

基于间断有限元方法的并列圆柱层流流动特性

张忠宇 姚熊亮 张阿漫

Numerical simulation of laminar flow past two side-by-side cylinders by discontinuous Galerkin method

Zhang Zhong-Yu Yao Xiong-Liang Zhang A-Man

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 084701 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.084701

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.084701>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I8>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

三角波脉动流通栓的晶格玻尔兹曼方法模型

Triangle wave pulsating flow effect on thrombus simulated by the lattice Boltzmann method

物理学报.2016, 65(7): 074701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.074701>

多孔介质中流体流动及扩散的耦合格子 Boltzmann 模型

A coupled lattice Boltzmann model for fluid flow and diffusion in a porous medium

物理学报.2016, 65(1): 014702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.014702>

干斜压大气拉格朗日原始方程组的半解析解法和非线性密度流数值试验

Semi-analytical solution of the dry baroclinic Lagrange primitive equation and numerical experiment of a non-linear density current

物理学报.2015, 64(19): 194702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.194702>

流体力学拉氏守恒滑移线算法设计

Conservative sliding algorithms for hydrodynamics

物理学报.2015, 64(19): 194701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.194701>

燃烧系统的离散 Boltzmann 建模与模拟研究进展

Progress of discrete Boltzmann modeling and simulation of combustion system

物理学报.2015, 64(18): 184701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.184701>

基于间断有限元方法的并列圆柱层流流动特性*

张忠宇† 姚熊亮 张阿漫

(哈尔滨工程大学船舶工程学院, 哈尔滨 150001)

(2015年10月30日收到; 2016年1月11日收到修改稿)

基于高阶的间断有限元方法, 数值模拟低马赫数下并列圆柱的可压缩层流流动, 捕捉并列圆柱流场中的漩涡结构, 以便分析并列圆柱尾流的流动特性. 针对二维圆柱的边界形式, 采用曲边三角形单元构造二维圆柱的曲面边界, 以适应高阶离散格式的精度. 在验证方法合理性的基础上, 分析圆柱间距及雷诺数对漩涡脱落及受力特性的影响规律. 研究表明: 并列圆柱的间距是影响流场流动特性的一个主要因素, 它会改变圆柱漩涡脱落的形式. 随着圆柱间距的增加, 上下圆柱的平均阻力系数及平均升力系数的绝对值随之显著下降. 雷诺数对于平均阻力系数的影响相对较小. 但随着雷诺数的增加, 上下圆柱的平均升力系数会随之降低, 而漩涡的脱落频率会随之增大.

关键词: 间断有限元, 曲面边界, 并列圆柱, 漩涡脱落

PACS: 47.11.-j, 47.15.Tr, 02.70.Dh, 47.32.ck

DOI: 10.7498/aps.65.084701

1 引言

近些年来, 并列圆柱结构的绕流问题越来越多地出现在工程实际应用中, 如飞行器的起落架结构、海洋工程中的立管结构, 其在均匀来流场中会产生漩涡脱落而引起结构的涡激振动^[1]. 造纸机在生产过程也会存在类似圆柱绕流问题, 其流动的雷诺数为150—200^[2]. 因而, 并列圆柱的绕流特性及其尾涡流场动力特性受到广泛地关注.

Williamson^[3]通过实验研究了低雷诺数下并列圆柱的尾涡脱落特性, 通过实验结果可知: 圆柱绕流呈现层流流动特性, 且在一定的间距下, 尾流场将会出现两列卡门涡街. Sumner等^[4]对并列圆柱的尾涡特性进行了详细的分析, 根据圆柱间距的不同, 将尾涡类型分为单一钝体漩涡脱落、偏隙漩涡脱落及同步漩涡脱落. 而Zdravkovich^[5]对不同布置形式双圆柱的尾流形式做了总结, 重点关注了高雷诺数下两个圆柱漩涡脱落特性及受力特性. 随着计算机性能的提高, 研究者采用各种数值

方法对并列圆柱的尾流特性及受力特性进行了分析. Meneghini等^[6]采用有限元方法分析了串联和并列双圆柱在低雷诺数下的绕流问题, 在低雷诺数下, 流体流动被认为是二维的. 此外, Ding等^[7]提出了无网格最小二乘差分法, 用来研究低雷诺数下并列圆柱的受力特性, 数值结果与试验值符合良好. Chen等^[8]采用大涡模拟, 研究了并列圆柱尾流的湍流特性. Dong等^[9]采用格子玻尔兹曼方法数值求解圆柱阵列的流动特性, 分析了雷诺数对圆柱受力及尾涡流场的影响特性. 对于圆柱扰流问题求解的稳定性, Zhang等^[10]采用格子玻尔兹曼方法和离散分子动力学(DMD)方法进行了分析.

总而言之, 上述数值研究大部分都是基于不可压缩理论进行研究的, 且数值离散的空间精度一般为低阶, 提升至高阶往往需要较大的模板, 影响计算效率. 当然, 当马赫数小于0.3时, 可压缩流动与不可压缩流动的误差不超过5%, 而不可压缩流动的计算量会大幅减少, 因而人们在低马赫数时往往忽略可压缩性的影响. 随着工程技术的发展, 可压缩低雷诺数流动现象开始出现在工程应用

* 国家自然科学基金 (批准号: U1430236, 51479041) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhangyu061031@126.com

中,如微型涡轮发动机^[11],其可以为微型飞行器提供动力,发动机通道的直径很小,特征长度范围约为0.1—10 mm,流动雷诺数范围约为200—200000,马赫数范围约为0.05—1.0.梁德旺和黄国平^[11]通过微流动实验研究发现微尺度管道内气流在马赫数小于0.3时也具有不同于不可压缩层流的沿程能量损失.Liang等^[12]应用谱差分方法(spectral difference method)数值模拟了在马赫数为0.2且雷诺数为100的条件下,并列圆柱的漩涡脱落现象,并分析了两圆柱间距对于尾流场漩涡特性的影响.

为了更好地捕捉漩涡脱落的结构,研究并列圆柱的漩涡脱落特性,本文采用间断有限元方法(discontinuous Galerkin method, DG)数值模拟了在马赫数为0.2且雷诺数为200下并列圆柱可压缩层流绕流.间断有限元方法是近些年来发展的一种较为高效的高阶计算方法.该方法结合了有限元及有限体积的思想,易于提高计算方法的精度,离散格式相对较为紧致,所需模板较少,易于开展并行计算.该方法允许流体单元界面存在间断,以便更好地捕捉可压缩流动.另外,由于其所需模板较少,因而适用于非结构化网格,可进行复杂结构的计算,对网格的质量要求较低.间断有限元方法是1973年由Reed和Hill^[13]首先提出,并应用于求解中子输运方程.Cockburn和Shu^[14]将间断有限元方法推广到守恒方程,并给出了收敛性证明.目前,该方法已开始应用在可压缩Navier-Stokes方程的计算中.1997年,Bassi和Rebay^[15]首先提出了混合有限元的思想,将守恒变量的梯度作为辅助变量,通过引入全局提升算子,数值求解了可压缩Navier-Stokes方程,这种梯度降阶的处理方法称为BR1格式,但通过数学证明,这种格式是不稳定的.因而,Cockburn和Shu^[16]提出了局部间断有限元方法,Peraire和Persson^[17]将其改进形成了CDG方法(compact discontinuous Galerkin),Bassi等^[18]也对BR1格式进行了改进,提出了BR2格式.当采用高阶格式进行空间离散时,不能再采用常规的线性单元,因为线性单元不能满足间断有限元在进行边界积分所需的精度要求,因而曲面边界也需要采用高阶曲面进行描述^[19].

为此,本文针对二维圆柱的边界形式,提出采用曲边三角形单元构造二维圆柱的曲面边界.该方法简单方便,容易对圆柱边界进行处理.进而基于间断有限元方法,数值模拟并列圆柱的尾涡特性,

分析圆柱间距及雷诺数对尾涡脱落及受力特性的影响规律,以得到并列圆柱尾流场的流动机理.

2 数值方法

2.1 控制方程

针对并列圆柱在低雷诺数条件下的绕流问题,假设流体是可压且有黏性,则直角坐标系下可压缩Navier-Stokes方程在空间 Ω 范围内的形式如下:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (F^{\text{inv}}(U) - F^{\text{vis}}(U, \nabla U)) = 0$$

$$U \in \mathbb{R}^{d+2}; F^{\text{inv}}, F^{\text{vis}} \in \mathbb{R}^{d+2} \otimes \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

式中,空间 $\Omega \in \mathbb{R}^d$, d 为流体空间的维度, $d=2$; U 为控制方程的守恒变量; $F^{\text{inv}} = (f_1^{\text{inv}}, \dots, f_d^{\text{inv}})$ 和 $F^{\text{vis}} = (f_1^{\text{vis}}, \dots, f_d^{\text{vis}})$ 分别为流体的无黏通量和黏性通量,且其表达式分别为

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho E \end{pmatrix} f_j^{\text{inv}} = \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j + \delta_{ij} p \\ u_j (\rho E + p) \end{pmatrix} f_j^{\text{vis}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{ij} \\ u_i \tau_{ij} + q_j \end{pmatrix} \quad (i, j = 1, 2), \quad (2)$$

其中, ρ 为流体的密度, $v = (u_1, \dots, u_d)^T$ 为流体的速度, p 为流场中的压力, $E = e + 0.5v^2$ 为单位质量流体的总能量, e 为单位质量流体的内能. τ 和 q 分别为流体的黏性力张量和热传导能量,它们的具体形式如下:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij},$$

$$q_j = \frac{\gamma \mu}{Pr} \frac{\partial e}{\partial x_j}, \quad (3)$$

式中, μ 为流体的运动黏性系数, γ 为等压比热容 c_p 和等容比热容 c_v 的比值,取为1.4, Pr 为Prandtl常数,本文取为0.72.为了使方程组封闭,还需增加状态方程,建立流体中压力和内能之间的关系:

$$p = (\gamma - 1) \rho e. \quad (4)$$

2.2 间断有限元空间离散

间断有限元方法的基本原理与有限元方法类似,在每个单元内都是用一个关于试函数的线性组合表示求解域上未知变量,再根据变分原理求解一

个泛函取极小值的变分问题. 试函数在单元内部是连续的, 但在单元界面上允许存在间断, 在单元界面上允许变量在两相邻单元重构后所得到的值不同.

基于间断有限元方法的思想, 对流体的控制方程 (1) 进行求解, 寻求流体域中逼近于真实解的近似解 U_h . 因而, 对方程 (1) 两边乘以试函数 φ , 并在流体域 Ω 进行积分且对左端第二项进行分部积分, 可得:

$$\iint_{\Omega} \varphi \frac{\partial U_h}{\partial t} d\Omega - \iint_{\Omega} \nabla \varphi (F^{\text{inv}} - F^{\text{vis}}) d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \varphi (F^{\text{inv}} - F^{\text{vis}}) n d(\partial\Omega) = 0, \quad (5)$$

$\partial\Omega$ 为流体域的边界. 显然, (5) 式对任意试函数 φ 都应成立.

设 $\mathcal{T} = \{K\}$ 是区域 Ω 的所有网格单元 K 的集合, 且定义间断有限元空间:

$$V_h = \{\varphi_h \in L^2(\Omega) : \varphi_h|_K \in P^k(K), \forall K \in \mathcal{T}\}, \quad (6)$$

其中 $P^k(K)$ 是单元 K 上的所有次数不超过 k 次多项式的集合.

基于间断有限元思想, 将流体域中的近似解展开为关于试函数的线性叠加:

$$U_h(X, t) = \sum_{i=0}^N U_i(t) \varphi_i(X), \quad (7)$$

这样, 将近似解进行时空变量分离, 展开系数 $U_j(t)$ 为单元中的自由度, 只与时间有关. $\varphi_j(X)$ 为单元的试函数, 其关系到间断有限元离散的空间精度, 且在单元内是连续的. 试函数的个数与试函数的次数 k 相关:

$$N = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

因而, 通过改变试函数的个数, 就可以提高空间离散的精度.

这样, 将 (7) 式代入 (5) 式可得数值离散形式如下:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{i=0}^N \iint_K \varphi_j \varphi_i \frac{\partial U_i(t)}{\partial t} dK - \sum_{K \in \mathcal{T}} \iint_K \nabla \varphi_j (F^{\text{inv}}(U_h^-) - F^{\text{vis}}(U_h^-, \nabla U_h^-)) dK + \sum_{K \in \mathcal{T}} \iint_{\partial K^0} \varphi_j (\bar{F}^{\text{inv}}(U_h^-, U_h^+, n)) d(\partial K)$$

$$- \bar{F}^{\text{vis}}(U_h^-, U_h^+, \nabla U_h^-, \nabla U_h^+, n)) d(\partial K) + \sum_{K \in \mathcal{T}} \iint_{\Gamma} \varphi_j (\bar{F}^{\text{inv}}(U_h^-, U_h^b, n) - \bar{F}^{\text{vis}}(U_h^-, U_h^+, \nabla U_h^-, \nabla U_h^b, n)) d(\partial K) = 0, \quad (0 \leq j \leq N), \quad (9)$$

式中, ∂K^0 为流体单元的内边界, Γ 为流体域的物理边界. 为了有效地捕捉流体域中可能存在的激波等不连续现象, 间断有限元方法在单元边界处不需要满足连续条件, 其左侧的流体变量为 U_h^- , 与其相邻单元的变量值为 U_h^+ , 流体域物理边界处的变量值为 U_h^b , n 为单元的外法向, 如图 1 所示. $\bar{F}^{\text{inv}}$ 为流体边界处的无黏通量, 由于边界两侧均存在流体变量, 其可以看作一个黎曼问题. 为了保持流量的一致性和守恒性, 借鉴有限体积法, 无黏通量采用近似黎曼求解器进行求解, 本文主要采用 HLLC 格式 [20]. 该格式基于三波假设, 考虑接触间断, 存在两个中间变量 U_h^- , U_h^+ , 两个变量间的界面以速度 S_M 运动, 则可得到单元边界处的通量:

$$\bar{F}^{\text{HLLC}} = \begin{cases} \bar{F}(U_h^-), & S^- > 0, \\ \bar{F}(U_h^-) + S^-(U_*^- - U_h^-), & S^- \leq 0 \leq S_M, \\ \bar{F}(U_h^+) + S^+(U_*^+ - U_h^+), & S_M \leq 0 \leq S^+, \\ \bar{F}(U_h^+), & S^+ < 0, \end{cases} \quad (10)$$

其中,

$$U_*^{kk} = \rho_{kk} \left(\frac{S_{kk} - u_{kk}}{S_{kk} - S_M} \right) \times \begin{bmatrix} 1 \\ S_M \\ v_{kk} \\ \frac{E_{kk}}{\rho_{kk}} + (S_M - u_{kk}) \left[S_M + \frac{p_{kk}}{\rho_{kk}(S_{kk} - u_{kk})} \right] \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中, “ kk ” 分别表示左右两侧上标 “ $-$ ” 和 “ $+$ ”. 此外还需要知道 S_M , S^- , S^+ , 其中, 中间界面速度 S_M 为

$$S_M = \frac{p^+ - p^- + \rho^- u^- (S^- - u^-) - \rho^+ u^+ (S^+ - u^+)}{\rho^- (S^- - u^-) - \rho^+ (S^+ - u^+)}. \quad (12)$$

准确求解 S^- , S^+ 的值实际上是计算黎曼问题的精确解, 计算量较大, 一般采用估算的方法, 本文由 Roe 平均方式给出:

$$S^- = \bar{u} - \bar{c}, \quad S^+ = \bar{u} + \bar{c}, \quad (13)$$

式中, $\bar{u}$, $\bar{c}$ 分别为流体两侧单元的平均速度和平均声速.

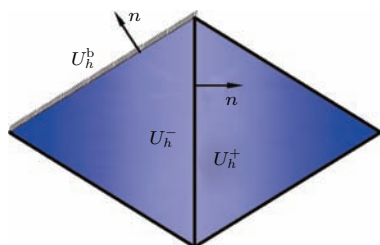


图 1 相邻单元示意图

Fig. 1. Internal element and adjacent element.

对于黏性项, 由于其还与流体变量的梯度有关, 因而通常需要先对梯度这种高阶导数进行降阶处理. 本文采用 BR2^[18] 格式对于黏性项进行处理, 首先引进辅助变量 $O = \nabla U_h$, 采用间断有限元离散该等式, 方程两边同时乘以试函数 Φ , 并在流体域 Ω 进行积分且对等式右端进行分部积分, 可得

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Omega} \Phi O \, d\Omega = & - \iint\limits_{\Omega} O \nabla \cdot \Phi \, d\Omega \\ & + \iint\limits_{\partial\Omega} \bar{O} \Phi n \, d(\partial\Omega). \end{aligned} \quad (14)$$

$\mathcal{T} = \{K\}$ 是区域 Ω 的所有网格单元 K 的集合, 定义间断有限元空间 V_h^d :

$$V_h^d = \{\Phi_h \in L^2(\Omega)^d : \Phi_h|_K \in [P^k(K)]^d, \forall K \in \mathcal{T}\}, \quad (15)$$

将 (14) 式右端第一项再进行一次分部积分, 并离散到单元中:

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}} \iint\limits_K \Phi_h \cdot O \, dK \\ = & \sum_{K \in \mathcal{T}} \iint\limits_K \Phi_h \cdot \nabla U_h \, dK \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}} \iint\limits_{\partial K} (\hat{U}_h - U_h^-) \Phi_h \cdot n \, d(\partial K), \\ & \Phi_h \in V_h^d. \end{aligned} \quad (16)$$

上式中 $\hat{U}_h$ 为流体变量在单元边界处的通量值, 其在流体单元的内边界 ∂K^0 和流体域物理边界 Γ 处

的取值为

$$\hat{U}_h = \begin{cases} \frac{1}{2}(U_h^- + U_h^+), & \text{in } \partial K^0, \\ U_h^b, & \text{in } \Gamma. \end{cases} \quad (17)$$

进而, 引进局部提升算子 r_h , 对于流体单元中的每条边, 都有如下形式:

$$\begin{aligned} \iiint\limits_K \Phi_h \cdot r_h \, dK = & \iint\limits_{\sigma} (\hat{U}_h - U_h^-) \Phi_h \cdot n \, d\sigma, \\ & \sigma \in \partial K. \end{aligned} \quad (18)$$

当得到局部提升算子后, 将得到的单元中变量梯度 O 代入黏性通量 $\bar{F}^{\text{vis}}$, 进而求取数值黏性通量. 对于该通量, 通常取边界两侧通量的数值平均, 如下:

$$\bar{F}^{\text{vis}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ \bar{F}^{\text{vis}}(U_h^-, \nabla U_h^- + \eta r_h^-, n) \right. \\ \left. + \bar{F}^{\text{vis}}(U_h^+, \nabla U_h^+ + \eta r_h^+, n) \right\}, & \text{in } \partial K^0, \\ \bar{F}^{\text{vis}}(U_h^b, \nabla U_h^b + \eta r_h^b, n), & \text{in } \Gamma, \end{cases} \quad (19)$$

式中, 上标 “-” 号表示所需计算的流体单元, “+” 号表示与其相邻的流体单元; η 为稳定性因子, 本文取 $\eta = 4.0$.

将上式代入 (9) 式可得可压缩 Navier-Stokes 方程的间断有限元离散格式:

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{i=0}^N \iint\limits_K \varphi_j \varphi_i \frac{\partial U_i(t)}{\partial t} \, dK \\ & - \sum_{K \in \mathcal{T}} \iint\limits_K \nabla \varphi_j \left(F^{\text{inv}}(U_h^-) \right. \\ & \quad \left. - F^{\text{vis}}(U_h^-, \nabla U_h^- + R_h^-) \right) \, dK \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}} \iint\limits_{\partial K^0} \varphi_j \left(\bar{F}^{\text{inv}}(U_h^-, U_h^+, n) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ \bar{F}^{\text{vis}}(U_h^-, \nabla U_h^- + \eta r_h^-, n) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \bar{F}^{\text{vis}}(U_h^+, \nabla U_h^+ + \eta r_h^+, n) \right\} \right) \, d(\partial K) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}} \iint\limits_{\Gamma} \varphi_j \left(\bar{F}^{\text{inv}}(U_h^-, U_h^b, n) \right. \\ & \quad \left. - \bar{F}^{\text{vis}}(U_h^b, \nabla U_h^b + \eta r_h^b, n) \right) \, d(\partial K) = 0, \\ & 0 \leq j \leq N. \end{aligned} \quad (20)$$

上式的简化形式:

$$M \frac{dU_h}{dt} = R(U_h), \quad (21)$$

其中, U_h 为所有单元数值解组成的矢量, R 是其对应的残差矢量, M 为单元质量矩阵, 且其对角线的元素为每一个单元的质量矩阵:

$$M_{ij} = \int_K \phi_i \phi_j dK, \quad \forall K \in \mathcal{T}, 1 \leq i, j \leq N. \quad (22)$$

对于试函数, 本文采用基于泰勒展开形式的基函数^[21], 该基函数的存储变量放在单元的中心, 方程采用三阶 Runge-Kutta 格式进行时间离散.

$$\begin{aligned} U_h^{(1)} &= U_h^m + \Delta t M^{-1} R(U_h^m), \\ U_h^{(2)} &= \frac{3}{4} U_h^m + \frac{1}{4} [U_h^{(1)} + \Delta t M^{-1} U_h^{(1)}], \\ U_h^{m+1} &= \frac{1}{3} U_h^m + \frac{2}{3} [U_h^{(2)} + \Delta t M^{-1} U_h^{(2)}], \end{aligned} \quad (23)$$

式中, U_h^m 为第 m 个时间步下流场中的数值解, Δt 为时间步长.

2.3 曲面边界

低价格的数值方法是采用线性单元来对计算域进行离散的, 而间断有限元方法是通过提高试函数的次数来得到较高的空间精度, 这也要求边界

条件需具有至少相等的空间精度. 这是因为离散方程 (20) 需要进行边界积分, 实现高精度通常需要对积分项采用适当的高斯积分, 这就要求边界积分点必须满足边界的几何信息. 因而当边界是曲面时, 为了使边界也达到相同的精度要求, 需对其进行曲面边界的构造. 不同于的三次样条曲线构造^[19], 本文针对圆柱这种规则的几何曲面, 提出一种简易的构造方法. 本文使用三角形网格对计算域进行离散, 因而先将三角形的线性单元中的中点 (点 5) 投影到圆柱的表面上, 在进行边界积分计算时, 将该单元等参到母单元, 母单元采用六节点的等参元, 如图 2 所示. 在构造为曲面单元后, 在圆柱边界上施加无滑移绝热边界条件, 边界的法向为圆柱表面的真实法向方向, 边界处的密度和能量与相连单元的数值解相等, 边界处的速度为 0, 具体形式如下:

$$\begin{cases} \rho^b = \rho^-, \\ u_i^b = 0, \\ E^b = E^-. \end{cases} \quad (24)$$

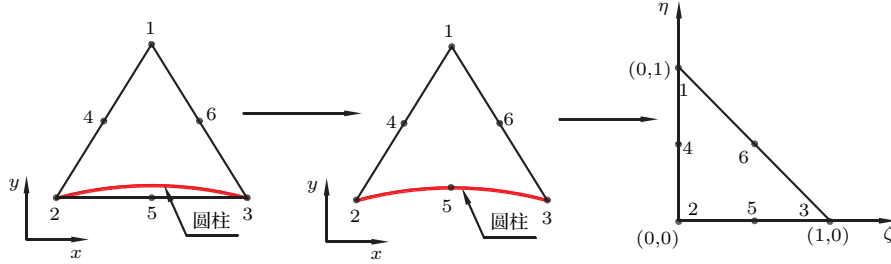


图 2 曲面边界的构造

Fig. 2. Construction of curved boundary.

3 数值验证

为了验证该方法的合理性, 本文首先开展雷诺数为 200, $Ma = 0.1$ 下的单个圆柱的绕流模拟. 圆柱的直径 D 为特征长度, 来流速度 U_∞ 为特性速度, 来流流体的密度 ρ_∞ 为特征密度, 计算域如图 3 所示. 试函数的最大次数 $k = 2$, 这样空间离散的精度为三阶. 入口采用特征边界条件, 入口距圆柱中心点的距离为 $10D$. 出口采用压力出口边界条件, 距圆柱中心点的距离为 $20D$. 上下边界采用对称边界条件, 距圆柱中心点的距离为 $10D$, 数值模拟中流场的初始条件为来流值. 为了将数值结果与 Luo

等^[22]的结果进行对比, 定义圆柱的升力系数、阻力系数、无量纲时间、平均升力系数、平均阻力系数为

$$\begin{aligned} C_l &= \frac{2F_l}{\rho_\infty U_\infty^2}, \quad C_d = \frac{2F_d}{\rho_\infty U_\infty^2}, \quad T = \frac{t}{D/U_\infty}, \\ \bar{C}_l &= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} C_l dT, \\ \bar{C}_d &= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} C_d dT, \end{aligned} \quad (25)$$

式中, F_l 为圆柱受到的升力, F_d 为圆柱所受到的阻力, $T_2 - T_1$ 一般取阻力或升力的脉动周期. 此外, 为了分析圆柱的漩涡脱落特性, 本文定义斯特罗哈数 St 为

$$St = \frac{1}{T_2 - T_1}. \quad (26)$$

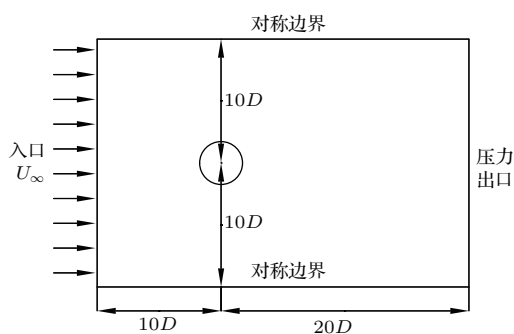


图3 单个圆柱计算域示意图

Fig. 3. Computational domain for the isolated cylinder.

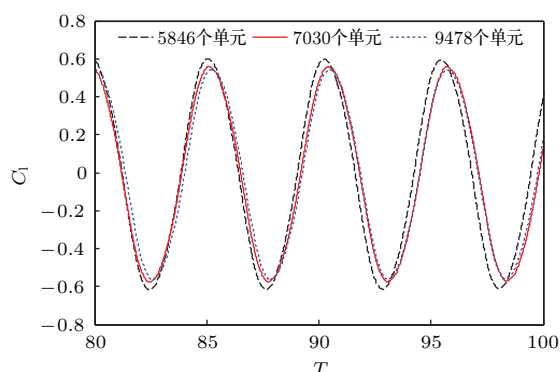


图4 收敛性分析

Fig. 4. Convergence study.

计算域采用三角形网格进行离散, 为了进行网格收敛性分析, 本文将计算域分别离散为5846个单元、7030个单元及9478个单元. 图4为不同网格单元下圆柱的升力曲线随时间的变化曲线. 从图4中可以看到, 不同的网格单元并没有改变升力曲线的变化趋势. 随着网格单元的増加, 升力曲线趋近于重合, 网格收敛性良好.

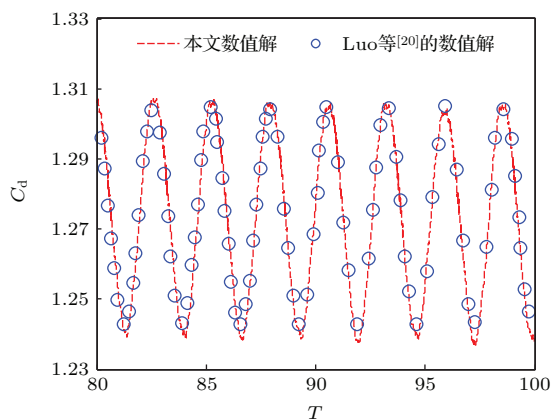


图5 单个圆柱阻力系数与 Luo 等 [20] 的对比曲线

Fig. 5. Comparisons of drag coefficient with those by Luo *et al.* [20] for the isolated cylinder.

图5和图6分别为单个圆柱绕流所受阻力和升力的时历曲线, 从图中可以看到, 本文数值解与Luo等[22]的结果符合相对较好. 本文数值模拟的平均阻力系数为1.28, 平均升力系数为0. 而Meneghini等[6]采用有限元方法模拟的平均阻力系数为1.30, 与本文数值模拟的结果基本相符. 另外, 本文模拟表征漩涡脱落的斯特罗哈数 St 为0.187, Luo等[22]的漩涡脱落频率为0.188, 符合相对较好. Roshko[23]通过实验发现单个圆柱绕流的漩涡脱落频率在0.17—0.19之间, 进一步说明本文的合理性.

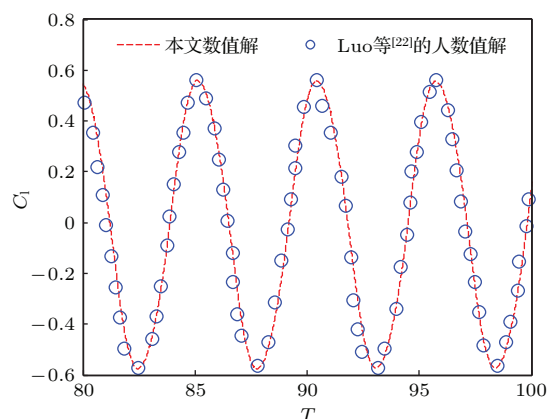


图6 单个圆柱升力系数与 Luo 等 [22] 的对比曲线

Fig. 6. Comparisons of lift coefficient with those by Luo *et al.* [22] for the isolated cylinder.

4 并列圆柱的层流绕流模拟

并列圆柱是工程中经常出现的结构形式, 本文在Liang等[12]工作的基础上(马赫数为0.2且雷诺数为100并列圆柱绕流), 采用高阶间断有限元方法, 数值模拟雷诺数为200, 马赫数为0.2下并列圆柱的漩涡脱落及受力特性, 流场的计算域如图7所示. 两圆柱圆心间的距离为 S , 定义无量纲的圆柱间距为 $S^* = S/D$. 入口采用特征边界条件, 入口距圆柱中心点的距离为 $15D$. 出口采用压力出口边界条件, 距圆柱中心点的距离为 $30D$. 上下边界采用对称边界条件, 距计算域中心线的距离为 $15D$, 数值模拟中流场的初始条件为来流值. 为了分析并列圆柱的漩涡脱落特性, 本文采用无量纲的涡量来识别流场中的漩涡[24]:

$$\omega = \frac{\|s\|^2 - \|\varpi\|^2}{\|s\|^2 + \|\varpi\|^2}, \quad (27)$$

式中, s 为流体的变形速率, ϖ 为流体的旋转张量, 且

$$\begin{aligned}\|s\|^2 &= s_{ij}s_{ij}, \quad \|\varpi\|^2 = \varpi_{ij}\varpi_{ij}, \\ s_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \varpi_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2.\end{aligned}$$

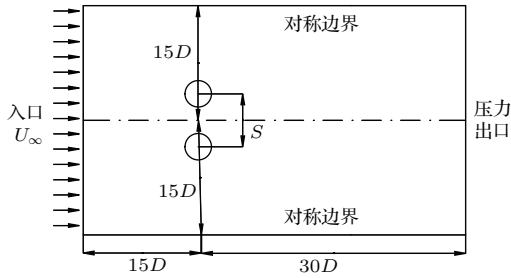


图7 并列圆柱计算域示意图

Fig. 7. Computational domain for two side by side cylinders.

4.1 圆柱中心距离对并列圆柱流场特性的影响

本文首先研究两圆柱中心距离对并列圆柱的尾涡流场特性的影响, 并列圆柱的间距 S^* 分别选取为 1.1, 1.4, 2.5, 4.0. 计算区域采用三角形网格离散, 圆柱表面布置 60 个节点, 离散单元数量分别为 9136, 9892, 9680, 10968. 图 8 为两圆柱中心距离 S^* 为 1.1 时某时刻流场中的尾涡场. 由图可知, 在两圆柱后面的流场只形成一个单列涡街. 可见, 由于圆柱之间的距离相对较小, 圆柱间隙内的流动不会产生相对的扰动, 流场的特性与单个圆柱的绕流特性相似, 这一流动特性被称为单一钝体漩涡脱落流动. 这一现象从两个圆柱的升力曲线中也可以看出, 如图 9 所示. 两个圆柱的升力曲线的相位基本一致, 只是极值不同.

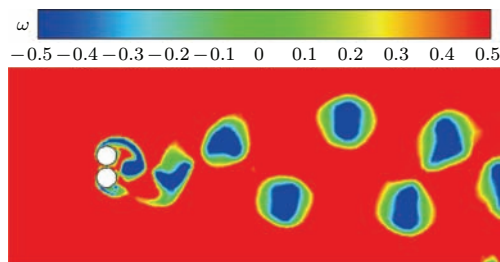


图8 (网刊彩色) $T = 160$ 时无量纲间距为 1.1 的并列圆柱涡量图

Fig. 8. (color online) Vorticity contour of two side by side cylinders for gap spacing is 1.1 at $T = 160$.

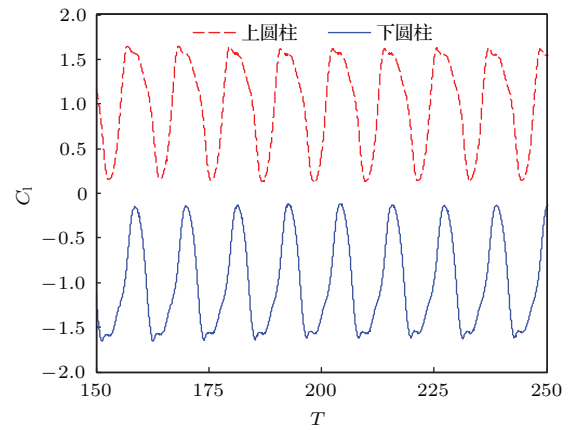
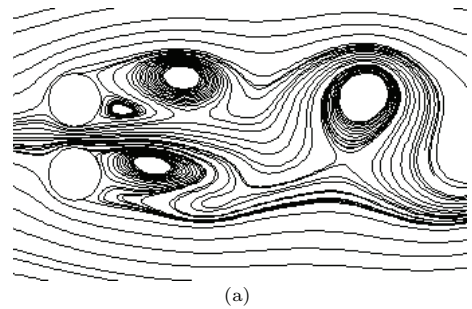
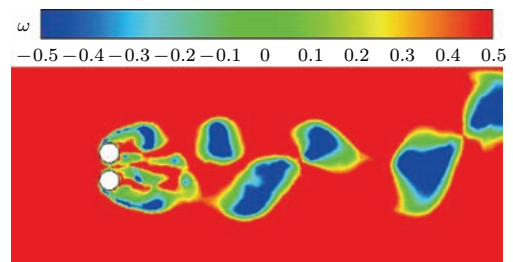


图9 无量纲间距为 1.1 并列圆柱的升力系数曲线

Fig. 9. Lift coefficient of two side by side cylinders for gap spacing is 1.1.



(a)



(b)

图10 (网刊彩色) $T = 145.6$ 时刻无量纲间距为 1.4 的并列圆柱流场 (a) 局部流线图; (b) 涡量

Fig. 10. (color online) Wake of two side by side cylinders for gap spacing is 1.4 at $T = 145.6$: (a) Streamlines; (b) vorticity contour.

当两圆柱中心距离逐渐增加时, 尾流涡场的特性将会发生改变, 如图 10 所示. 当圆柱间距增加到 1.4 时, 两圆柱中间的流动使近圆柱附近的尾流场呈现不稳定性. 由于间隙的存在, 流体流过圆柱表面时, 圆柱会使流体的流动发生偏转, 这一点从流场的流线图中可以看到. 在 $T = 145.6$ 时刻, 流体经过上圆柱使得流动向着右下侧发生偏转, 偏转的流动将会改变圆柱表面的漩涡脱落, 使得尾流涡场呈现不对称性, 且在流场的下游合并为同一个漩涡, 如图 10 (b) 所示. Kim^[25] 通过实验也观察到这一物理现象, 而且随着流动的持续, 流动的偏转方

式将会发生变化, 即流动将会在下圆柱发生偏转, 并向着流场的右上方流动. 通过实验发现, 这种流动方式的转变是完全随机的, 完全可以看作一个泊松随机过程. 这种流动方式转变的平均周期是漩涡脱落周期的数倍, 从而使得尾流场中的漩涡脱落呈现不规则特性. 图 11 为两圆柱升力系数的时历曲线, 从曲线中可以看到, 两圆柱的漩涡脱落并不呈现周期性变化, 是非定常的. 因而, 流场随机特性使得圆柱表面的压力也不会呈现周期性变化规律, Kim^[25] 通过实验也观察到这一物理现象. 可见, 圆柱间距之间的流动产生了相应的扰动, 改变了并排圆柱尾流场的特性.

当流场中的间距增加到 2.5 时, 两圆柱同时发生漩涡脱落现象, 即在同一相位发生脱落, 如图 12 所示. 从升力最大和最小时刻的流线图中可以看到, 两个圆柱上漩涡脱落的位置是一致的, 从而使得圆柱的升力的相位也是一致的, 如图 13 所示. 当漩涡运动到圆柱的顶部附近时, 会诱导圆柱顶部区域产生低压, 从而使圆柱的升力达到极大值. 同理, 当

漩涡运动到圆柱的底部时, 会使圆柱底部区域产生低压, 从而使圆柱的升力达到极小值. 但由于圆柱之间间隙流动的存在, 在远离圆柱的尾流场中, 脱落的漩涡将会合并为同一个漩涡, 并使得两圆柱的升力幅值存在一定的差距.

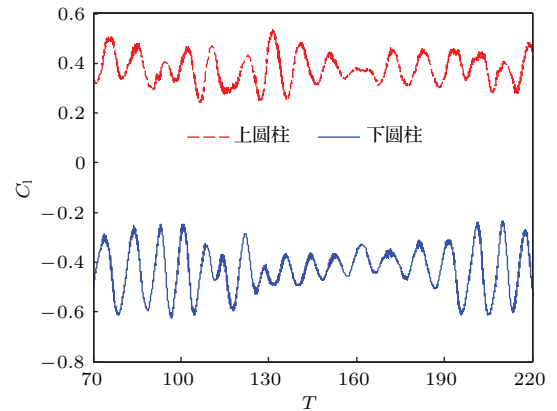


图 11 无量纲间距为 1.4 的并列圆柱的升力系数曲线
Fig. 11. Lift coefficient of two side by side cylinders for gap spacing is 1.4.

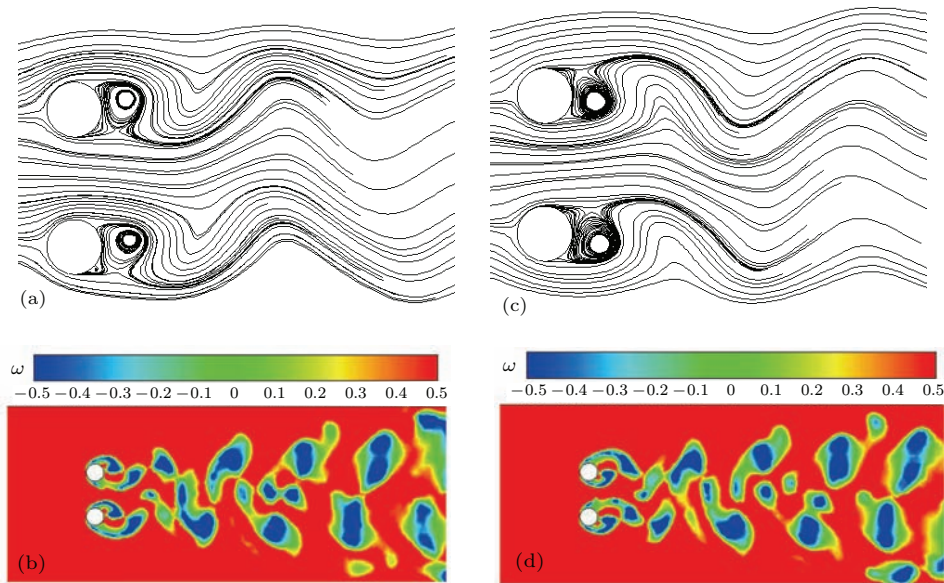


图 12 (网刊彩色) 无量纲间距为 2.5 的并列圆柱流场 (a) 升力极大值时局部流线图; (b) 升力极大值时涡量图; (c) 升力极小值时局部流线图; (d) 升力极小值时涡量图
Fig. 12. (color online) Wake of two side by side cylinders for gap spacing is 2.5: (a) Streamlines for the moment of the maximum lift force; (b) vorticity contour for the moment of the maximum lift force; (c) streamlines for the moment of the minimum lift force; (d) vorticity contour for the moment of the minimum lift force.

当圆柱中心距离为 4 时, 并列的两个圆柱仍会同时发生漩涡脱落现象, 且产生两列互不影响的涡街, 并沿着流场的中心线对称, 如图 14 所示. 在此间距下, 流场下游的涡不会发生合并现象. 但通过

Zhou 等^[26] 的实验可知, 在高雷诺数情况下, 由于湍流的影响, 使流场中流体质点的动量充分交换, 两列涡街最后仍会合并为同一列涡街. 由于并列圆柱漩涡脱落的对称性, 使得两圆柱的升力呈现

为 180° 的相位差,如图15所示.而且,在此工况下,圆柱之间的间隙流动对于圆柱的漩涡脱落影响相对较小,两圆柱的升力曲线的极值相差不大.因而,称这种流动为异相漩涡脱落现象.

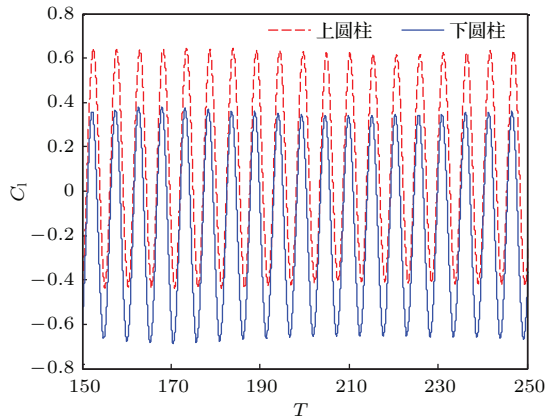


图13 无量纲间距为2.5的并列圆柱的升力系数曲线
Fig. 13. Lift coefficient of two side by side cylinders for gap spacing is 2.5.

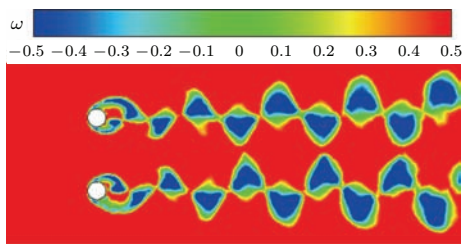


图14 (网刊彩色) $T = 93.4$ 时刻无量纲间距为4的并列圆柱流场
Fig. 14. (color online) Vorticity contour of two side by side cylinders for gap spacing is 4 at $T = 93.4$.

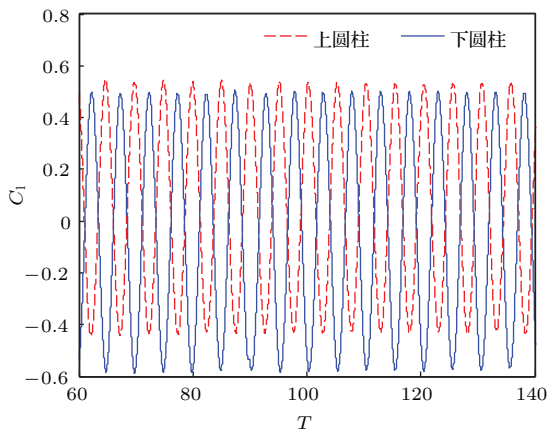


图15 无量纲间距为4的并列圆柱的升力系数曲线
Fig. 15. Lift coefficient of two side by side cylinders for gap spacing is 4.

图16为两圆柱的平均阻力系数随着圆柱间的距离 S^* 的变化曲线.由于在 $S^* = 1.4$ 的工况下,圆柱漩涡的脱落现象不会呈现周期性的变化,因而本

文在计算平均阻力或者平均压力的过程中,时间选取为整个计算时间.从图中可以看到,随着无量纲间距的增加,圆柱的平均阻力系数显著下降.由前文可知,当圆柱之间的距离较小时,间隙间的流动影响较小,流体好像只流过一个物体,圆柱受到较大的阻力.之后随着圆柱间距的增加,圆柱间隙之间的流动对圆柱的漩涡脱落的影响越来越弱,使得圆柱受到的阻力变小.

图17为两圆柱的平均升力系数随着圆柱间的距离 S^* 的变化曲线.从图中可以看到,两个圆柱的平均升力系数的绝对值也随着间距的增加而减少.两个圆柱之间仿佛存在一个“排斥力”,随着间距的增加,这种“排斥力”逐渐减小,圆柱的平均升力趋向于0.另外,由圆柱的升力时历曲线可知,在圆柱间距为1.1, 2.5及4.0工况下,其对应的漩涡脱落频率分别为0.091, 0.190及0.198,可见,随着间距的增加,间隙流产生扰动的影响越来越小,漩涡脱落的频率逐渐增加.

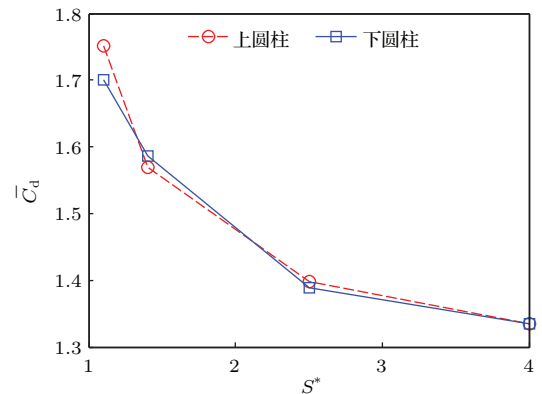


图16 平均阻力系数随着圆柱间的距离 S^* 的变化
Fig. 16. Gap spacing S^* dependence for average drag coefficient.

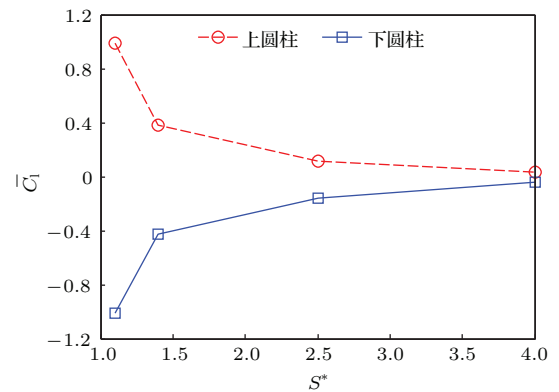


图17 平均升力系数随着圆柱间的距离 S^* 的变化
Fig. 17. Gap spacing S^* dependence for average lift coefficient.

4.2 雷诺数对并列圆柱流场特性的影响

为了定性分析雷诺数的影响, 本文数值模拟间距为2.5的并列圆柱在雷诺数为100及150下的绕流特性, 并与雷诺数为200的工况进行对比分析. 图18及图19分别为雷诺数为100及150时并列圆柱的尾流场中的涡量图. 从图中可以看到, 雷诺数并没有改变漩涡脱落的方式, 两个圆柱的尾流场仍然呈现同相漩涡脱落现象. 雷诺数为100的并列圆柱的漩涡脱落形式与Liang等^[12]的数值结果相一致, 进一步验证本文方法的合理性. 可见, 在层流范围内, 圆柱间距对漩涡脱落形式的影响强于雷诺数的影响.

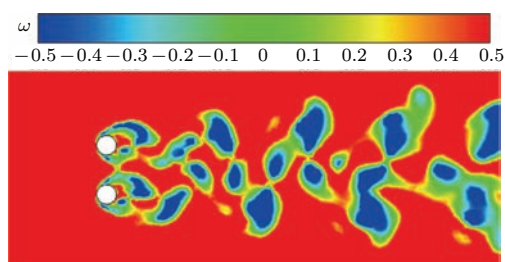


图18 (网刊彩色) 雷诺数为100时并列圆柱的涡量图
Fig. 18. (color online) Vorticity contour of two side by side cylinders for Reynolds number is 100.

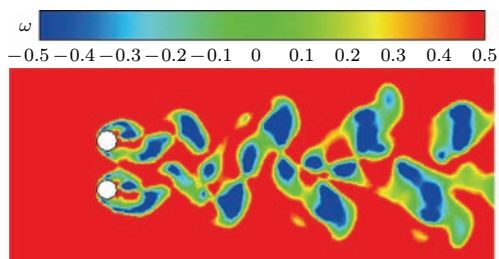


图19 (网刊彩色) 雷诺数为150时并列圆柱的涡量图
Fig. 19. (color online) Vorticity contour of two side by side cylinders for Reynolds number is 150.

图20为并列圆柱的平均阻力系数、平均升力系数及表征漩涡脱落频率的斯特罗哈数 St 随雷诺数的变化曲线, 从图中可以看到, 雷诺数对于平均压力系数的影响相对较小. 可见, 相比于雷诺数而言, 间距对并列圆柱的平均阻力系数影响较为明显. 同距离的影响趋势一样, 随着雷诺数的增加, 上下圆柱的平均升力系数会随之降低. 由于在此工况下, 上圆柱和下圆柱的漩涡脱落是同相位的, 上下圆柱的漩涡脱落频率是一致的. 所以, 本文只给出了下圆柱的漩涡脱落频率随着雷诺数的变化曲线. 随着雷诺数的增加, 但漩涡的脱落频率随之增

大. 另外, 并列圆柱的漩涡脱落频率比单个圆柱的漩涡脱落频率略高.

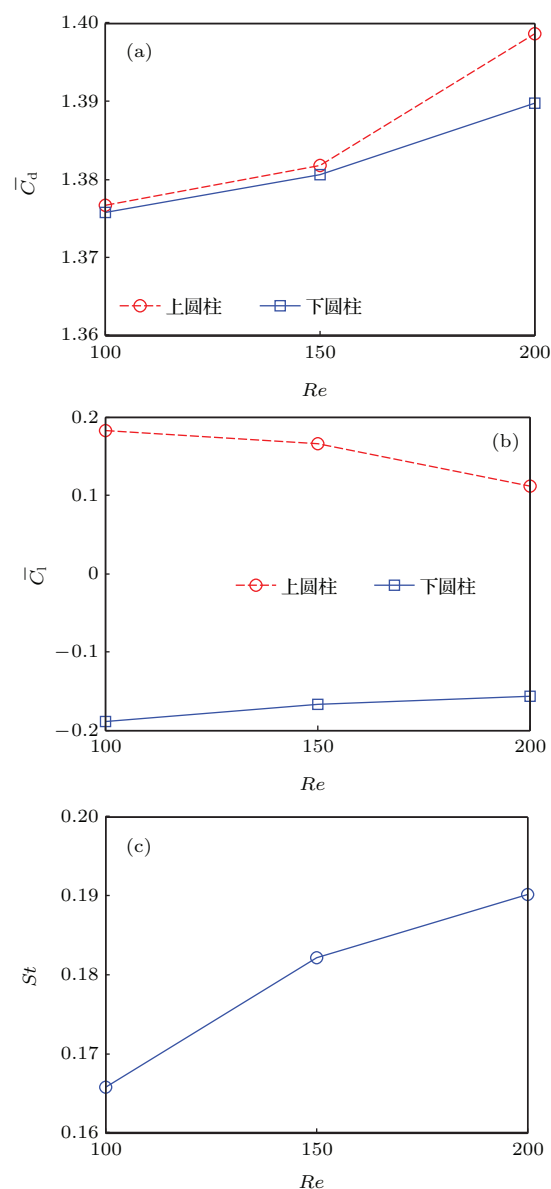


图20 并列圆柱的受力随雷诺数的变化曲线 (a) 平均阻力系数; (b) 平均升力系数; (c) 斯特罗哈数

Fig. 20. Reynolds number dependence for force of two side by side cylinders: (a) Average drag coefficient; (b) average lift coefficient; (c) Strouhal number.

5 结 论

基于高阶的间断有限元方法离散控制方程, 提出采用曲边三角形单元构造二维圆柱的曲面边界, 形成计算低雷诺数下并列圆柱绕流问题的高阶计算方法. 在验证方法合理性的基础上, 数值模拟了低马赫数下雷诺数为200的并列圆柱的流动, 分析圆柱间距及雷诺数对漩涡脱落及受力特性的影响规律, 得到以下结论.

1) 并列圆柱中心距离 S^* 为 1.1, 在上下圆柱后面的流场只形成一个单列涡街, 圆柱间隙内的流动不会产生相对的扰动. 当圆柱间距增加到 1.4 时, 上下圆柱中间的流动使近圆柱附近的尾流场呈现不稳定性, 圆柱的漩涡脱落并不是呈现周期性变化的. 当流场中的间距 S^* 为 2.5 时, 上下圆柱在同一位置同时发生漩涡脱落现象. 但在远离圆柱的尾流场中, 脱落的漩涡将会合并为同一个漩涡. 当圆柱中心距离为 4 时, 并列的两个圆柱发生异相漩涡脱落现象, 且产生两列互不影响的涡街, 沿着流场的中心线对称.

2) 随着圆柱间距的增加, 圆柱的平均阻力系数显著下降, 且上下圆柱的平均升力系数的绝对值也随之减少. 两个圆柱之间仿佛存在一个“排斥力”, 随着间距的增加, 这种“排斥力”逐渐减小, 圆柱的平均升力趋向于 0.

3) 当圆柱间距为 2.5 时, 雷诺数并没有改变漩涡脱落的方式, 两个圆柱的尾流场仍然呈现同相漩涡脱落现象. 雷诺数对于平均压力系数的影响相对较小. 同距离的影响趋势一样, 随着雷诺数的增加, 上下圆柱的平均升力系数会随之降低, 但漩涡的脱落频率随之增大.

参考文献

- [1] Chen Y, Fu S X, Xu Y W, Zhou Q, Fan D X 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 064701 (in Chinese) [陈莹, 付世晓, 许玉旺, 周青, 范迪夏 2013 物理学报 **62** 064701]
- [2] Huang Z, Olson J A, Kerekes R J, Green S I 2006 *Comput. Fluids* **35** 485
- [3] Williamson C H K 1985 *J. Fluid Mech.* **159** 1
- [4] Sumner D, Wong S S T, Price S J, Paidoussis M P 1999 *J. Fluid. Struct.* **13** 309
- [5] Zdravkovich M M 1977 *J. Fluid. Eng.* **99** 618
- [6] Meneghini J R, Saltara F, Siqueira C L R, Ferrari J A 2001 *J. Fluid. Struct.* **15** 327
- [7] Ding H, Shu C, Yeo K S, Xu D 2007 *Int. J. Numer. Meth. Fl.* **53** 305
- [8] Chen L, Tu J Y, Yeoh G H 2003 *J. Fluid. Struct.* **18** 387
- [9] Dong P, Feng S D, Zhao Y 2004 *Chin. Phys. B* **13** 434
- [10] Zhang W, Wang Y, Qian Y H 2015 *Chin. Phys. B* **24** 064701
- [11] Liang D W, Huang G P 2004 *Gas. Turb. Exp. Res.* **17** 9 (in Chinese) [梁德旺, 黄国平 2004 燃气涡轮试验与研究 **17** 9]
- [12] Liang C, Premasuthan S, Jameson A 2009 *Comput. Struct.* **87** 812
- [13] Reed W H, Hill T R 1973 *Los Alamos Report* **73** 479
- [14] Cockburn B, Shu C W 1991 *Math. Model. Num.* **25** 337
- [15] Bassi F, Rebay S 1997 *J. Comput. Phys.* **131** 267
- [16] Cockburn B, Shu C W 1989 *Math. Comput.* **52** 411
- [17] Peraire J, Persson P O 2008 *Siam J. Sci. Comput.* **30** 1806
- [18] Bassi F, Crivellini A, Rebay S, Savini M 2005 *Comput. Fluids* **34** 507
- [19] Yu J, Yan C 2010 *Acta Mech. Sin.* **5** 962 (in Chinese) [于剑, 阎超 2010 力学学报 **5** 962]
- [20] Toro, Eleuterio F 2009 *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction* (Netherlands: Springer Science & Business Media) pp315–336
- [21] Luo H, Baum J D, Lohner R 2008 *J. Comput. Phys.* **227** 8875
- [22] Luo H, Segawa H, Visbal M R 2012 *Comput. Fluids* **53** 133
- [23] Roshko A 1954 *On the Drag and Shedding Frequency of Two-Dimensional Bluff Bodies* (Washington DC: National Aeronautics and Space Administration) p129
- [24] Nicolle A, Eames I 2011 *J. Fluid Mech.* **679** 1
- [25] Kim H J 1988 *J. Fluid Mech.* **196** 431
- [26] Zhou Y, Zhang H J, Yiu M W 2002 *J. Fluid Mech.* **458** 303

Numerical simulation of laminar flow past two side-by-side cylinders by discontinuous Galerkin method*

Zhang Zhong-Yu[†] Yao Xiong-Liang Zhang A-Man

(College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

(Received 30 October 2015; revised manuscript received 11 January 2016)

Abstract

Investigations of vortex dynamics about two circular cylinders in a side-by-side arrangement help the understanding of flows around more complex structures, which are found to have many engineering applications. These applications involve offshore structures, power generation, micro-turbine engines, cooling towers, and paper machine forming fabrics, etc. Therefore, two-dimensional compressible laminar flows over two cylinders in side-by-side arrangement are numerically investigated at low Reynolds number. The high-order discontinuous Galerkin method is employed to simulate the flow, which combines the advantages associated with finite element and finite volume methods. As in classical finite element method, the spatial accuracy can be obtained by the high-order polynomial approximation within an element rather than by stencils as in finite volume method. The curved triangle is used to represent the wall boundary of cylinder to maintain the high-order accurate simulation. Then the characteristics of the wake flow are identified by capturing the vortex structure. After verifying the rationality of the method, the influences of gap spacing on vortex shedding and mechanical characteristics are analyzed. The results reveal that the flow depends to a large extent on the gap spacing between the two cylinders, which can change the vortex shedding pattern. At the gap spacing $S^* = 1.1$, wake flow pattern resembles the vortex street of a single bluff body. The flow in the gap is too weak to affect the wake pattern, leading to the complete suppression of vortices shed on the gap sides of both cylinders. At the gap spacing $S^* = 1.4$, the results reveal that the gap flow is deflected from one cylinder to another. Meanwhile, the wakes represent randomly flip-flopping between two states of the gap flow direction, which is called the flip-flopping wake pattern. The flow is no longer periodic but becomes drastically unsteady. Anti-symmetric flow pattern is predicted for gap spacing $S^* = 2.5$, indicating that two parallel vortex streets are anti-symmetric with respect to the centerline. With further increasing the gap spacing to $S^* = 4$, the symmetric flow pattern is observed. Furthermore, the flow preserves its structure very far downstream without any distortion. With the increase of the cylinder spacing, the average drag coefficients are declined significantly, and the absolute value of average lift coefficient decreases simultaneously. The Reynolds number has a little influence on the average drag coefficient. As the Reynolds number increases, the average lift coefficient decreases, while the vortex shedding frequency increases.

Keywords: discontinuous Galerkin method, curved boundary, side-by-side cylinders, vortex shedding

PACS: 47.11.-j, 47.15.Tr, 02.70.Dh, 47.32.ck

DOI: 10.7498/aps.65.084701

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. U1430236, 51479041).

[†] Corresponding author. E-mail: zhangyu061031@126.com