi^2}{N}, \quad \mu_2 = \frac{r_m n_x^2 n_\varphi^2 \sin\beta}{N}, \\ \mu_3 &= \frac{\sigma n_x^2 n_\varphi^2 \sin\beta}{N}, \quad \mu_4 = \frac{\sigma (n_x^2 - 1) n_\varphi^2}{N}, \\ N &= \sigma (1 - n_x^2)(1 - n_\varphi^2) - r_m n_x^2 n_\varphi^2 \sin^2\beta. \end{aligned} \quad (23)$$

(23)式中参数 μ_1 , μ_2 , μ_3 和 μ_4 代表转子、摆杆和振动质体之间的耦合系数. 系统的耦合系数 μ_2 和 μ_3 值越大, 转子与振动质体的耦合能力越强. 不难发现 μ_1 和 μ_4 的解析解是相同的, 且当 $\beta = 0^\circ$ 时摆杆与转子的耦合能力消失. 为了更好地研究系统的耦合特征, 我们做了以下的数值计算, 这些耦合系数是参数 n_x , n_φ , σ , β 和 r_m 的函数. 假设参数 σ , r_m 和 β 均为常数, 可以根据 n_x 和 n_φ 值的变化, 确定耦合系数值的变化范围. 本文所用的参数值与实际工程应用的参数一致, 如表1和表2所列.

表 1 系统动力方程 (11) 中的参数值
Table 1. Parameter values of the dynamic equation (11).

偏心转子 $i = 1, 2$	振动质体	摆杆	异步电机
$m_i = 2$ [kg]	$m_0 = 100$ [kg]	$l = 0.3$ [m]	$m_3 = 10$ [kg]
$r = 0.05$ [m]	$k_x = 246490000-50307$ [N/m]	$k_\varphi = 4980-24402510$ [N/rad]	$L_{mi} = 0.13$ [H]
$\omega_m = 152-157$ [rad/s]	$f_x = 1064$ [N·s/m]	$f_\varphi = 15$ [N·m/(rad/s)]	$L_{si} = 0.1$ [H]
—	—	$\beta = 0, \pi/6, \pi/3$ [rad]	$n_p = 2$
—	—	—	$R_{ri} = 0.54$ [Ω]
—	—	—	$U_{S0} = 220$ [V]

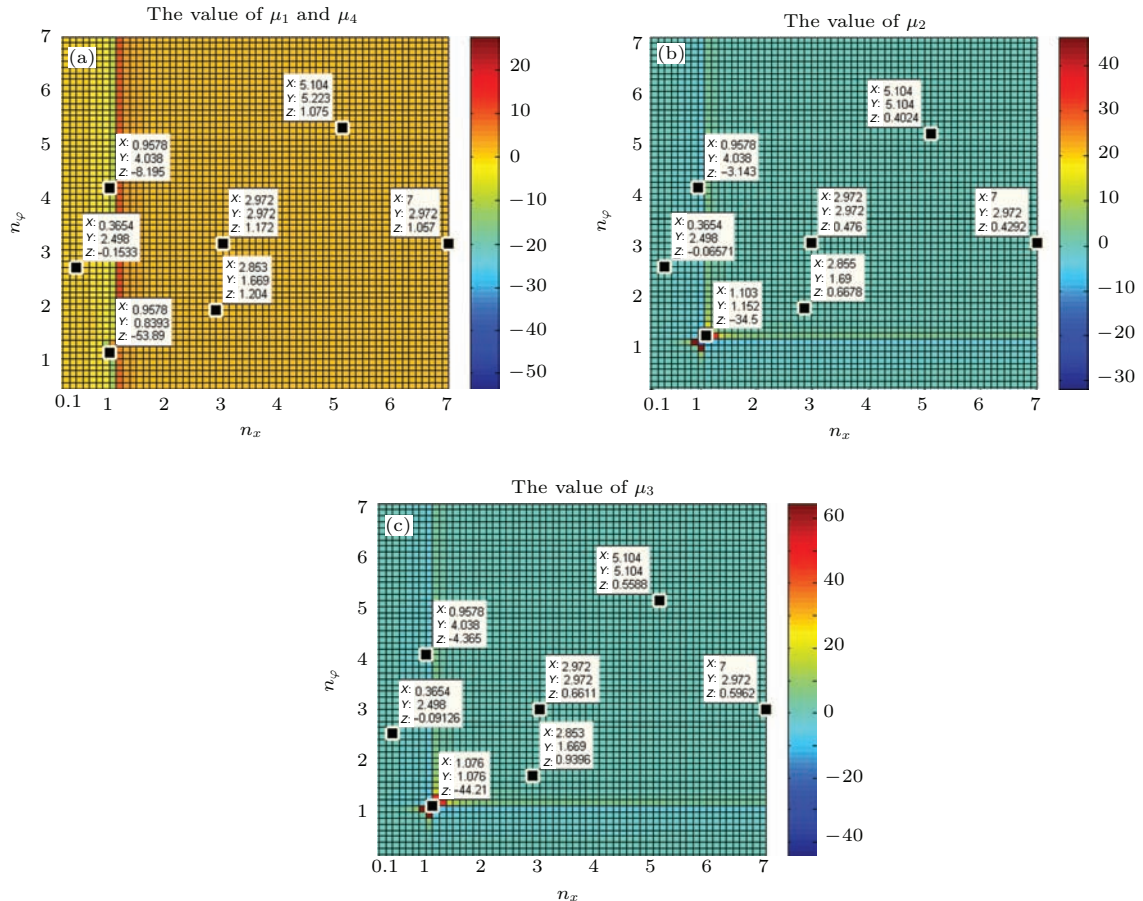


图 2 $\sigma = 0.17$, $r_m = 0.02$ 和 $\beta = \pi/6$ 时系统耦合系数的值, 其中, X 表示 n_x 的值, Y 表示 n_φ 的值, Z 表示耦合系数的值

Fig. 2. The value of the coupling coefficients of the system for $\sigma = 0.17$, $r_m = 0.02$ and $\beta = \pi/6$. In this figure, coordinate X represents the value of frequency ratio n_x ; coordinate Y represents the value of frequency ratio n_φ ; coordinate Z represents the value of coupling coefficients.

表 2 无量纲方程 (15) 的参数值
Table 2. Parameter values of dimensionless equation (15).

参数	η	σ	r_m	n_x	n_φ
值	5	0.17	0.02	0.1—7	0.1—7

根据表 1 和表 2 的参数值以及 (23) 式可以计算出系统的耦合参数值, 如图 2 所示. 可以看出耦

合系数的峰值取决于系统的频率比 (n_x 和 n_φ), 由于参数 n_x 和 n_φ 分别是关于弹簧刚度 k_x 和 k_φ 的函数, 所以也可以说耦合系数取决于弹簧刚度. 显然, 对于 $0.1 < n_x < 0.9$ 和 $0.1 < n_\varphi < 0.9$, 系统的振动频率小于系统的共振频率, 这种情况下 μ_1 , μ_2 , μ_3 和 μ_4 的绝对值非常小, 称之为前共振系统; 对于 $0.9 \leq n_x < 1.1$ 和 $0.9 \leq n_\varphi < 1.1$, 系统的振动频

率近似等于系统的共振频率, 这种情况下 μ_1, μ_2, μ_3 和 μ_4 的绝对值非常大, 称之为共振系统; 对于 $n_x \geq 1.1$ 和 $n_\varphi \geq 1.1$, 系统的振动频率高于系统的共振频率, 这种情况下 μ_1, μ_2, μ_3 和 μ_4 的绝对值也很小, 称之为超共振系统. 由于系统中的摆杆在电机激振作用下呈周期性的摆动, 因此, 也可以将摆杆视为一个振动质体. 那么系统可以看作双质体耦合振动系统. 我们可以根据频率比范围定义耦合系统的类型:

类型1 双前共振耦合系统 (即 $0.1 < n_x < 0.9$ 和 $0.1 < n_\varphi < 0.9$);

类型2 前共振与超共振耦合系统 ($0.1 < n_x < 0.9$ 和 $1.1 < n_\varphi < 7$, 或 $1.1 < n_x < 7$ 和 $0.1 < n_\varphi < 0.9$);

类型3 双超共振耦合系统 ($1.1 < n_x < 7$ 和 $1.1 < n_\varphi < 7$).

4 自同步性和稳定性条件

本节将对系统的同步性和稳定性做理论分析. 根据 (3) 式, 系统转子的相位角可以表示为

$$\varphi_1 = \omega t + \alpha_1, \quad \varphi_2 = \omega t + \alpha_2. \quad (24)$$

因此, 将 (24) 式代入 (22) 式得

$$x = \mu_1 r_m r (\delta \cos(\omega t + \alpha_1) - \cos(\omega t + \alpha_2)) - \mu_2 \sigma r \sin(\omega t + \alpha_2 - \beta), \quad (25a)$$

$$\varphi_3 = \mu_3 r_m r_l (\delta \cos(\omega t + \alpha_1) - \cos(\omega t + \alpha_2)) - \mu_4 \sigma r_l \sin(\omega t + \alpha_2 - \beta). \quad (25b)$$

设 α 为两个电机间的相位差角, 即

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2, \quad (26)$$

那么, (4) 式可以表示为

$$\begin{aligned} P_1 &= \langle \mu \Phi_1 \rangle \\ &= M_{e1} - R_{e1} - \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \delta (\mu_1 r_m \sin \alpha \\ &\quad + \mu_2 \sigma \cos(\alpha + \beta)), \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \langle \mu \Phi_2 \rangle \\ &= M_{e2} - R_{e2} + \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega_m^2 (\delta \mu_1 r_m \sin \alpha \\ &\quad + \delta \mu_3 r_m \cos(\alpha + \beta) + \mu_2 \sigma \cos \beta \\ &\quad - \mu_3 r_m \cos \beta). \end{aligned} \quad (27b)$$

系统处于同步状态时, 电机的残余转矩 $Z_i(\dot{\varphi}_1)$ 为零, 即

$$Z_i = M_{ei} - R_{ei} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (28)$$

根据 (28) 式, (27) 式进一步简化为

$$\delta \mu_1 r_m \sin \alpha + \delta \mu_2 \sigma \cos(\alpha + \beta) = 0, \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} &\delta \mu_1 r_m \sin \alpha + \delta \mu_3 r_m \cos(\alpha + \beta) \\ &= (\mu_3 r_m - \mu_2 \sigma) \cos \beta. \end{aligned} \quad (29b)$$

由 (22) 式, 有

$$\mu_3 r_m = \mu_2 \sigma. \quad (30)$$

因此, (29) 式中的两个式子是相同的, 系统达到自同步状态, 应满足以下方程:

$$\mu_1 \sin \alpha + \mu_3 \cos(\alpha + \beta) = 0. \quad (31)$$

(31) 式是系统自同步状态的平衡方程, 运用三角函数展开可以得到

$$\cot \alpha = \frac{\mu_3 \sin \beta - \mu_1}{\mu_3 \cos \beta}. \quad (32)$$

(32) 式中 α 存在实数解, 那么方程的分母不能为零, 因此系统同步行为存在临界点:

$$\beta = k\pi + \pi/2 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (33)$$

当摆杆的安装角等于或趋近该临界点时, 两偏心转子不会实现同步运转. 根据系统的同步平衡方程式 (31), 采用数值计算我们可以确定相位差角 α . 显然相位差角的值与耦合系数 μ_1 和 μ_3 以及摆杆安装角 β 相关, 而参数 μ_1 和 μ_3 与弹簧刚度 k_x 和 k_φ 相关, 因此弹簧刚度及摆杆安装角是决定相位差角的关键参数.

根据 (28) 和 (31) 式可以分别计算出转子同步角速度 ω_m 和相位差角 α , 其中相位差角为

$$\alpha = \arccot \frac{\mu_3 \sin \beta - \mu_1}{\mu_3 \cos \beta}. \quad (34)$$

而转子自同步转动的稳定性条件, (27) 式中两式相减得到

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= \langle \mu \Phi_1 \rangle - \langle \mu \Phi_2 \rangle \\ &= M_{e1} - R_{e1} - (M_{e2} - R_{e2}) \\ &\quad - m r^2 \omega^2 \delta (\mu_1 r_m \sin \alpha + \mu_2 \sigma \cos(\alpha + \beta)). \end{aligned} \quad (35)$$

联立 (6) 和 (35) 式, 系统同步稳定性条件为

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\partial(P_1 - P_2)}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial(P_1 - P_2)}{\partial \alpha} \\ &= -m r^2 \omega^2 \delta (\mu_1 r_m \cos \alpha - \mu_3 r_m \sin(\alpha + \beta)) \\ &< 0. \end{aligned} \quad (36)$$

重新整理 (36) 式, 系统自同步稳定性准则可简化为

$$\delta(\mu_1 r_m \cos \alpha - \mu_3 r_m \sin(\alpha + \beta)) > 0. \quad (37)$$

由 (37) 式可以看出, 系统同步稳定性准则主要由转子旋转方向、摆杆安装倾角和耦合系数确定. 只有当系统的参数满足系统平衡方程和稳定准则时, 两偏心转子才能实现稳定的同步工作. 此时, 转子的相位差称为稳定相位差.

5 数值分析

上述部分利用理论解析对双偏心转子与摆杆耦合的振动系统的同步条件和稳定性问题展开了讨论. 本节将对系统的同步行为做数值分析, 进一步全面地了解该类系统同步的本质.

5.1 当 $\delta = 1$ 时, 系统的同步行为

当 $\delta = 1$ 时, 此时两偏心转子反向旋转. 由于刚度系数 k_x 和 k_φ 分别转化为频率比 n_x 和 n_φ , 由 (31) 式可知刚度系数和安装倾角决定相位差角. 在满足系统自同步条件和稳定准则的前提下, 两个转子间的稳定相位差值可以采用数值法计算.

图 3 所示为对于 β 取不同值时, 频率比 n_x 和 n_φ 对稳定相位差值的影响. 由 (23), (31) 和 (37) 式可知, 当 $\beta = 0$ [rad] 时, 有 $\mu_2 = \mu_3 = 0$, 此时系统的自同步条件为 $\sin \alpha = 0$, 系统同步稳定性准则为 $\mu_1 \cos \alpha > 0$. 由于 $0.1 < n_x < 0.9$ 及 $\mu_1 < 0$ (在此情况下 $\alpha = \pi$), 在前共振区 (即 $\omega_m < \omega_x$), 同相同步行为是不稳定的, 而反相同步行为是稳定的 (根据文献 [1] 所述, 当 $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, 系统运动称为同相同步; 当 $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ 时, 系统运动称为反相同步). 在超共振区 ($\omega_m > \omega_x$), 与上述情况相反 (在该情况下 $\alpha = 0$), 同相同步是稳定的而反相同步是不稳定的. 如图 3(a) 所示, 当 $0.1 < n_x < 0.9$ ($2.46 \times 10^6 < k_x < 2.46 \times 10^8$) 时, 稳定相位差角等于 π ; 当 $1.1 < n_x < 7$ ($5.03 \times 10^4 < k_x < 2.46 \times 10^6$) 时, 稳定相位差角等于 0. 注意 n_φ 对稳定相位差的影响很小, 换言之, 当 $\beta = 0$ [rad] 时, 相位差不受摆杆上扭转弹簧的刚度的影响. 若参数 $\beta \neq 0$ [rad] 时, 相位差的值取决于摆杆中弹簧的刚度. 而如图 3(b) 所示 ($\beta = \pi/6$), $0.1 < n_x < 0.9$ 和 $1.1 < n_\varphi < 7$, 反相自同步行为出现于红色区域; 对

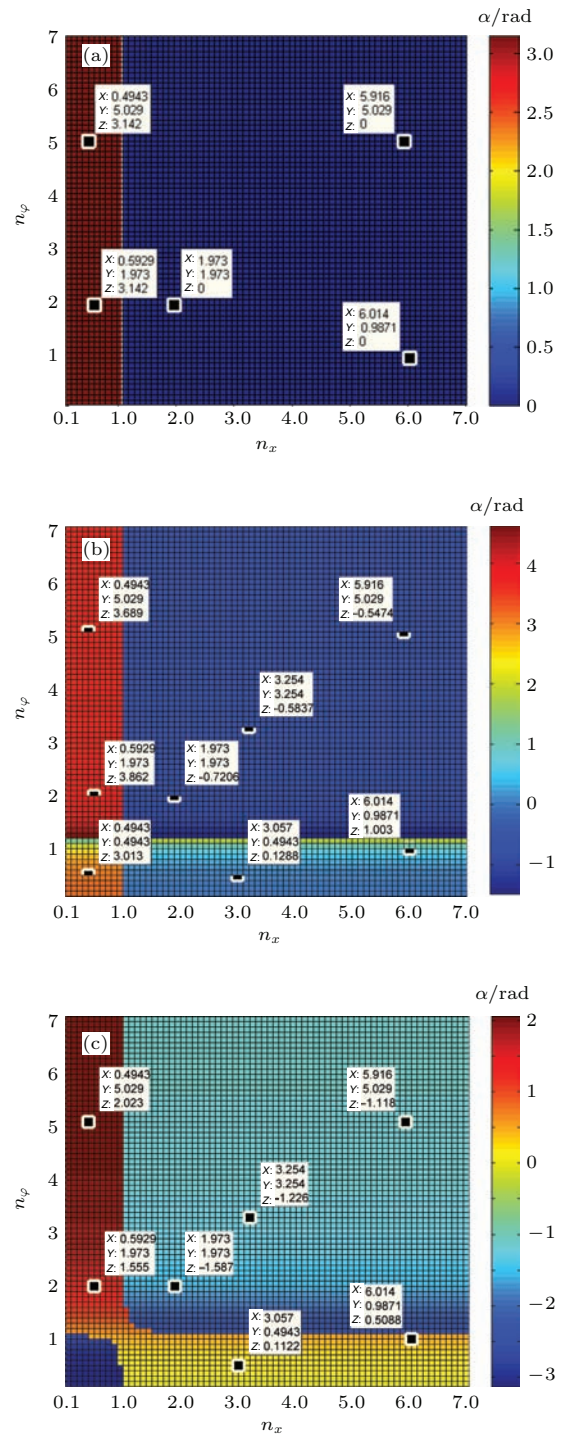


图 3 当 $\delta = 1$ 时, 稳定相位差角理论计算值 (a) $\beta = 0$ [rad]; (b) $\beta = \pi/6$ [rad]; (c) $\beta = \pi/3$ [rad]; X 表示频率比 n_x 的值, Y 表示频率比 n_φ 的值, Z 表示稳定相位差角 α 的值

Fig. 3. Stable phase difference with the theoretical computation when $\delta = 1$: (a) $\beta = 0$ [rad]; (b) $\beta = \pi/6$ [rad]; (c) $\beta = \pi/3$ [rad]. In this figure, coordinate X represents the value of frequency ratio n_x ; coordinate Y represents the value of frequency ratio n_φ ; coordinate Z represents the value of stable phase difference α .

于 $0.1 < n_x < 0.9$ 和 $0.1 < n_\varphi < 0.9$, 反相自同步和同相同步同时出现; 对于 $1.1 < n_x < 7$ 和 $0.1 < n_\varphi < 7$, 两个转子只执行同相同步行为. 当参数 $\beta = \pi/3$ [rad] 时, 其他的参数值均保持不变, 此时系统的同步相位行为如图 3(c) 所示. 转子是否执行同相同步行为或反相同步行为, 依然取决于 n_x 和 n_φ 的值. 可以看出: 在区域 $0.1 < n_x < 0.9$ 和 $0.1 < n_\varphi < 0.9$ 内, 转子执行反相同步行为; 在区间 $0.1 < n_x < 0.9$ 和 $1.1 < n_\varphi < 7$ 上, 转子既可以同相同步也可以反相同步; 在区间 $1.1 < n_x < 7$ 和 $1.1 < n_\varphi < 7$ 上, 转子执行同相同步行为.

5.2 当 $\delta = -1$ 时, 系统的同步行为

当 $\delta = -1$ 时, 此时两偏心转子同向旋转, 转子稳定相位差值如图 4 所示. 由 (23), (31) 和 (37) 式可知, 当 $\beta = 0$ [rad] 时, 有 $\mu_2 = \mu_3 = 0$, 此时系统的同步条件为 $\sin \alpha = 0$, 系统同步稳定性准则为 $\mu_1 \cos \alpha < 0$. 由于 $0.1 < n_x < 0.9$ 及 $\mu_1 < 0$ (在此情况下 $\alpha = 0$), 在前共振区 (即 $\omega_m < \omega_x$), 反相同步行为是不稳定的, 而同相同步行为是稳定的. 在超共振区 ($\omega_m > \omega_x$), 与上述前共振系统相反, (在该情况下 $\alpha = \pi$), 反相同步是稳定的而同相同步是不稳定的. 如图 4(a) 所示, 当 $0.1 < n_x < 0.9$ ($2.46 \times 10^6 < k_x < 2.46 \times 10^8$) 时, 稳定相位差角等于 0 [rad]; 当 $1.1 < n_x < 7$ ($5.0 \times 10^4 < k_x < 2.5 \times 10^6$) 时, 稳定相位差角等于 π . 所以, 两偏心转子同向旋转时, 转子的相位差也不受摆杆上扭矩弹簧的刚度的影响. 当参数 $\beta \neq 0$ [rad] 时, 相位差的值取决于摆杆中弹簧的刚度. 如图 4(b) 所示, 当 $\beta = \pi/6$ [rad] 时, 对于 $0.1 < n_x < 0.9$ 和 $1.1 < n_\varphi < 7$, 同相自同步行为出现于蓝色区域; 对于 $0.1 < n_x < 0.9$ 和 $0.1 < n_\varphi < 0.9$, 同相自同步出现于绿色区域; 对于 $1.1 < n_x < 7$ 和 $0.1 < n_\varphi < 7$, 两个转子只执行反相同步行为. 当参数 $\beta = \pi/3$ [rad] 时, 其他的参数值均保持不变, 系统的同步相位行为如图 4(c) 所示. 此时, 转子是否执行同相同步行为或反相同步行为, 依然取决于 n_x 和 n_φ 的值. 可以看出: 在区域 $0.1 < n_x < 0.9$ 和 $0.1 < n_\varphi < 0.9$ 内, 转子执行同相同步行为; 在区间 $0.1 < n_x < 0.9$ 和 $1.1 < n_\varphi < 7$ 上, 转子同相同步与反相同步并存; 在区间 $1.1 < n_x < 7$ 和 $1.1 < n_\varphi < 7$ 上, 转子实现

反相同步行为.

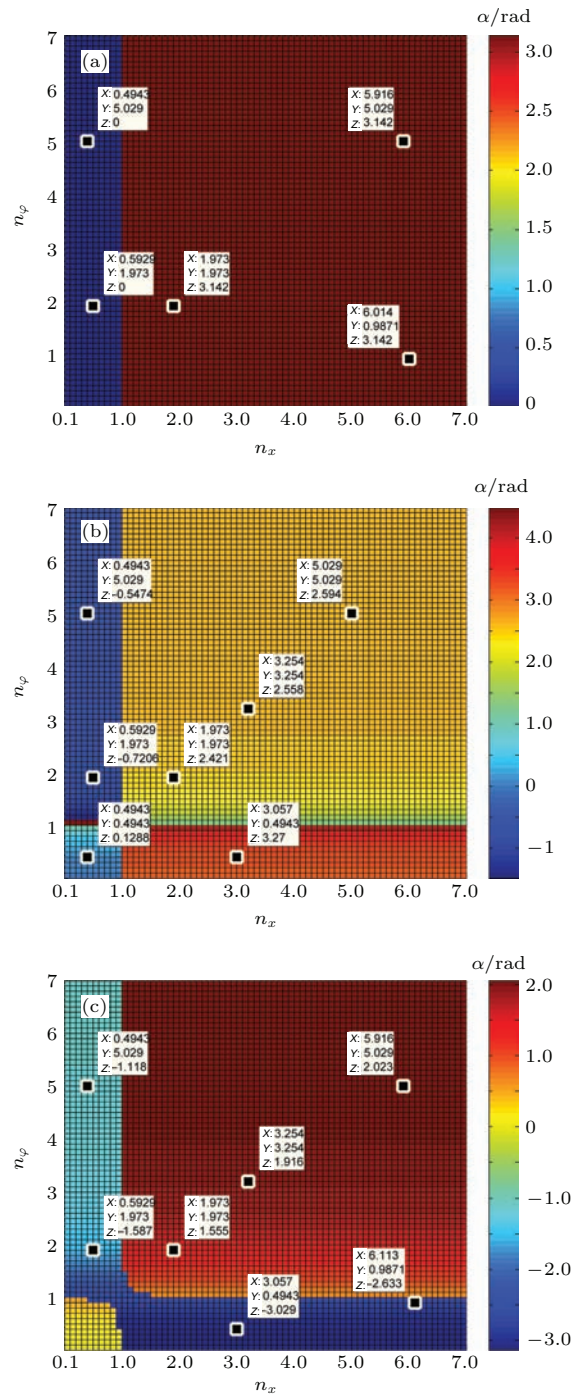


图 4 当 $\delta = -1$ 时, 稳定相位差角理论计算值 (a) $\beta = 0$ [rad]; (b) $\beta = \pi/6$ [rad]; (c) $\beta = \pi/3$ [rad]; X 表示频率比 n_x 的值, Y 表示频率比 n_φ 的值, Z 表示稳定相位差角 α 的值

Fig. 4. Stable phase difference with the theoretical computation when $\delta = -1$: (a) $\beta = 0$ [rad]; (b) $\beta = \pi/6$ [rad]; (c) $\beta = \pi/3$ [rad]. In this figure, coordinate X represents the value of frequency ratio n_x ; coordinate Y represents the value of frequency ratio n_φ ; coordinate Z represents the value of stable phase difference α .

5.3 数值仿真验证

为了进一步验证上述理论分析的正确性, 通过应用龙格-库塔法对动力学方程(11)求解. 假设驱动两个转子的电机参数是相同的.

5.3.1 $n_x = 5.916$, $n_\varphi = 5.029$, $\beta = 0$ 和 $\delta = 1$ 时的仿真结果

设系统参数 $n_x = 5.916$, $n_\varphi = 5.029$, $\beta = 0$ 和 $\delta = 1$ 时, 系统属于双超共振耦合系统. 仿真模型中的弹簧刚度分别为 $k_x = 65969$ [N/m] 和 $k_\varphi = 1053$ [N/rad], 其他参数值与表 1 中一致. 同时给异步电机提供电源, 由于摆杆的振动幅值较大, 故两转子的角加速度不等 (图 5(a)). 经过一段时间后, 两转

子进入同步行为状态, 这时两转子的平均同步转速约为 154 [rad/s]. 值得注意的是, 安装在摆杆上的电机 2 的速度波动比电机 1 的速度波动幅值更大, 据此可以断定较大的摆杆振动会引起转子转速较大的波动. 系统处于同步状态时, 转子相位差角 α 稳定于 0.12 [rad] (25.26 [rad] = $8\pi + 0.12$ [rad]), 如图 5(b) 所示. 将计算机模拟的稳定相位差值与图 3(b) 进行对比, 可以看出计算机模拟所得稳定相位差值与理论计算值是符合的 (图 3(a) 中稳定相位差 0 [rad]). 在这种情况下, 两个转子执行同相同步行为. 图 5(c) 和图 5(d) 所示是摆杆和振动质体响应相图, 由图可知系统处于同步状态时, 摆杆和振动质体的相图有一条封闭的轨迹, 所以此时系统是同步稳定的.

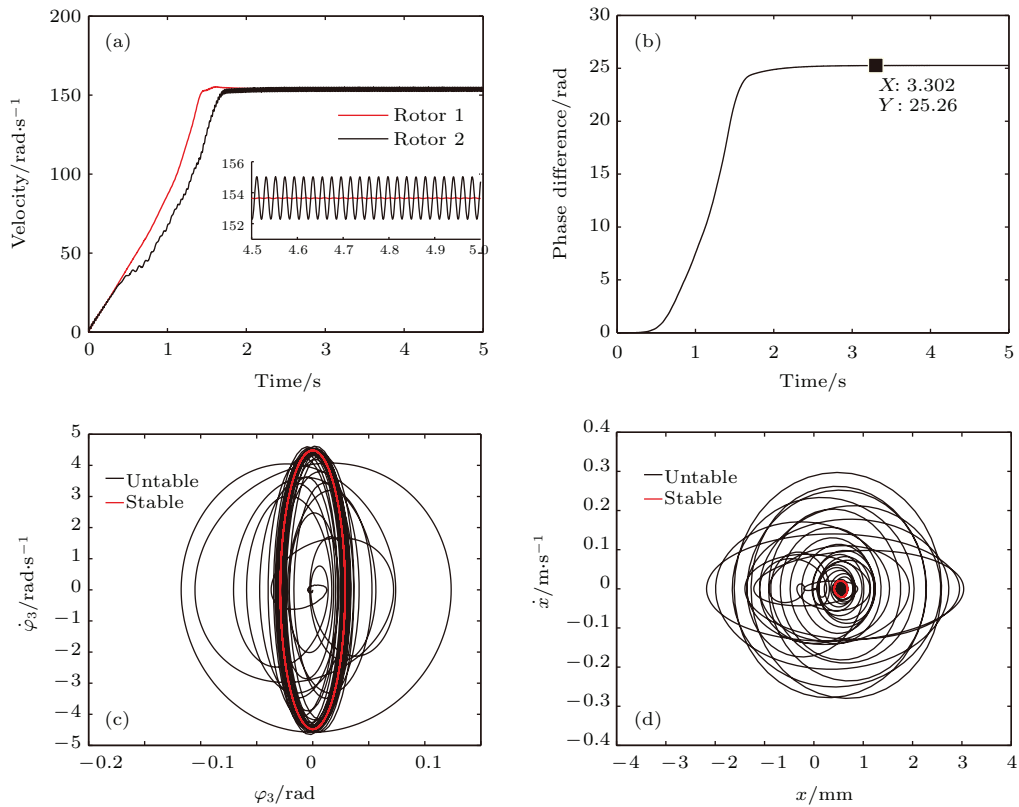


图5 系统参数 $n_x = 5.916$, $n_\varphi = 5.029$, $\beta = 0$ 和 $\delta = 1$ 的仿真结果 (a) 转子转速; (b) 转子相位差; (c) 摆杆响应相图; (d) 振动质体响应相图

Fig. 5. Simulation results for $n_x = 5.916$, $n_\varphi = 5.029$, $\beta = 0$ and $\delta = 1$: (a) Velocities of the rotors; (b) phase difference of the rotors; (c) response phase portrait of the pendulum rod; (d) response phase portrait of the vibrating body.

5.3.2 $n_x = 0.4943$, $n_\varphi = 0.4943$, $\beta = \pi/6$ 和 $\delta = -1$ 时的仿真结果

当 $n_x = 0.4943$, $n_\varphi = 0.4943$, $\beta = \pi/6$ 和 $\delta = -1$ 时, 这时弹簧刚度 k_x 和 k_φ 分别为 $9.86 \times$

10^6 [N/m] 和 9.76×10^5 [N/rad], 系统属于双前共振耦合系统, 计算机模拟结果如图 6 所示. 同时给异步电机提供电源, 由于转子的惯性矩是相同的且弹簧的刚度非常大, 所以两转子的角加速度相同

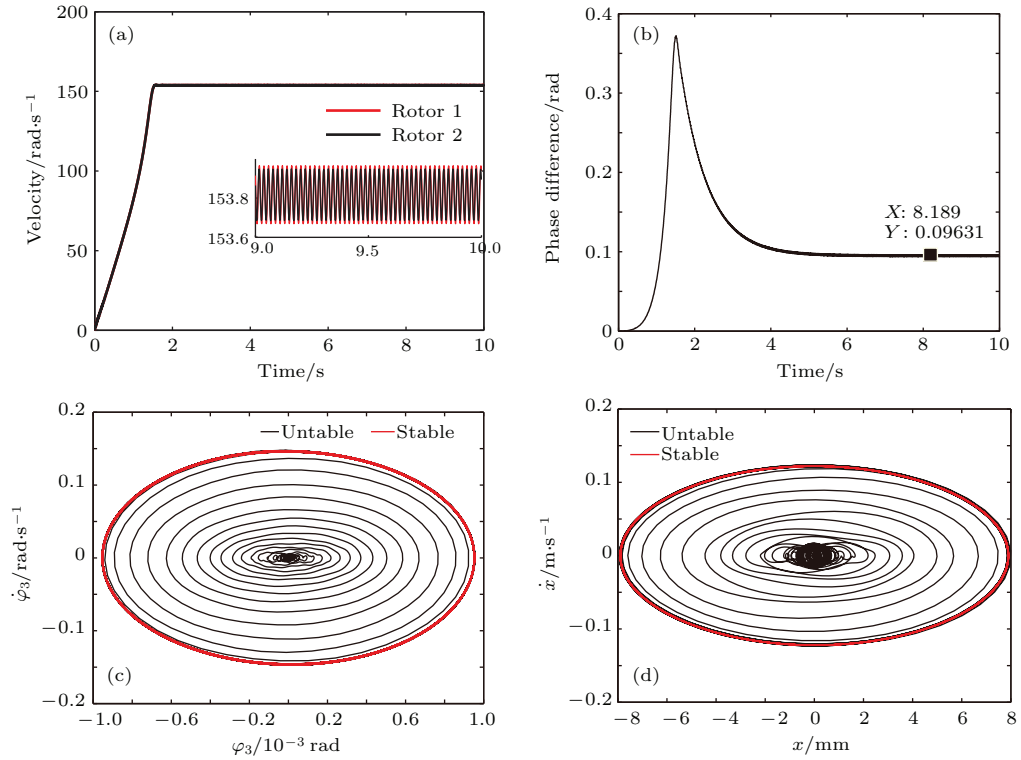


图6 系统参数 $n_x = 0.4943$, $n_\varphi = 0.4943$, $\beta = \pi/6$ 和 $\delta = 1$ 时的仿真结果 (a) 转子转速; (b) 转子相位差; (c) 摆杆响应相图; (d) 振动质体响应相图

Fig. 6. Simulation results for $n_x = 0.4943$, $n_\varphi = 0.4943$, $\beta = \pi/6$ and $\delta = 1$: (a) Velocities of the rotors; (b) phase difference of the rotors; (c) response phase portrait of the pendulum rod; (d) response phase portrait of the vibrating body.

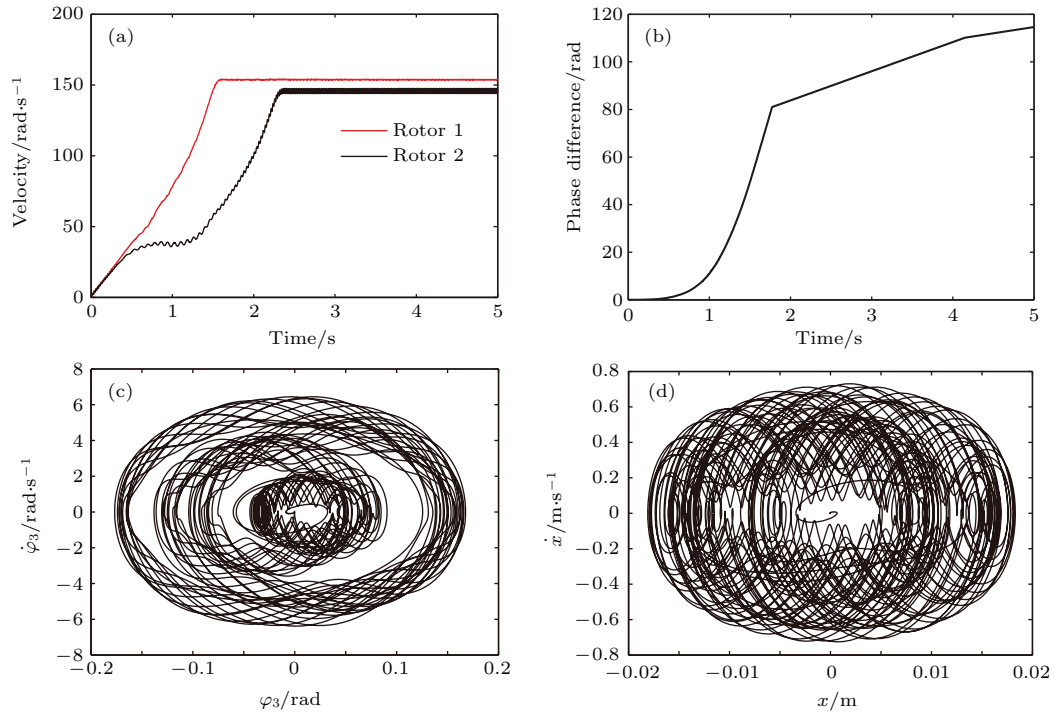


图7 系统参数 $n_x = 5.916$, $n_\varphi = 5.029$, $\beta = \pi/2$ 和 $\delta = -1$ 的仿真结果 (a) 转子转速; (b) 转子相位差; (c) 摆杆响应相图; (d) 振动质体响应相图

Fig. 7. Simulation results for $n_x = 5.916$, $n_\varphi = 5.029$, $\beta = \pi/2$ and $\delta = -1$: (a) Velocities of the rotors; (b) phase difference of the rotors; (c) response phase portrait of the pendulum rod; (d) response phase portrait of the vibrating body.

(图6(a)). 系统启动的初始阶段, 两转子间存在速度差, 导致相位差的不稳定. 然而, 转子的角速度到达额定转速, 转子便能实现同步行为. 在这种情况下, 两个转子执行同相同步行为, 且转子同步角速度为153.8 [rad/s]. 图6(b)所示为两转子的相位差值, 与图4(b)进行对比, 可以看出计算机模拟的稳定相位差应与理论分析的结果基本一致(图4(b)的稳定相位差等于0.1288 [rad], 图6(b)的稳定相位角等于0.09631 [rad]). 图6(c)和图6(d)所示是摆杆和振动质体响应相图, 由图可知摆杆和振动质体的相图有一条封闭的轨迹, 所以此时系统同步性稳定.

5.3.3 $n_x = 5.916$, $n_x = 5.029$, $\beta = \pi/2$ 和 $\delta = -1$ 时的仿真结果

(33)式指出, 当 $\beta = k\pi + \pi/2$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$)时, 系统同步行为存在“临界点”, 这里也可以通过计算机仿真来验证理论计算的正确性. 假设 $\beta = \pi/2$, 模型的其他参数值与上节保持一致, 计算机模拟结果如图7所示. 在此种情况下, 两个转子的转速在任何时间都不相等, 如图7(a)所示. 两转子间的相位差值随时间不断增加, 如图7(b)所示. 图7(c)和图7(d)所示分别为摆杆和振动质体的响应相图, 由图可以看出, 系统处于非同步行为状态时, 摆杆和振动质体相轨迹表现为混沌行为.

6 结 论

本文利用庞加莱法研究转子耦合摆系统的同步问题, 进一步揭示了该类系统同步现象的本质机理. 研究发现, 只有当系统的参数值同时满足系统同步平衡方程和系统同步稳定转动条件时, 转子才能实现工作自同步. 理论分析和数值分析的结果表明, 系统自同步行为和稳定性主要由弹簧刚度、摆杆安装倾角和转子旋转方向决定. 同时, 系统同步“临界点”会造成相位差角无解, 那么系统无法同步地运行. 而系统同步行为的缺失会引起系统相位响应的不稳定. 早期, 为了理解系统的内在特征, 我们只考虑水平位移假设下的振动体. 在振动体多自由度情况下, 研究结果是否会发生变化呢? 我们期望通过下一步探索和挑战, 完整和全面地理解该类系统的自同步行为.

参考文献

- [1] Blekhman I I 1988 *Synchronization in Science and Technology* (New York: ASME Press)
- [2] Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J 2001 *Synchronization, an Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [3] Arenas A, Albert D G, Kurths J, Moreno Y, Zhou C S 2008 *Phys. Rep.* **469** 93
- [4] Li Y S, Lü L, Liu Y, Liu S, Yan B B, Chang H, Zhou J N 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 020513 (in Chinese) [李雨珊, 吕翎, 刘焯, 刘硕, 闫兵兵, 常欢, 周佳楠 2013 物理学报 **62** 020513]
- [5] Yuan W J, Zhou C S 2011 *Phys. Rev.E* **84** 016116
- [6] Yu H J, Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3029 (in Chinese) [于洪洁, 刘延柱 2005 物理学报 **54** 3029]
- [7] Qin W Y, Yang Y F, Wang H J, Ren X M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2068 (in Chinese) [秦卫阳, 杨永锋, 王红瑾, 任兴民 2008 物理学报 **57** 2068]
- [8] Peña R J, Aihara K, Fey R H B, Nijmeijer H 2014 *Physica D* **270** 11
- [9] Jovanovic V, Koshkin S 2012 *J. Soun. Vib.* **331** 2887
- [10] Kapitaniak M, Czołczynski K, Perlikowski P, Stefanski A, Kapitaniak T 2014 *Phys. Rep.* **541** 1
- [11] Dilão R 2014 *Eur. Phys. J.: Spec. Top.* **223** 665
- [12] Marcheggiani L, Chacón R, Lenci S 2014 *Eur. Phys. J.: Spec. Top.* **223** 729
- [13] Wen B C, Fan J, Zhao C Y, Xiong W L 2009 *Synchronization and Controlled Synchronization in Engineering* (Beijing: Science Press)
- [14] Zhao C Y, Zhang Y M, Zhang X L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030301
- [15] Zhang X L, Wen B C, Zhao C Y 2012 *Acta Mech. Sin.* **28** 1424
- [16] Sperling L, Ryzhik B, Linz C, Duckstein H 2000 *Math. Comput. Simulat.* **58** 351
- [17] Balthazar J M, Felix J L P, Reyolando M L R F 2004 *J. Vib. Control.* **10** 1739
- [18] Balthazar J M, Felix J L P, Reyolando M L R F 2005 *Appl. Math. Comput.* **164** 615
- [19] Djanan A A N, Nbandjo B R N, Wofo P 2014 *Eur. Phys. J.: Spec. Top.* **223** 813
- [20] Lacarbonara W, Arvin H, Bakhtiari-Nejad F 2012 *Nonlinear Dyn.* **70** 659
- [21] Stoykov S, Ribeiro P 2013 *Finite Elem. Anal. Design.* **65** 76
- [22] Warminski J, Szmit Z, Latański J 2014 *Eur. Phys. J.: Spec. Top.* **223** 827
- [23] Andreas M, Peter M 2007 *Multibody Syst. Dyn.* **18** 259
- [24] Hou Y J, Zhang Z L *China Patent* 201110115274 [2012-12-26]
- [25] Fang P, Hou Y J, Yang Q M, Chen Y 2014 *J. Vibroeng.* **16** 2188

Synchronous behavior of a rotor-pendulum system*

Fang Pan¹⁾ Hou Yong-Jun^{1)†} Zhang Li-Ping¹⁾ Du Ming-Jun¹⁾ Zhang Meng-Yuan²⁾

1) (School of Mechanical Engineering, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China)

2) (College of Geosciences, China University of Petroleum, Beijing Campus, Beijing 102249, China)

(Received 8 June 2015; revised manuscript received 21 August 2015)

Abstract

Rotor-pendulum systems are widely applied to aero-power plants, mining screening machineries, parallel robots, and other high-speed rotating equipment. However, the investigation for synchronous behavior (the computation for stable phase difference between the rotors) of a rotor-pendulum system has been reported very little. The synchronous behavior usually affects the performance precision and quality of a mechanical system. Based on the special background, a simplified physical model for a rotor-pendulum system is introduced. The system consists of a rigid vibrating body, a rigid pendulum rod, a horizontal spring, a torsion spring, and two unbalanced rotors. The vibrating body is elastically supported via the horizontal spring. One of unbalanced rotors in the system is directly mounted in the vibrating body, and the other is fixed at the end of the pendulum rod connected with the vibrating body by the torsion spring. In addition, the rotors are actuated with the identical induction motors. In this paper, we investigate the synchronous state of the system based on Poincaré method, which further reveals the essential mechanism of synchronization phenomenon of this system. To determine the synchronous state of the system, the following computation technologies are implemented. Firstly, the dynamic equation of the system is derived based on the Lagrange equation with considering the homonymous and reversed rotation of the two rotors, then the equation is converted into a dimensionless equation. Further, the dimensionless equation is decoupled by the Laplace method, and the approximated steady solution and coupling coefficient of each degree of freedom are deduced. Afterwards, the balanced equation and the stability criterion of the system are acquired. Only should the values of physical parameters of the system satisfy the balanced equation and the stability criterion, the rotor-pendulum system can implement the synchronous operation. According to the theoretical computation, we can find that the spring stiffness, the installation title angle of the pendulum rod, and the rotation direction of the rotors have large influences on the existence and stability of the synchronous state in the coupling system. Meanwhile, the “critical point” of synchronization of the system can lead to no solution of the phase difference between the two rotors, which results in the dynamic characteristics of the system being chaotic. Finally, computer simulations are preformed to verify the correctness of the theoretical computations, and the results of theoretical computation are in accordance with the computer simulations.

Keywords: rotors, pendulum rod, stability, synchronous behavior

PACS: 45.20.dc, 45.40.-f, 45.40.Bb

DOI: 10.7498/aps.65.014501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51074132) and the Key Project of Talent Engineering of Sichuan, China (Grant No. 2016RZ0059).

† Corresponding author. E-mail: yongjunhou@126.com