

倾斜沙漏流与颗粒休止角研究

张昱 韦艳芳 彭政 蒋亦民 段文山 厚美瑛

Inclined glass-sand flow and the angle of repose

Zhang Yu Wei Yan-Fang Peng Zheng Jiang Yi-Min Duan Wen-Shan Hou Mei-Ying

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 084502 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.084502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.084502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I8>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

双分散颗粒体系在临界堵塞态的结构特征

[Structural features of critical jammed state in bi-disperse granular systems](#)

物理学报.2016, 65(2): 024502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.024502>

垂直载荷下颗粒物质的声波探测和非线性响应

[Acoustic detection and nonlinear response of granular materials under vertical vibrations](#)

物理学报.2016, 65(2): 024501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.024501>

颗粒气体团簇行为实验研究

[Experimental study of clustering behaviors in granular gases](#)

物理学报.2016, 65(1): 014502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.014502>

玻璃-橡胶混合颗粒的力学响应研究

[Mechanical response study of glass-rubber particle mixtures](#)

物理学报.2015, 64(15): 154502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.154502>

二维晶格颗粒堆积中侧壁的压力分布与转向系数

[Lateral pressure distribution and steering coefficient in two-dimensional lattice pile of granular material](#)

物理学报.2015, 64(13): 134502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.134502>

## 倾斜沙漏流与颗粒休止角研究\*

张昱<sup>1)2)</sup> 韦艳芳<sup>2)3)4)</sup> 彭政<sup>5)</sup> 蒋亦民<sup>5)</sup> 段文山<sup>1)</sup> 厚美瑛<sup>2)†</sup>

1)(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

2)(中国科学院物理研究所, 软物质物理重点实验室, 北京凝聚态国家重点实验室, 北京 100190)

3)(玉林师范学院物理科学与工程技术学院, 玉林 537000)

4)(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

5)(中南大学物理与电子学院, 长沙 410083)

(2015年11月25日收到; 2015年12月22日收到修改稿)

本文发现在测量误差内颗粒物质的下列三个临界角度相等: 1) 从直径为  $D$  的倾斜孔洞流出的 Beverloo 颗粒流的流量开始停止的临界倾角  $\theta_c$  向大孔径极限线性外推  $\theta_{c\infty} \equiv \theta_c(D \rightarrow \infty)$  的补角  $\theta_{s\infty} = 180^\circ - \theta_{c\infty}$ ; 2) 从靠近堆顶的点源向光滑底板缓慢下落颗粒形成的圆锥形堆的休止角  $\theta_r$ ; 3) 直接剪切矩形颗粒固体测得的库仑内摩擦角  $\varphi$ . 该结果倾向支持倾斜孔洞和颗粒堆自由表面的固-液转变与颗粒固体内部的库仑屈服均来自材料的同一临界性质. 由于三种情况样品的内部应力和变形等都是目前还远不能定量分析的复杂非均匀分布, 我们仅从定性角度对此给出一些讨论.

关键词: 倾斜孔洞流, 休止角, 库仑内摩擦角, Beverloo 公式

PACS: 45.70.-n, 45.70.Cc, 45.70.Ht, 45.70.Mg

DOI: 10.7498/aps.65.084502

## 1 引言

随着密度、受力和运动变形情况的不同, 颗粒物质的动力学行为或表现为类似固体, 或液体, 或气体<sup>[1]</sup>. 这三种物态经常同时出现在同一样品或体系的不同区域, 例如当颗粒物质从容器边壁的孔洞开口(或漏斗口)流出时, 容器内远离洞口处的颗粒往往处于类固态, 出口附近和流下的颗粒处于类气态, 之间是形状复杂模糊, 甚至看不十分清楚的类液态区域. 这类复杂的颗粒物质运动现象随处可见, 甚至可以追溯到古老的沙漏钟, 是近年来颗粒物理感兴趣的研究方向之一<sup>[2-13]</sup>. 孔洞流的流量  $Q$  相当稳定, 并且只与孔的尺寸(如圆孔直径  $D$ )有关, 是它的重要特征, 但其物理机理至今仍是谜. 对孔洞平面的法向与重力方向平行的情形, 流

量  $Q$  随孔径  $D$  变化的经验公式, 早在 50 多年前就由 Beverloo 等利用量纲分析和实验测量给出了<sup>[14]</sup>, 并在随后报道的测量中也被证实和确认相当精确可靠<sup>[2-13]</sup>. Beverloo 公式还含有当孔径减小到几个粒径时流量会降低为零的“阻塞(clogging)”现象. 故孔洞流也被认为是研究复杂的“阻塞转变”的良好体系.

近三年来这方面研究的重要进展, 来自对孔洞平面与重力不平行, 即“倾斜孔洞”的一些实验工作. 首先文献<sup>[2-4]</sup>报道了倾斜时的流量  $Q$  也同样稳定, 其随孔径  $D$  的变化关系也能很好地用 Beverloo 公式描述. 经系统测量  $Q$  与倾斜角  $\theta$  的关系, 发现  $Q$  与倾斜角的余弦  $\cos \theta$  呈现相当好的线性关系:  $Q \propto (\alpha - \cos \theta)$ . 这里值得特别注意的是, 这个线性关系有一个流量降到零的临界休止角  $\theta_c = \arccos(\alpha)$ . 当倾角大于它时, 颗粒系统将处于

\* 地震行业科研经费(批准号: 201208011)、国家自然科学基金(批准号: 11274354, 11047003)和中国科学院空间科学战略性先导科技专项(批准号: XDA04020200)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: mayhou@iphy.ac.cn

没有流动的静止状态. 另外这个从流动到静止的转变不是突然发生的, 而是有一个明显的“间歇流”过渡区: 随着倾角逼近 $\theta_c$ , 间歇流动的时间越来越短, 最终趋向零. 另外间歇流区域的静态在倾角 $\theta$ 比较小时的稳定性不强, 会因小扰动触发下一个间歇流动. 但随着 $\theta \rightarrow \theta_c$ , 抗扰动性会越来越大, 并趋向无限(完全不能流动). 由于间歇流的存在, 实验不能直接测量 $\alpha$ 或临界休止角 $\theta_c$ , 只能利用上述直线关系外推得到.

文献[6]对倾斜孔洞流的进一步研究发现, 上面提到的临界流量休止角 $\theta_c$ , 与孔径的倒数 $1/D$ 之间, 也呈现出良好的线性关系. 如果将其线性外推到 $1/D \rightarrow 0$ , 可以得到出口尺寸无限大时的流量休止角 $\theta_{c\infty} \equiv \theta_c(D \rightarrow \infty)$ . 显然在这个极限下孔洞表面上的颗粒面可看作一个无限大自由斜面. 这使得我们可以利用该实验结果探讨 Beverloo 流与自由颗粒斜面的固-液转变临界性质之间的某些联系. 注意这个大孔洞的流动到静止的转变, 与前面提到的(几个粒径)小孔洞的“阻塞 clogging 转变”是完全不同的临界现象. 无限大自由斜面有两个重要的临界角, 分别称作最大稳定角(maximum angle of stability)  $\theta_m$  和休止角(angle of repose)  $\theta_r$  [15–30]. 它们与 $\theta_{c\infty}$ 的关系是本文期望测量和澄清的一个内容. 本文实验结果倾向支持它的锐角补角 $\theta_{r\infty} = 180^\circ - \theta_{c\infty}$ 与在光滑水平底板上缓慢堆积得到的休止角 $\theta_r$ 相等.

早在1773年库仑曾在颗粒物质的自由斜面总是小于某个临界值的启发下, 提出了材料的内摩擦概念和相应的临界摩擦公式, 又称库仑屈服准则(公式), 其中的材料参数称作内摩擦角 $\varphi$  [31]. 虽然从概念上看这些临界角度, 即 $\theta_{r\infty}$ ,  $\theta_m$ ,  $\theta_r$ 和 $\varphi$ 是密切相关的, 它们之间是如何定量联系的, 是否都来自同一临界行为等, 目前仍不清楚. 其中的一个主要困难是, 测量 $\theta_m$ ,  $\theta_r$ ,  $\varphi$ 时多少都会受到来自测量方法、样品几何和容器边壁的影响, 并没有统一的具体值. 近年来报道的各种 $\theta_m$ 和 $\theta_r$ 测量结果的确并不一致, 如文献[15–19]的缓慢转动滚筒(rotating drum)装置, 文献[20, 21]报道的倾倒(poured angle of repose)和排空(drained angle of repose 或 draining crater)休止角测量方法; 以及缓慢倾斜一个装满颗粒的矩形容器观测器自由表面开始失稳的方法 [22–25]; 观测沿着垂直墙面缓慢流下颗粒堆积而成的半沙堆的自由表面临界倾角 [26]; 或观测震动一个装满颗粒的矩形容器而形成的半

沙堆(heap formation)的倾角 [27–30]等. 另外对内摩擦角 $\varphi$ 的测量也存在着类似的问题 [32]. 相对而言, 文献[6]的倾斜 Beverloo 流方法给出的 $\theta_{r\infty}$ 基本没有测量方法或装置, 特别是样品制备历史的影响.

由于概念上看来似乎有着相同物理机理, 一些不同方法测得的临界角值很可能会相等. 本文的实验结果显示, 在测量误差范围内, 对同一种颗粒物质(玻璃珠)用倾斜 Beverloo 流方法得到的 $\theta_{r\infty}$ , 在光滑底面上缓慢自然堆积得到的休止角 $\theta_r$ , 和用剪切曲线峰值定义的库仑内摩擦角 $\varphi$ , 三者相等. 如何理论上统一定量解释这些相等或不等的临界角, 进而理解颗粒物质特有的固-液转变和临界行为, 是颗粒物理领域值得深入研究的课题. 目前这方面的一个问题是, 大家对各种形形色色临界角的测量值及其涨落误差等尚缺乏共识. 本文工作将有助于今后对此的逐步澄清.

## 2 实验方法与测量结果

### 2.1 休止角和最大稳定角的测量

传统意义上的自然堆积角有崩塌前的堆积最大角 $\theta_m$ 和崩塌后的休止角 $\theta_r$ , 其差值 $\Delta\theta = \theta_m - \theta_r$ 不大( $\approx 2^\circ$ ), 又称为 Bagnold 角 [15–30]. 例如在固定的水平底板上堆积干颗粒堆时, 堆的倾斜自由表面会在达到一个最大值 $\theta_m$ 之后发生崩塌, 但崩塌并不会使倾角归零, 而是停在一个稳定的休止倾角 $\theta_r$ . 这里需要指明的是, 虽然粗略地讲可认为它们是材料特征, 这两个角在概念上并没有精准定义, 测量值也不确定, (如引言所述)与实验方法有关. 实际测量时, 样品湿度、环境静电和温湿情况、颗粒下落的冲击力、底板或容器的光滑或粗糙程度等, 都有可能对可察觉的影响. 另外, 堆应该足够大(一般直径大于30倍颗粒尺寸), 否则 $\theta_m$ 和 $\theta_r$ 的差别很难分辨. 考虑到这些, 建议在定量提及或讨论最大角和休止角时, 应注明具体测量方法、样品尺寸、边壁情况等.

本文测量堆积最大角 $\theta_m$ 和休止角 $\theta_r$ 方法如下(简称自然堆积法). 在光滑水平玻璃底板上, 通过漏斗在一定高度缓慢流下颗粒. 随着圆锥形堆的增长可观察到不断崩塌和堆积的过程. 实验中颗粒为直径 $d = (0.9 \pm 0.1)$  mm 的球形玻璃珠, 漏斗口与颗粒堆顶部保持约5 mm 距离, 实验取六组完全崩塌后的颗粒堆拍照记录, 如图1所示, 对堆积最大

角  $\theta_m$  和休止角  $\theta_r$  进行测量, 取六组平均后得到  $\theta_r$  或  $\theta_m$ :

$$\theta = \arctan[2H/(2R - d)], \quad (1)$$

其中,  $H$  是颗粒堆的高度,  $R$  是颗粒堆底层堆积圆面的半径(随着堆积颗粒的增加,  $R$  逐渐增大),  $d$  是颗粒的直径. 测得的  $\theta_r = 21.0^\circ \pm 2^\circ$ ,  $\theta_m = 23.0^\circ \pm 2^\circ$ .

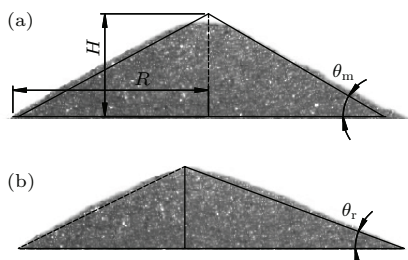


图 1 (a) 临界崩塌态; (b) 完全崩塌态

Fig. 1. (a) The critical collapse state; (b) completely collapsed state.

注意用这种测量方法时,  $\theta_m$  和  $\theta_r$  是靠颗粒堆在生长过程中发生的堆积和崩塌两个动态现象来定的, 堆积速度的快慢对它们有影响. 如果漏斗中的颗粒流出的速度很快, 堆积和崩塌将难于区分. 故我们采用了非常缓慢的堆积过程, 这时崩塌和堆积过程可以区分, 使得  $\theta_m$  和  $\theta_r$  可以较精确地测量出来. 但无论如何, 这类测量的误差都较大. 一个原因是在颗粒添加过程中, 颗粒堆的崩塌尺度是有大小之分的, 每次出现的不都是波及整个坡面的大崩塌, 而是在过程中夹杂了很多小尺度的崩塌. 这些无法到达底部的小崩塌会停留在坡面中部, 造成坡面隆起(如图 1(b) 颗粒堆的左半坡面), 破坏了颗粒堆的对称性, 对判断颗粒堆的顶点带来误差, 进而影响  $\theta_r$  的测量精度. 此外测量采用的(固定)底板是光滑的玻璃平面. 如果在粗糙的底板上用同样的颗粒样品堆积颗粒堆, 测得的  $\theta_r$  会明显大于光滑底板的结果. 由于颗粒堆的堆积倾角会受底部支撑平面粗糙程度, 以及漏斗颗粒下落的流速的影响(这也曾见于其他报道<sup>[32,33]</sup>). 因此我们特别强调本文的  $\theta_m$  和  $\theta_r$  值, 来自非常缓慢的堆积速度和光滑底板.

## 2.2 倾斜 Beverloo 流的测量

首先采用与文献<sup>[6]</sup>相同的方法, 即通过测量孔洞流量  $Q$  随孔径  $D$  和孔洞倾角  $\theta$  的变化, 利用引言提到的两个线性关系, 外推得到零流量倾斜

角随孔径的函数  $\theta_c(D)$ , 然后再线性外推得到孔洞趋于无穷大时极限值  $\theta_{c\infty}$ , 与上面测量的休止角做对比. 由于  $\theta_c$  是通过测量流量得到的, 我们将其简称为“流量测量法”. 实验装置如图 2 所示, 颗粒置于横截面  $120 \text{ mm} \times 120 \text{ mm}$ , 柱高  $900 \text{ mm}$ , 壁厚  $3 \text{ mm}$  的方柱形铝合金料仓, 颗粒样品为直径  $d = (0.9 \pm 0.1) \text{ mm}$  的球形玻璃珠. 料仓顶部开放, 底部和一侧分别开一圆孔, 孔径  $D$  从  $6\text{--}50 \text{ mm}$  共 13 种尺寸. 不同孔径开口处加工成  $25^\circ$  的楔形角以减小筒壁厚度对颗粒流的影响. 注意这里的装置考虑的最大孔径  $D$  比文献<sup>[6]</sup>中的值要大 2.5 倍, 以便得到更多的大孔洞流量数据值, 能够更精确地逼近  $\theta_c$  的极限值. 倾斜角  $\theta$  定义为圆孔所在平面与外水平面的夹角, 测量精度为  $0.1^\circ$ . 当  $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$  时, 颗粒仅从底孔流出; 当  $45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$  时, 颗粒仅从侧孔流出. 颗粒流量用精度为  $0.1 \text{ g}$ , 采样频率为  $25 \text{ Hz}$  的电子秤动态采集. 实验开始前先将孔径为  $D$  的开孔塞住, 向料仓中倒入相同质量的颗粒, 然后开放开孔, 用电子秤采集测量流量  $Q$ . 每次测量均忽略采集初期的不稳定流动, 流量采集时间为  $10\text{--}250 \text{ s}$ , 对于每一给定的  $D$  和  $\theta$  重复实验五次, 实验平均值记为对应的流量  $Q(D, \theta)$ . 实验中控制空气湿度保持在  $50\%\text{--}60\%$ , 以尽量减小静电产生的影响.

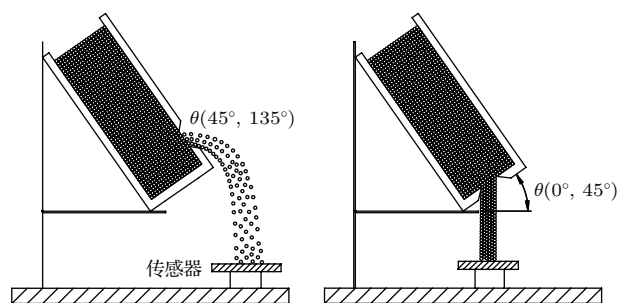


图 2 倾斜沙漏流法实验装置剖面图

Fig. 2. Sectional view.

实验结果如图 3(a) 所示, 由于孔洞流的流量非常稳定, 5 次实验的误差小于数据点图标大小, 因此图中没有标出误差棒. 由图可见, 文献<sup>[2,6]</sup>中看到的流量  $Q$  与  $\cos \theta$  的线性关系, 即使继续加大  $D$  仍然得到很好的保持.

我们用 (2) 式拟和实验数据<sup>[6]</sup>, 结果见图 3(a) 内插图.

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta_c - 1}, \quad (2)$$



其中  $Q_0$  为实验测得的水平孔洞流 ( $\theta = 0^\circ$ ) 的流量.  $\theta_c$  为流量休止角 (即线性外推到流量  $Q = 0$  时的倾角), 是 (2) 式中惟一的拟合参数. 图 3(b) 给出了  $\theta_c$  随  $d/D$  的变化关系. 可以看到, 在比文献 [6] 更宽的  $d/D$  取值范围里,  $\theta_c$  仍然表现出很好的线性关系. 用

$$\theta_c = \theta_0 \left( 1 - k_0 \frac{d}{D} \right), \quad (3)$$

拟合图 3(b) 数据得到  $\theta_{c\infty} \equiv \theta_c(D \rightarrow \infty) = \theta_0 = 159.5^\circ \pm 1^\circ$  和  $k_0 = 1.4 \pm 0.3$ . 取锐角  $\theta_{r\infty} = 180^\circ - \theta_{c\infty} = 20.5^\circ \pm 1^\circ$  发现, 它与前面光滑底板上缓慢堆积法得到的  $\theta_r$  非常接近. 与文献 [6] 的结果相比, 我们提高精度后的测量误差已经小于 Bagnold 角 (即最大稳定角与休止角只差  $\theta_m - \theta_r$ ), 但得到的  $\theta_{r\infty}$  仍然很好地与休止角  $\theta_r$  相同. 另外文献 [6] 得到的  $\theta_{c\infty}$  的外推值比本文的大, 很可能是文献 [6] 的样品湿度比本文大的缘故 (通常湿度会增大休止角 [20]).

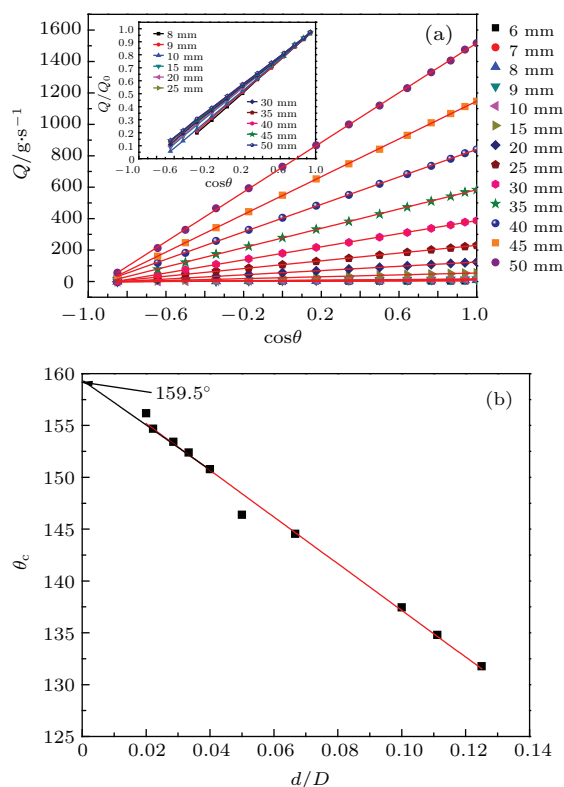


图 3 (网刊彩色)(a) 不同孔径  $D$  的流量  $Q$  与  $\cos \theta$  的关系; (b) 不同孔径对应的临界休止角

Fig. 3. (color online) (a) Quality under different the angle consine when  $6 \text{ mm} \leq D \leq 50 \text{ mm}$ ; (b) the critical angle of repose under different bore diameter.

上面的测量和数据处理, 主要依赖于对图 3(a) 和 (b) 的两个表现很好的线性关系做外推. 其中的

临界零流量角  $\theta_c(D)$  需要外推图 3(a) 的直线越过间歇流区域而得到,  $\theta_{c\infty}$  需要外推图 3(a) 的直线到  $D \rightarrow \infty$  而得到, 它们都不是直接测量值. 虽然图 3 数据的线性度相当好, 这些外推是否可靠是存在一定疑虑的. 为验证和考察这个问题, 我们还考虑了另一种不同的、直接测量  $\theta_c(D)$  的方法. 它仍然采用图 2(a) 的实验装置, 倒入同等质量的颗粒, 放置料仓于某初始倾角  $\theta$ , 让颗粒开始流出. 这时与前面不同的是, 我们不去测量流量, 而是通过传动装置缓慢匀速地沿底部向前拖动料仓来增大  $\theta$ , 直至颗粒停止流出, 记录此时料仓的“停止倾角  $\theta_{\text{stop}}$ ”. 以下称该方法为“直接零流量法”. 图 4 是对每一孔径重复五次测量, 取  $\theta_{\text{stop}}$  平均值的测量结果. 可以看出, 随孔径  $D$  的改变,  $\theta_{\text{stop}}$  和  $d/D$  仍然呈现很好的线性关系, 可以将其外推至  $D \rightarrow \infty$ .

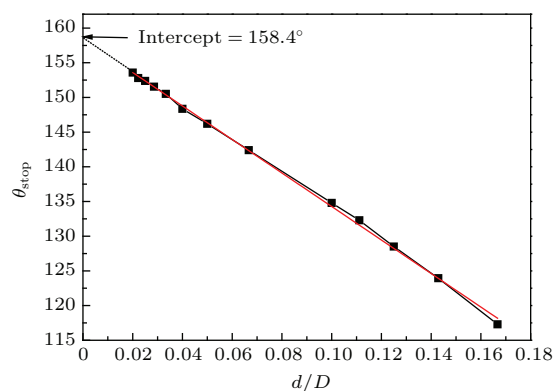


图 4 料仓不同孔径对应的零流量倾斜角

Fig. 4. Bin different aperture angle corresponding to the zero flow.

在  $\theta_{\text{stop}}$  取锐角的情况下, 有  $\theta_{s\infty} = \theta_{\text{stop}}(D \rightarrow \infty) = 180^\circ - 158.4^\circ = 21.6^\circ (\pm 1^\circ)$ . 可以看到“直接零流量法”得到的  $\theta_{c\infty}$  角度在实验误差范围内几乎与前面的“流量测量法”的  $\theta_{r\infty}$  相同, 倾向支持这两种方法测量的是同一个临界角. 虽然“直接零流量法”少了一个外推拟合 (即图 3(a)) 的过程, 但  $\theta \rightarrow \theta_c$  时, 颗粒流也是以间歇流的方式逼近零流量的, 要确定真正零流量对应的  $\theta_{\text{stop}}$  也是比较困难并受主观判断影响的. 另外  $\theta$  增大的速率快慢也会带来一定的影响, 为避免它测量时应尽量缓慢. 而在“流量测量法”中, 流量  $Q$  和角度  $\theta$  的测量都是客观准确的, 不需加入任何主观的判断, 虽然多了一个直线外推, 但与“直接零流量法”相比显得更为客观.

## 2.3 库仑内摩擦角的测量

库仑最早将倾斜自由表面的静力失稳现象引申到材料内部<sup>[31]</sup>. 他曾提出, 如果静态颗粒体内部的某一个面发生临界力学失稳, 失稳面上的剪切应力 $\tau_f$ 与法向应力 $\sigma$ (又称正应力)之间满足下面的临界关系(或屈服准则):

$$\tau_f = c + \sigma \tan \varphi, \quad (4)$$

其中 $\varphi$ 和 $c$ 是两个材料性质, 分别称作内摩擦角和粘聚力. 干燥球形颗粒之间一般察觉不到粘聚力, 可以近似认为 $c \approx 0$ . (实际上库仑只考虑了 $c = 0$ 情况, 粘聚力 $c$ 是摩尔后来加入的, 故(4)式又称摩尔-库仑屈服准则). 测量内摩擦角需要对类固态颗粒样品逐渐施加剪切力, 直到发生失稳. 一个简单的办法是直接剪一个矩形颗粒固体, 利用如文献<sup>[34, 35]</sup>使用的剪切盒装置. 这时的临界力学失稳面就是剪切盒上下两层颗粒之间的水平交接面, 库仑临界(4)式中的 $\tau_f$ 和 $\sigma$ , 分别为施加于剪切盒的水平力和垂直正压力.

为便于比较, 我们选取与前面一样的玻璃颗粒材料, 采用与文献<sup>[33]</sup>相同的装置测量内摩擦角 $\varphi$ . 通常做这类剪切实验时, 来自样品制备过程和装置几何准直误差等不确定因素, 会导致实验出现可重复性较差等问题. 对此一个常用的解决办法, 是在正式测量前对样品做所谓“预剪切”操作<sup>[36]</sup>. 具体如下: 每次实验时, 都先对手工填入剪切盒的颗粒试样加载一个较大的正压力 $\sigma_{sf}$ , 随后施加剪切操作, 让剪应力升至一个接近但还没有发生失稳的常数值 $\tau = \tau_{sf} = \text{const.}$  再慢慢撤掉这个剪切力和正压力 $\sigma_{sf}$ , 然后开始正式测量某个小于 $\sigma_{sf}$ 的正压力 $\sigma$ 下的剪切曲线, 即图5. 实验共施加了五个不同的正压力 $\sigma_1 \rightarrow \sigma_5$ , 在每个正应力下做5次匀速剪切试验取平均, 实验过程中每次预剪切时的 $\sigma_{sf}$ 保持在240 kPa不变( $\sigma_{sf} > \sigma_{1-5}$ ).

测量库仑(4)式中内摩擦角的一个问题, 是如何判定样品开始出现失稳. 目前对此的处理多少都有主观性, 这是任何测量方法都回避不了的. 图5(a)和5(c)中的每个剪切曲线都有一个明显的峰值, 一些研究者倾向认为失稳在此峰值处开始发生. 图5(b)或图5(c)的插图是这个峰值切应力随正应力(或倒数)的变化, 它们都呈很好的线性关系. 如果将峰值看作(4)式中的 $\tau_f$ , 对应的内摩擦角就是图5(b)直线的斜率, 或图5(c)直

线的截距. 结果多少有些令人吃惊, 它们给出的 $\varphi = \arctan(\tau_f/\sigma) = 20.4^\circ \pm 1^\circ$ , 在误差范围内与本节介绍的前面两种方法测得的临界角相同.

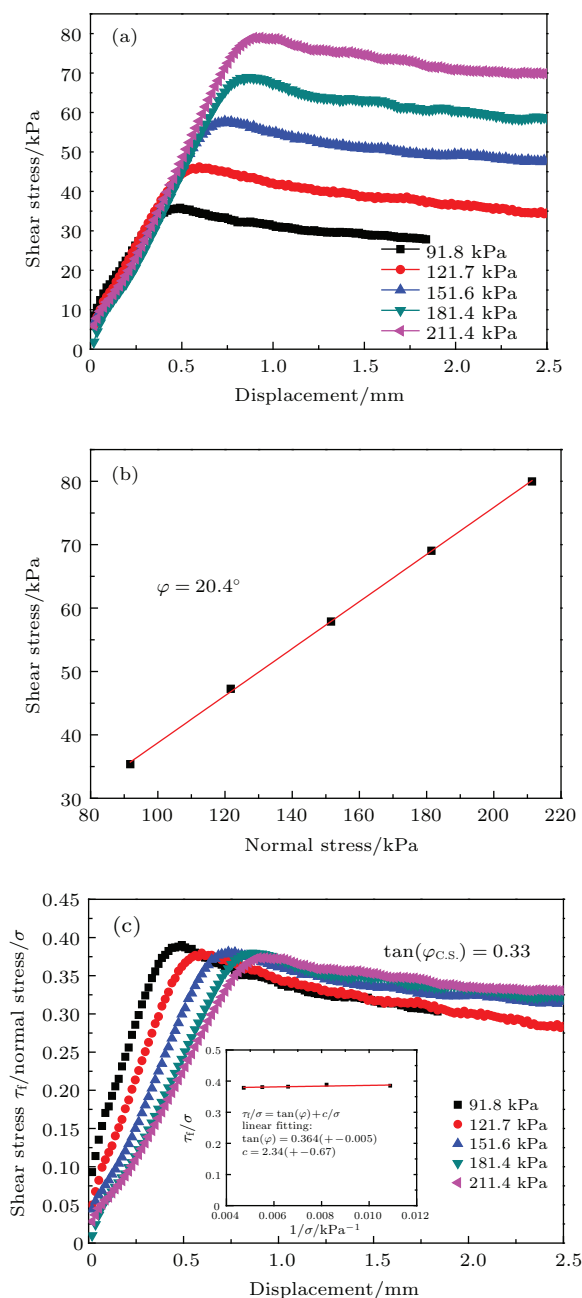


图5 (网刊彩色) (a) 不同正应力下切应力随剪切位移的变化曲线; (b) 峰值点处的切应力与正应力的关系; (c) 水平与正应力的比值随剪切位移的变化曲线; 插图: 比值的峰值随正应力倒数的变化及其线性拟合

Fig. 5. (color online) (a) The relationship of Normal stress and shear displacement; (b) The relationship of shear stress and normal stress at peak point; (c) of the stress ratio and displacement. Inset: the ratio versus inverse of normal stress and its linear fitting.

值得注意的是, 图5(c)的峰值有一个虽然不大, 但系统地随正压力的增加而减小的变化. 这

似乎意味着样品有不小, 但还是实验可察觉的粘聚力. 图 5(c) 插图的直线拟合给出的粘聚力  $c = (2.3 \pm 0.7)$  kPa, 的确很小 (不到正压力的 3%).

另外在图 5(a) 和图 5(c) 峰值的后面, 剪切曲线有明显的趋向饱和的趋势. 在饱和区域样品处于稳恒剪切变形的运动状态, 是一种颗粒固体特有的、弹性和流动同时存在的“临界状态 critical state”. 这时对应的摩擦角  $\varphi_{C.S.}$ , 又称临界状态角. 它也有一个不大但可察觉的, 系统地随正压力的增加而增加的变化. 我们猜测, 这也许与上面的样品粘聚力有关. 从图 5(c) 估算的  $\varphi_{C.S.}$  大约在  $16.7^\circ$ — $18.3^\circ$  之间, 也接近其他方法测得的临界角.

### 3 讨论和小结

表 1 是上节不同实验方法测到的, 同一玻璃珠样品的四个临界角  $\theta_{c\infty}, \theta_{s\infty}, \theta_r, \varphi$  的汇总. 这里的一个主要发现, 是它们的值在实验误差范围内几乎相同, 故倾向认为反映的是同一个材料物性. 由于这四种方法差异很大, 样品内部的应力或运动都不均匀, 甚至有类固-液-气的不同物态区及其交界过渡区, 目前还无法理论解释和定量分析这个实验结果及其背后的临界概念. 下面将仅限于给出一些定

性讨论.

首先我们注意到表 1 实验观测的都与某个颗粒固体面因剪切失稳出现静止与运动之间的转变有关, 即圆锥堆的自由侧面, 大的倾斜孔洞里的自由颗粒面, 和上下剪切盒之间的水平颗粒面. 粗略地讲可将它们都归为库仑屈服, 用失稳面上切应力与正应力的比值超过某临界值  $\tan \varphi$  来理解. 但如果仔细地看, 这里观测的静-动转变并不是一个简单的尖锐突变, 多少都有模糊区域. 这自然会使人对准确临界值的存在产生怀疑. 在自然堆积法里这个模糊区域源自大小不定的自由侧面崩塌现象, 大致为 Bagnold 角的大小. 在倾斜 Beverloo 流量法里它是在连续流动与不流动之间出现的间歇流区域. 而在剪切盒实验里, 剪切面始终处于匀速变形状态, 将临界值放在剪应力变化的峰值处合理, 还是后续的饱和值处, 也是说不清楚的. 由于这些模糊区域的存在, 表 1 中四个角度一样的实验结果不能简单地用一个屈服公式来解释 (如 (4) 式). 这方面的定量分析, 原则上需要一个能在远小于 Bagnold 角的精度范围里, 统一处理诸如自由表面崩塌, 连续和间歇 Beverloo 流动, 剪切盒内的非均匀应力和运动等复杂时间-空间演化动力学的理论.

表 1 四种不同实验测得的临界角值对比  
Table 1. The critical angles measured by four different experiments.

实验方法	自然堆积法	流量测量法	直接零流量法	剪切盒法
角度值	$\theta_r = 21.0^\circ (\pm 2^\circ)$	$\theta_{r\infty} = 20.5^\circ (\pm 1^\circ)$	$\theta_{s\infty} = 21.6^\circ (\pm 1^\circ)$	$\varphi = 20.4^\circ (\pm 1^\circ)$

从引言中可以看到, 长期以来人们围绕剪切作用下颗粒固体的“静止-流动”转变现象做了大量的实验研究, 但报道的各种临界角总是因为存在几度的差别而不能统一. 这使得对“是否存在一些统一表征该转变的临界常数”这个问题, 一直没有准确答案. 如存在这样的纯材料常数, 它应该与诸如样品几何形状、边界情况等外界因素关系不大. 从这个角度看, 倾斜 Beverloo 流量法测得的  $\theta_{r\infty}$  和剪切盒测得的临界状态角  $\varphi_{C.S.}$  比较合乎要求. 休止角  $\theta_r$  的各种测量方法往往与底板或容器壁的粗糙性, 以及堆积过程中颗粒的冲击强弱等有关, 不太适合看作纯材料常数. 剪切曲线的峰值角  $\varphi$  一般与初始样品制备的密度有关 (注意低密度样品根本就没有这个峰值 [3,4]), 故也不合适.

总而言之, 本文针对目前不同方法测得的颗粒

物质固液转变临界角不一致的问题, 系统测试和对比了三种不同装置的测量值, 发现在误差范围内它们相等. 其中之一为最近文献 [6] 报道的倾斜孔洞流装置, 本文在更宽的孔径范围里进一步验证了该方法的有效性. 这些结果倾向支持可以统一描述和表征颗粒固液转变的观点.

### 参考文献

- [1] Jaeger H M, Nagel S R, Behringer R P 1996 *Rev. Mod. Phys.* **68** 1259
- [2] Sheldon H G, Durian D J 2010 *Granular Matter* **12** 579
- [3] Thomas C C, Durian D J 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 178001
- [4] Thomas C C, Durian D J 2013 *Phys. Rev. E* **87** 052201
- [5] Janda A, Zuriguel I, and Maza D 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 248001

- [6] Peng Z, Jiang Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 054501 [彭政, 蒋亦民 2011 物理学报 **60** 054501]
- [7] Rubio-Largo S M, Janda A, Maza D, Zuriguel I, Hidalgo R C 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 238002
- [8] Ar'evaloab R, Garcimartínb A, Maza D 2007 *Eur. Phys. J. E* **23** 191
- [9] Christian T V, Dimon P 2001 *Granular Matter* **3** 151
- [10] Reydellet G, Rioual F E 2000 *Europhys. Lett.* **51** 27
- [11] Pennec T L, Ammi M, Messenger J C, Valancea A 1999 *Eur. Phys. J. B* **7** 657
- [12] Narayanan M, Douglas J D 1997 *Science* **28** 275
- [13] Baxter G W, Behringer R P 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 2825
- [14] Beverloo W A, Lengier H A 1961 *Chem. Eng. Sci.* **15** 260
- [15] Jaeger H M, Liu C H, Nagel S R 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 40
- [16] Nagel S R 1992 *Rev. Mod. Phys.* **64** 321
- [17] Bocquet L, Charlaix E, Ciliberto S, Crassous J 1998 *Nature* **396** 24
- [18] Christian M D, Gerald H R, Jamie L M, Masami Nakagawa 1988 *Phys. Rev. E* **57** 4991
- [19] Courrech du Pont S, Gondret P, Perrin B, Rabaud M 2003 *Europhys. Lett.* **61** 492
- [20] Hornbaker D J, Albert R 1997 *Nature* **387** 765
- [21] Tegzes P, Albert R, Paskvan M, Baraba'si A L, Vicsek T, Schiffer P 1999 *Phys. Rev. E* **60** 5823
- [22] Boltenhagen P 1999 *Eur. Phys. J. B* **12** 75
- [23] Jose M V, Antonio C, Antonio R 2000 *Phys. Rev. E* **62** 6851
- [24] Aguirre M A, Nerone N, Calvo A, Ippolito I, Bideau D 2000 *Phys. Rev. E* **62** 738
- [25] Albert R, Albert I, Hornbaker D, Schiffer P, Baraba'si A L 1997 *Phys. Rev. E* **56** 6271
- [26] Azadeh S, Kudrolli A 2001 *Phys. Rev. E* **64** 051301
- [27] Evesque P 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 44
- [28] Tennakoon S G K, Behringer R P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 794
- [29] Grasselli Y, Herrmann H J 1997 *Physica A* **246** 301
- [30] Liu C, Jeager H M, Nagel S R 1991 *Phys. Rev. A* **43** 7091
- [31] Bagnold R A 1954 *Proc. R. Soc. London A* **49** 225
- [32] Lajeunesse E, Mangeney-Castelnau A, Vilotte J P 2004 *Phys. Fluids* **16** 2371
- [33] Liu Z C 2008 *Measuring the Angle of Repose of Granular Systems Using Hollow Cylinders* (New York: Academic Press) pp33–40
- [34] Zhang Q, Li Y C, Hou M Y, Jiang Y M, Liu M 2012 *Phys. Rev. E* **85** 031306
- [35] Khidas Y, Jia X 2009 *Sound Scattering in Dense Granular Media* (Beijing: Science Press) pp4328–4336
- [36] Schwedes J 2003 *Granular Matter* **5** 1



# Inclined glass-sand flow and the angle of repose\*

Zhang Yu<sup>1)2)</sup> Wei Yan-Fang<sup>2)3)4)</sup> Peng Zheng<sup>5)</sup> Jiang Yi-Min<sup>5)</sup>  
Duan Wen-Shan<sup>1)</sup> Hou Mei-Ying<sup>2)†</sup>

1) (College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

2) (Key Laboratory of Soft Matter Physics, Beijing National Laboratory for Condense Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

3) (College of Physical Science and Technology, Yulin Normal University, Yulin 537000, China)

4) (Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

5) (School of Physical and Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

( Received 25 November 2015; revised manuscript received 22 December 2015 )

## Abstract

Systematic experimental study on inclined orifice flow and the measurement of the angle of repose are carried out in this work. The inclined orifice flow is formed by glass beads in an inclined channel. The flow is discharged near the bottom of the channel under gravity. The flow rates are measured at various inclination angles of the channel and opening sizes of the orifice. We then record the inclination angle when the rate becomes zero. We compare this zero-rate inclination angle with the repose angle of glass-beads, and the internal friction angle is determined by the yield stress obtained from a direct shear experiment. It is interesting to find that the experimental values at these three measured critical angles are equal within the experimental errors: 1) the supplementary angle of the extrapolating inclined angle at which the flow rate becomes zero and the inclined hole of diameter approaches infinitely large value (i. e.  $D \rightarrow \infty$ ),  $\theta_{s\infty} = 180 - \theta_{c\infty}$ , where  $\theta_c$  is the critical angle for the inclined hole of diameter  $D$  and  $\theta_{c\infty} \equiv \theta_c(D \rightarrow \infty)$ ; 2) the repose angle  $\theta_r$  of a cone-shaped pile, which is formed when particles fall from the top point of the heap onto a smooth bottom plate; and 3) the internal friction angle  $\varphi$  that is measured by direct shear experiment. This result intends to support that the solid-liquid transitions occurring in the inclined orifice flow and free surface of granular heap, and the Coulomb yield occurring in the bulk of the granular solid all originate from the same critical property. Owing to the fact that the internal stresses and strains of samples in the three cases all have complicated and nonuniform distributions so that they cannot be analyzed quantitatively at present, Only some qualitative discussion on this issue is given in this paper.

**Keywords:** inclined orifice flow, repose angle, internal friction angle, Beverloo formula

**PACS:** 45.70.-n, 45.70.Cc, 45.70.Ht, 45.70.Mg

**DOI:** 10.7498/aps.65.084502

\* Project supported by the Special Fund for Earthquake Research of China (Grant No. 201208011), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11274354, 11047003), and the “Strategic Priority Research Program-SJ-10” of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. XDA04020200).

† Corresponding author. E-mail: [mayhou@iphy.ac.cn](mailto:mayhou@iphy.ac.cn)