

基于自适应本征正交分解混合模型的跨音速流场分析

罗佳奇 段焰辉 夏振华

Transonic flow reconstruction by an adaptive proper orthogonal decomposition hybrid model

Luo Jia-Qi Duan Yan-Hui Xia Zhen-Hua

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 65, 124702 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.124702

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.124702>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I12>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[一类非线性发展方程孤立子行波解](#)

[The solitary traveling wave solution for a class of nonlinear evolution equations](#)

物理学报.2014, 63(13): 130201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.130201>

[一类大气浅水波系统的广义变分迭代行波近似解](#)

[The traveling wave approximate solution for a class of atmospheric wading wave system by generalized variational iteration](#)

物理学报.2013, 62(23): 230202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.230202>

[两自由度弱非线性耦合系统的一阶近似 Lie 对称性与近似守恒量](#)

[The first order approximate Lie symmetries and approximate conserved quantities of the weak nonlinear coupled two-dimensional system](#)

物理学报.2013, 62(22): 220202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.220202>

[一类广义扰动 KdV-Burgers 方程的同伦近似解](#)

[Homotopic approximate solutions for a class of generalized perturbed KdV-Burgers equation](#)

物理学报.2013, 62(17): 170202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.170202>

[Schardin 问题的数值研究](#)

[Numerical investigations on the Schardin's problem](#)

物理学报.2012, 61(6): 064702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.064702>

基于自适应本征正交分解混合模型的跨音速流场分析*

罗佳奇¹⁾† 段焰辉²⁾ 夏振华¹⁾

1)(北京大学工学院, 北京 100871)

2)(中国空气动力研究与发展中心, 绵阳 621000)

(2015年12月6日收到; 2016年2月26日收到修改稿)

采用非线性模型替代线性回归模型响应本征正交分解(POD)基函数的系数, 并采用自适应抽样方法确定快照集合, 实现了基于自适应POD混合模型的跨音速叶片复杂流动分析及流场拟合。首先通过比较基于线性回归模型和非线性回归模型的基函数系数响应精度, 验证非线性回归模型的收敛性和精确性; 之后通过与静态抽样方法进行对比, 研究分析自适应抽样技术的优越性; 最后开展基于自适应POD混合模型的全三维跨音速流场分析及流动拟合。结果表明, 采用自适应POD混合模型, 不仅能够清晰地识别三维跨音速流场中的敏感流动特征, 还能精确地拟合设计空间内任意状态的流场及出口气动参数。

关键词: 流场分析, 本征正交分解, 跨音速, 代理模型

PACS: 47.85.Gj, 47.40.Hg, 02.30.Mv

DOI: 10.7498/aps.65.124702

1 引言

目前基于大规模高性能计算的数值仿真技术在工程领域的应用越发广泛。在诸多学科的数值计算中, 往往首先将常微分/偏微分方程离散到格点单元上再进行求解, 这类数值计算的维度和所需求的计算资源均较高。在流体力学的工程应用领域, 往往需要求解成百上千次流场, 复杂流动的数值模拟尤为耗时。对于系统空间内任意给定的流动条件和几何外形, 如果能够采用代理模型快速确定气动参数的函数响应, 将能有效地避免重复的大规模流场计算, 提高计算效率。

代理模型的基函数是影响模型响应精度的关键。在基于多项式^[1,2]、径向基函数(radial basis function, RBF)^[3]等代理模型中, 均采用了半经验形式的基函数, 在不同的系统空间内难以保证模型的响应精度。本征正交分解(proper orthogonal

decomposition, POD)通过对数据系统进行奇异值分解确定系统的基函数, 相对于半经验形式的基函数, POD基由数据系统惟一确定, 因而在给定的系统空间内具有最佳表达能力。由于POD基函数能够较好地反映数据系统的典型特征, 在流体力学领域, 该方法最早用于湍流结构分析^[4], 在国内相关研究中也得到了成功应用^[5,6]。此外, 基于POD的特征分析在图像处理^[7]、空气动力学^[8,9]、降阶模型^[10]等领域也得到了成功应用。除了特征分析, POD的另一重要应用是数据填补。数据系统内缺失数据可以由POD基函数线性表达, 此即Gappy POD。从数据填补的角度来看, Gappy POD是一种代理模型, 且能够同时响应多个输出参数。目前, Gappy POD在空气动力学领域得到了广泛应用, 已成功地应用于缺失气动数据的填补及气动外形设计^[11,12]。近年来, Gappy POD在内流流动分析及优化设计领域的应用研究也得以开展^[13,14]。

基于Gappy POD的数据填补是通过一系列加

* 国家自然科学基金(批准号: 51206003, 51376009)和中国博士后科学基金(批准号: 2012M510267, 2013T60035)资助的课题。

† 通信作者。E-mail: jiaqil@pku.edu.cn

权基函数的线性迭加实现的, 重点是确定各基函数的系数。在早期的 Gappy POD 应用研究中, 常采用最小二乘法来确定基函数系数, 在强非线性响应问题中, 这种基于线性回归确定的基函数系数其精度往往较低。如果能够结合其他代理模型来实现基函数系数的非线性回归, 理论上能够提高基函数系数的精度。近年来, 相关研究采用径向基函数^[3], Kriging 模型^[15]等响应基函数的系数, 取得了一定效果, 并在传热反问题^[16]、结构反问题^[17]和翼型流场分析^[18,19]中得到成功应用。径向基函数由于其实现简单、非线性响应精度高的优点^[20], 在该研究中用于构造 POD-RBF 混合模型。此外, 基于 POD 的内流流动特征分析研究目前并不多见, 本文将采用 POD-RBF 模型来分析内流典型特征并实现气动参数的响应。

和其他代理模型类似, POD-RBF 混合模型的构造需要一定数量的样本, 样本数量直接决定模型的构造效率, 因而抽样方法是 POD 混合模型应用研究的另一个重点。静态抽样在代理模型研究中得到了广泛应用, 然而, 静态抽样的样本数与输入参数呈指数关系, 模型构造效率较低。拉丁超立方抽样^[21]通过将输入概率进行分层, 并在每个概率区间内随机分布样本, 显著降低了样本数, 目前已得到广泛应用^[22,23]。然而, 上述抽样方法均只考虑了样本在抽样空间内的分布, 而忽略了函数响应对模型构造的影响。由于敏感和非敏感抽样空间对采样点的需求不同, 忽略函数响应的影响必然导致采样点分布的不合理。如何通过考虑函数响应的反馈影响来实现采样点的动态分布, 也即自适应抽样方法, 在近年来得到了迅速发展^[13,19]。目前自适应抽样敏感空间的确定依赖于模型的响应偏差, 而在样本数较少时, 模型的响应精度较低, 仅由模型响应偏差无法严格确定所有的敏感空间。本文将介绍一种新的自适应抽样方法来确定各个敏感空间, 以实现在整个抽样空间内动态地分布样本。

本文首先介绍线性回归 Gappy POD 和 POD 混合模型的基本原理, 并通过跨音速二维叶片表面压力分布的填补来比较线性回归 Gappy POD 和 POD-RBF 混合模型的拟合能力; 之后研究静态抽样和自适应抽样方法对构造 POD-RBF 混合模型所需要的样本数及模型响应精度的影响, 同时研究不同的敏感空间确定准则对自适应样本空间分布的影响; 最后开展基于自适应 POD-RBF 混合模型

的三维跨音速转子叶片流场特征分析及气动参数响应研究, 抽样空间通过改变 NASA Rotor 67 的叶片掠确定。通过 POD 特征分析确定叶片吸力面、叶尖流面及全三维流场的基模态, 以识别相应的敏感流动特征, 并由 POD-RBF 混合模型响应叶片的出口气动参数。同时, 对采用不同抽样方法、不同样本数构造的 POD-RBF 混合模型进行统计分析, 通过比较不同模型的均值、均方差, 进一步研究本文所发展的自适应抽样方法的有效性及 POD-RBF 混合模型的响应精度。

2 Gappy POD 及 POD 混合模型

早期 POD 的奇异值分解在数值精度和稳定性方面均表现欠佳, 目前得到广泛应用的是快照 POD 方法^[24]。POD 及快照 POD 的基本原理在前期工作中已经详细介绍^[14], 这里只简单介绍快照 POD 的实现流程。POD 的核心工作是特征值分解, 其分解形式为

$$\mathbf{R} = \frac{1}{n} (\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{Q} \left(\frac{1}{n} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Sigma}^T \right) \mathbf{Q}^T, \quad (1)$$

其中, n 为快照数, \mathbf{U} 为矩阵形式的快照集合且 $\mathbf{U} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T$, \mathbf{R} 为自相关矩阵; \mathbf{Q} , \mathbf{V} 为正交矩阵, $\boldsymbol{\Sigma}$ 为特征值对角阵。POD 基的定义为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi} &= \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{U}, \\ \boldsymbol{\Phi} &= \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}. \end{aligned} \quad (2)$$

理论上该系统空间内的任意向量 \mathbf{u} 均可由 POD 基线性叠加确定:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Psi_i + \varepsilon_p, \quad (3)$$

N 为所选择的 POD 基的个数且 $N \leq n$ 。由(3)式可知: POD 的另一个核心工作是如何确定 POD 基的系数 λ_i , 使 POD 的拟合偏差 ε_p 最小。

2.1 线性回归 Gappy POD

首先需要指出的是: 线性回归和非线性回归只表示不同的 POD 基系数的确定方法。Gappy POD 主要用于缺失数据填补, 其基本原理在文献^[14]中已详细介绍, 简单概述如下: 将不完整向量分为已知部分和缺失部分, 缺失部分可以作为响应由 POD 基拟合确定; 对应向量的已知和缺失部分, 将

POD 基分解为已知部分和“缺失”部分，并由已知部分的 POD 基拟合已知向量并使拟合偏差最小，如(3)式所示；POD 基系数可以通过最小二乘法确定，随之，由 POD 基系数和“缺失”POD 基即可完成向量缺失部分数据的填补。

2.2 POD-RBF 混合模型

为了提高 POD 基系数的精度，接下来主要介绍基于非线性回归的系数确定方法并在后续的流场分析中取代线性回归模型。由特征值分解及(2)式可知：

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Phi}. \quad (4)$$

由(4)式可知：确定 POD 基之后，原始快照集合可以由特征矩阵 \mathbf{Q} 精确确定， \mathbf{Q} 由 POD 基的系数向量组成。因此，将每个 POD 基的系数向量和对应的快照集合作为一组输出/输入，可以构造 POD 基系数的响应面模型。对于给定的快照，均可由该模型确定其对应的 POD 基系数，完成函数响应。研究中采用 RBF 来构造 POD 基系数的响应面模型。

$$\mathbf{q}_i = \sum_{k=1}^n \beta_{ik} \mathbf{f}_k(\mathbf{x}), \quad i = 1—N, \quad (5)$$

其中， \mathbf{f}_k 是第 k 个径向基函数， β_{ik} 为第 i 个响应面模型里的第 k 个模型系数， \mathbf{x} 为第 k 个快照的输入参数向量。径向基函数采用的是高斯函数

$$\varphi(r) = e^{-\sigma r^2}, \quad r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|. \quad (6)$$

值得注意的是：通过求解一组线性方程组即可确定 RBF 的模型系数，也即 RBF 模型在采样点是完全精确的，这将有利于提高 POD 基系数的响应精度。

2.3 模型验证

为了比较验证两种不同 POD 代理模型的性能，选取二维对称叶片 NACA0012 作为基准叶型生成快照叶片。在基准叶片的表面 33.3% 和 66.7% 弦向位置分布两个控制点，最大扰动空间为 $[-0.01c, 0.01c]$ ， c 为轴向弦长。采用静态抽样方法在空间内均匀分布 36 和 49 个模型样本用于构造代理模型，还分布了 25 个不同的测试样本用于评估模型的响应精度。值得注意的是：所有样本叶片均是对称的。流场信息通过求解 Euler 方程确定，叶片进口总压

为一个标准大气压，进口总温为 288.15 K，出口等熵马赫数为 0.7。每个快照均由叶片表面的网格点坐标及相应的压力构成。

图 1 比较了基于不同模型的测试样本平均拟合偏差的变化曲线，图中 Gappy 表示线性回归 Gappy POD，POD-RBF 表示基于 RBF 模型响应的 Gappy POD。由图 1 可知：随着样本数的增加，POD 的拟合精度有所提高；随着 POD 基个数的增加，线性回归模型的平均拟合偏差先下降后上升，收敛不稳定；POD 混合模型的平均拟合偏差更小，且收敛稳定。因此，采用 POD 混合模型不仅能够提高 POD 的拟合精度，还能有效解决降阶模型应用中所选用的 POD 基个数难以确定的难题。图 2 比较了由两种模型拟合的第 1 个、第 13 个、第 25 个测

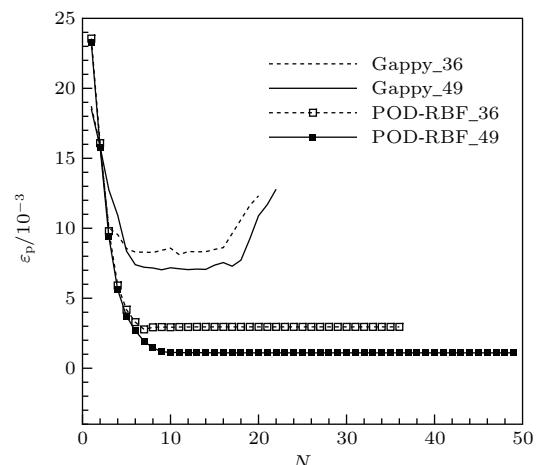


图 1 不同基函数的平均拟合偏差

Fig. 1. Averaged prediction error vs. the number of basis modes.

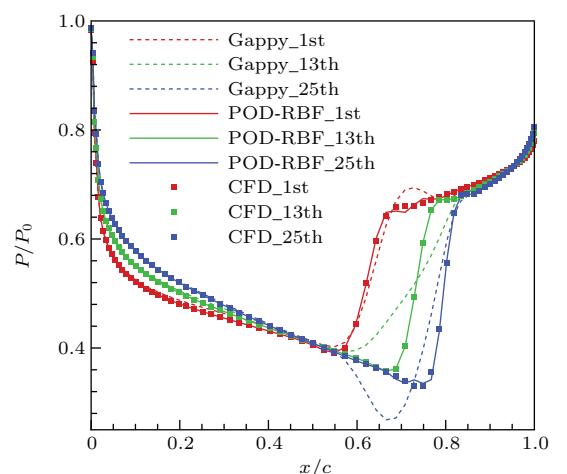


图 2 (网刊彩色) 不同模型的拟合压力分布

Fig. 2. (color online) Reconstructed pressure distributions on the blade surface.

试叶片表面的压力分布，并与计算流体动力学(CFD)解进行了对比。由图2可知：采用线性模型，在激波前沿及激波后均会出现不同幅度的压力震荡，这与前期研究及外流研究结果类似^[14,18]；而采用POD混合模型，拟合压力分布与精确解十分接近。

3 自适应抽样

在上述的二维叶片表面压力拟合研究中，采用的是静态抽样方法。近年来，自适应抽样研究已经得到了开展，基于四叉树法^[25]的自适应抽样基本原理是：首先确定初始采样点，包括 2^D 个空间边界角点和由四叉树法确定的 2^D 个子空间中心点， D 为空间维度；之后通过“弃一法”(leave-one-out, LOO)交叉验证确定每个子空间采样点的响应偏差，并确定目标子空间；最后在目标子空间内增加 2^D 个新的采样点，直至所有采样点的响应偏差达到精度要求。该研究中，最大响应偏差容忍值不超过精确值的1%。

3.1 LOO交叉验证

设初始快照集合 \mathcal{U} 由 n 个快照组成，第*i*个LOO快照集合由不包含第*i*个快照的其他所有 $n-1$ 个快照组成，即

$$\mathcal{U}_{L,i} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}, \\ 2^D + 1 \leq i \leq n. \quad (7)$$

对该LOO快照集合进行特征分解确定POD基，由(3)式拟合第*i*个快照并确定模型解与精确解之间的响应偏差。重复上述过程，直至确定了每个采样点的响应偏差。

早期的自适应抽样方法是由最大响应偏差确定当前子空间中的目标子空间^[19]。然而，当初始快照较少时，由有限个快照构造的代理模型，其响应精度很难达到要求，因而，仅将响应偏差作为目标子空间的惟一判断准则难以精确确定目标子空间。

3.2 抽样准则

采用不同的抽样准则，所确定的目标子空间及最终的模型响应精度也会不同。在该研究中，仅由响应偏差确定目标子空间的抽样方法称为方法1。

在流动敏感的子空间内，函数响应对输入信息的变化较为敏感，该子空间的样本与其他样本的相关性也较低。考虑样本相关性影响，在相关性较低的子空间内分布较多的样本，能提高该子空间的响应精度。快照间的线性相关系数 $\rho_{c,ij}$ 及相关距离 d_{ij} 定义为

$$\rho_{c,ij} = \frac{(\mathbf{u}_i - u_{a,i})(\mathbf{u}_j - u_{a,j})}{\|\mathbf{u}_i - u_{a,i}\| \|\mathbf{u}_j - u_{a,j}\|}, \\ d_{ij} = 1 - \rho_{c,ij}. \quad (8)$$

上式中分子表示第*i*、第*j*个快照的协方差，分母为相应快照标准差的乘积； $u_{a,i}$ 和 $u_{a,j}$ 分别表示第*i*个、第*j*个快照的平均值。定义一个组合函数

$$f_i = \varepsilon_{L,i} \times d_{a,i}, \quad (9)$$

$\varepsilon_{L,i}$ 和 $d_{a,i}$ 分别表示第*i*个快照的交叉验证响应偏差、第*i*个快照和其他快照相关距离的平均值。由组合函数 f_i 确定目标子空间的抽样方法称为方法2。

图3比较了基于三种不同抽样方法构造的POD混合模型的平均拟合偏差。随着快照数的增加，平均拟合偏差下降；对方法1，24个自适应快照的平均拟合偏差略有上升，意味着上一步确定的目标子空间并非最优。相对于36个均匀快照，由24个方法2自适应快照构造的POD混合模型的平均拟合偏差更低。结果表明：采用自适应抽样技术，不仅能够减少快照数，还能提高模型的拟合精度。图4给出了采用三种不同抽样方法确定的最终快照的空间分布，两个参数的抽样空间均已归一化。比较图4(b)和图4(c)可以发现：采用方法1和方法2确定的目标子空间并不相同，导致了模型拟合精度的不同；相对于方法1，基于方法2的自适应抽样技术更优。

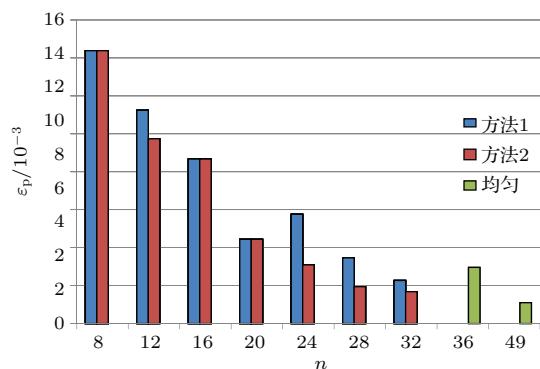


图3 (网刊彩色) 不同抽样方法的平均拟合偏差柱状图

Fig. 3. (color online) Histogram of the averaged prediction error with different sampling methods.

图5比较了采用均匀抽样、方法1、方法2的POD混合模型所拟合的叶片表面压力分布。由图可知：采用均匀抽样技术，在叶片表面激波前沿和激波后仍出现了较小幅度的压力震荡，该结果和跨音速翼型表面压力分布的拟合结果非常类似^[18]；而采用自适应抽样技术，由POD混合模型拟合的压力分布与精确解几乎一致。对比图4的快照空间分布及图5的压力分布可知：由于自适应抽样能够更好地识别空间敏感区域并相应地增加快照数，因而能够提高基于POD混合模型的跨音速

激波的拟合精度。

4 三维跨音速流场分析

接下来将实现自适应POD-RBF混合模型在航空发动机跨音速压气机转子叶片的全三维流场分析及流动拟合中的实际应用。研究对象为20世纪NASA Glenn中心设计的单转子叶片NASA Rotor 67^[26]。通过扰动50%叶高、叶尖两个控制点实现叶片的前掠确定叶片快照，图6分别给出了叶片

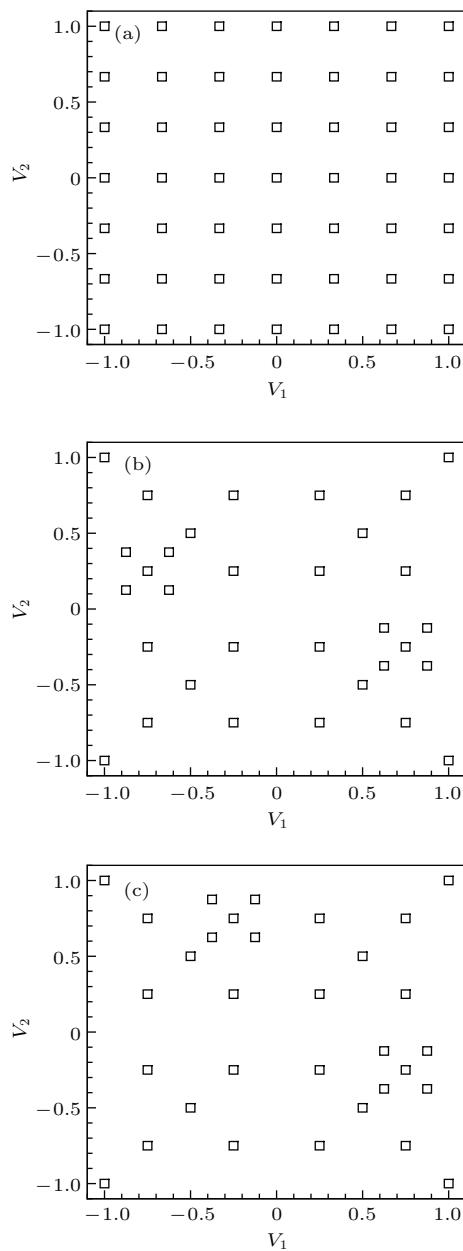


图4 不同抽样方法的样本分布 (a) 均匀抽样; (b) 方法1; (c) 方法2

Fig. 4. Samples obtained from different methods: (a) Uniform; (b) adaptive_1; (c) adaptive_2.

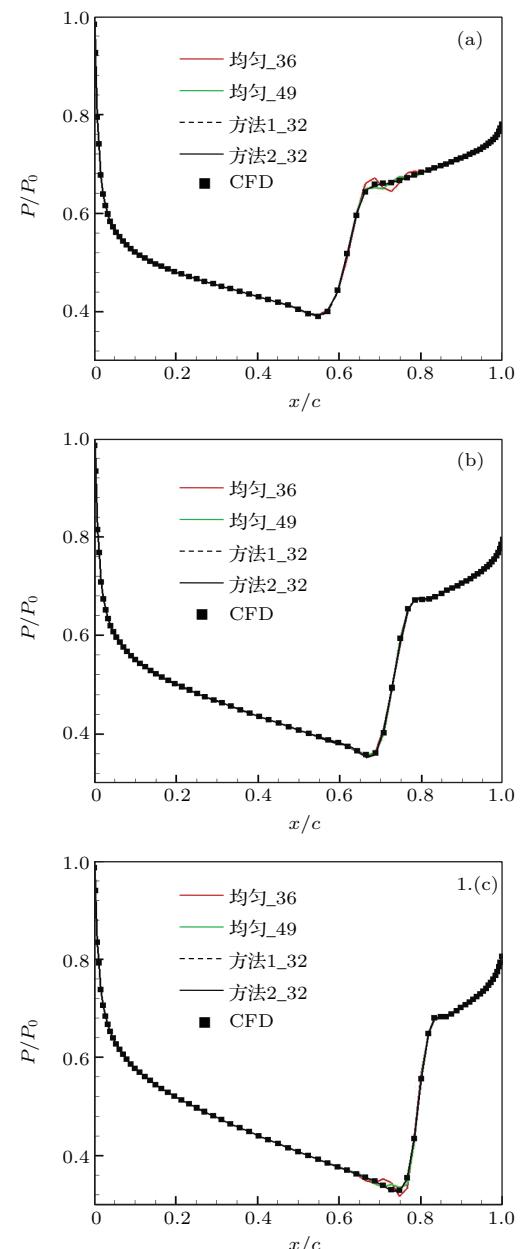


图5 (网刊彩色) 不同测试叶片表面压力分布 (a) 第1个; (b) 第13个; (c) 第25个

Fig. 5. (color online) Reconstructed pressure distributions for different test blades: (a) 1st; (b) 13th; (c) 25th.

掠变化的俯视图和侧视图, 图中所示的沿弦长方向的叶片掠参数化建模能够有效避免叶片结构应力的影响^[27]. 流场数据通过求解 Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) 方程和 Spalart-Allmaras 湍流模型方程确定, 所采用的流场求解器在前期研究中已经进行了可靠性和精度验证^[28]. 每个快照均由三维叶片表面网格点坐标和相应的流场信息构成.

为了比较分析 POD-RBF 混合模型拟合叶片通道内不同流动特征的有效性和精确性, 选取了三个不同的流动区域作为研究对象, 分别是: 叶片吸力面流动(流场1), 叶尖 S_1 流面(流场2), 全三维流场(流场3). 采用前文介绍的自适应抽样方法生成模型快照, 同时采用均匀抽样方法生成了36个模型快照和25个测试快照. 图7比较了三种不同流场的拟合偏差, 总的来说: 叶尖流动拟合精度最低, 吸力面流动拟合精度最高; 此外, 24个自适

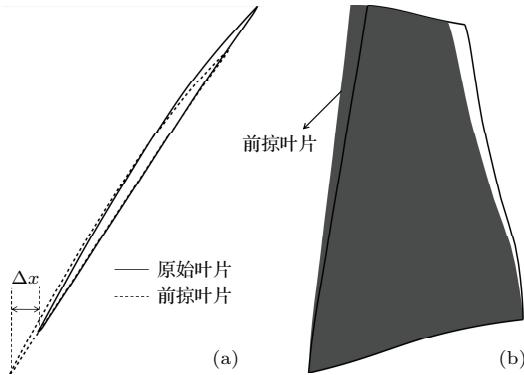


图6 叶片掠的参数化模型 (a) 俯视图; (b) 侧视图

Fig. 6. Parametrization of blade sweeping: (a) Top view; (b) side view.

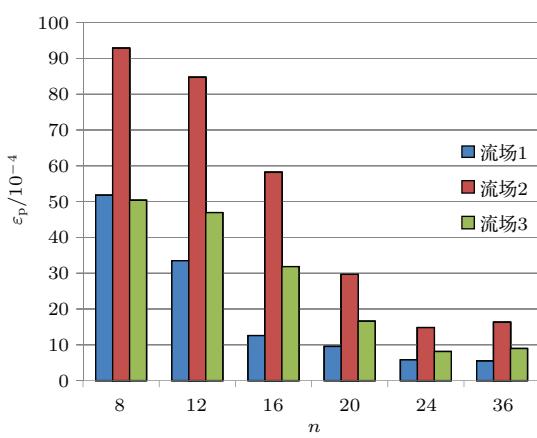


图7 (网刊彩色) 不同流动的平均拟合偏差

Fig. 7. (color online) Histogram of the averaged prediction of different flows.

应快照的拟合偏差均低于36个静态快照的拟合偏差, 这进一步证实了自适应抽样方法的有效性和精确性.

通过特征分解, 特征值按照由大至小的次序排列, 相应的流场基模态所包含的流场特征将依次减

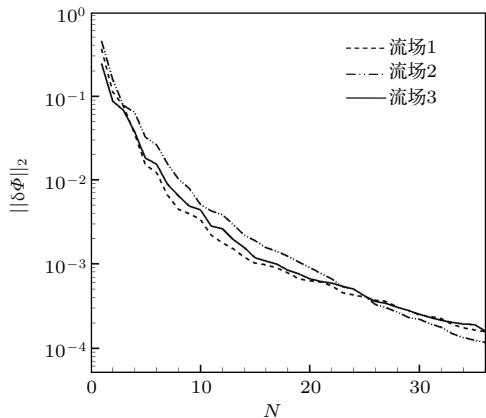


图8 不同流场基模态与平均场的偏差

Fig. 8. Deviation of the basis modes form the averaged flow field.

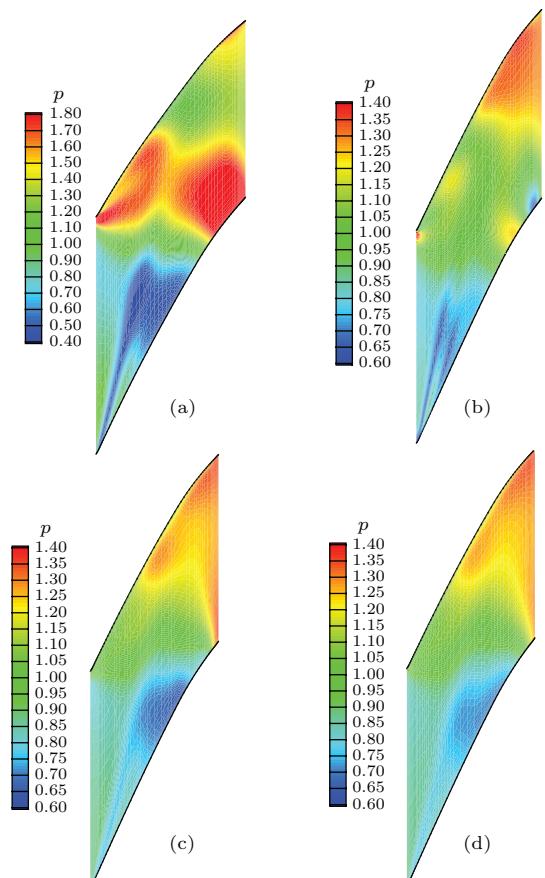


图9 (网刊彩色) 不同流场基模态的压力云图 (a) 第1个; (b) 第2个; (c) 第5个; (d) 平均场

Fig. 9. (color online) Pressure contours of the basis modes: (a) 1st; (b) 2nd; (c) 5th; (d) average.

弱。图8给出了流场基模态与平均场的偏差，该偏差能够直观地反映流场基模态所包含的流动特征的强弱。由图可知：流场基模态的偏差依次降低，对前若干个主要的基模态而言，流场1的基模态偏差最小，而流场2的基模态偏差最大。结果表明：叶尖流动所包含的流动特征最多，也是最难以精确拟合的。

图9给出了叶尖流场的不同基模态及平均场的压力云图。第一个基模态对应的特征值最大，相应地，其包含的流动特征也最强。由图9(a)可知，叶尖流动主要有以下几个典型的流动特征：起源于叶片吸力面的通道激波，起源于吸力面前缘的叶尖泄漏流，叶尖泄漏流-激波干涉并造成了激波的扭曲。上述流动特征与前期流场研究^[28]结果完全一致。在图9(b)和图9(c)中，激波特征基本消失，而叶尖泄漏流特征依然较明显，该结果与图7和

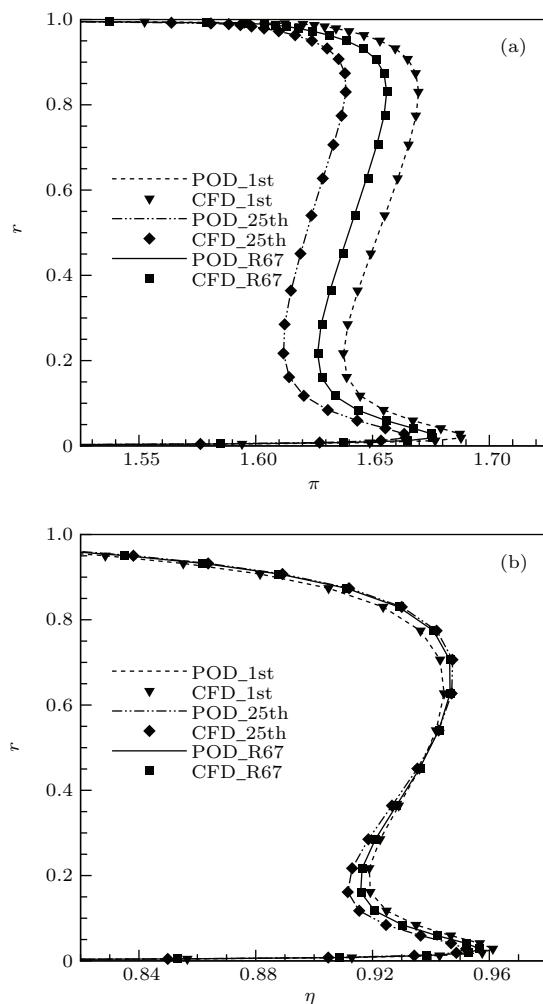


图10 气动参数的展向分布 (a) 总压比; (b) 等熵效率
Fig. 10. Spanwise distributions of (a) total pressure ratio and (b) adiabatic efficiency.

图8的结果是一致的，即：相对于激波，叶尖泄漏流更为敏感。

在内流问题中，更值得关注的是叶片出口的总体气动性能参数。该研究中出口气动性能参数由流场3的出口给定。图10给出了第1个、第25个及

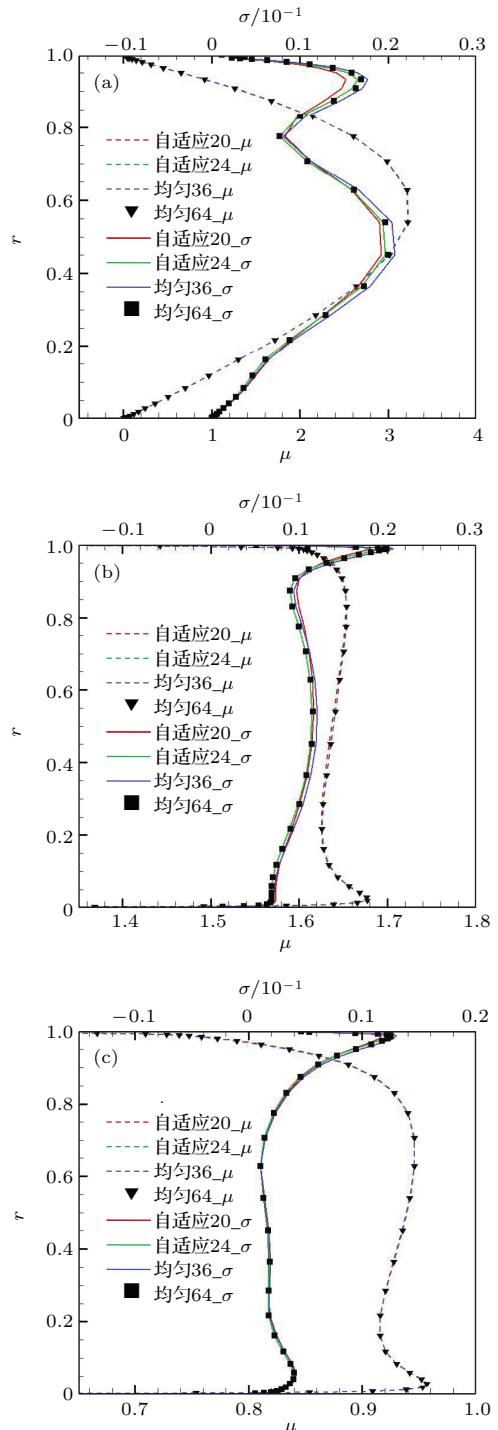


图11 (网刊彩色) 均值和均方差的展向分布 (a) 流量; (b) 总压比; (c) 等熵效率

Fig. 11. (color online) Spanwise distributions of mean value and standard deviation: (a) Mass flow rate; (b) total pressure ratio; (c) adiabatic efficiency.

原始Rotor 67叶片的拟合总压比 π 和拟合效率 η 的展向分布并与精确解进行了对比。拟合解与精确解几乎完全重合。由前文分析可知：对于较为复杂的流动，如吸力面上的激波特征、叶尖泄漏流等，POD-RBF混合模型具有较高的拟合精度；而叶片出口流动一般是连续的，POD具有更高的拟合精度^[14]。

为了更细致地分析该自适应混合模型的优势，采用统计分析手段研究了自适应混合模型和静态模型的统计性能。在统计分析中，两个主要的统计参数为平均值 μ 和均方差 σ 。平均值用来衡量样本对空间的平均拟合效果，均方差用来衡量样本在空间内的离散程度。在统计学里，样本数越多，统计结果更为可靠，因而除了36个样本的均匀快照集合，还增加了64个样本的均匀快照集合。图11给出了基于四个不同快照集合构造的POD-RBF混合模型的流量、总压比、等熵效率展向分布的统计结果。四个不同混合模型的平均值几乎完全重合，而均方差则表现出了较为明显的差异。整体上，20自适应快照模型、36均匀快照模型的均方差与64均匀快照模型均有明显差别，尤其是在90%叶高至叶尖区域；而24个自适应快照模型的均方差与64个均匀快照模型最为接近。

此外，在图11中，在不同的叶高位置，气动参数的均方差存在较大差异。流量的均方差在叶片中部较大，这是因为流量不仅依赖于流动参数，还依赖于网格尺寸，在叶片中部网格单元面积较大，导致流量均方差较大。而三个不同气动参数的均方差在叶尖附近均出现一个峰值，这表明：目前的自适应快照集合和均匀快照集合均较难满足精确拟合叶尖流动的样本需求；从另一方面来看，相对于其他叶高位置的流动，叶尖附近流场的流动特征较多，拟合精度相对较低。该结果进一步印证了前文的分析。

5 结 论

相对于线性回归模型，非线性模型能够显著改善POD基系数的响应，POD-RBF混合模型能够有效提高跨音速激波的拟合精度。相对于静态抽样方法，自适应抽样技术在保证模型精度的基础上能够显著减少构造模型所需的快照数，提高模型构造效率。综合考虑模型拟合偏差和快照独立性构造的

POD-RBF混合模型具有更优的拟合能力。

采用POD-RBF混合模型对三维跨音速叶片通道流动特征进行了数值分析及拟合。流场基模态分析显示：相对于吸力面激波，叶尖泄漏流包含了更多的敏感流动特征，因而拟合难度较大。对叶片出口气动参数进行拟合发现：目前的POD-RBF混合模型能够足够精确地拟合出口的连续流场。最后对不同混合模型的拟合性能进行了统计分析，通过对比发现：基于自适应快照构造的混合模型其统计性能与基于大量静态快照构造的混合模型统计性能基本相当；此外，气动参数的均方差在叶尖附近出现峰值，进一步论证了叶尖泄漏流在三维跨音速流场中是最为显著的流动特征。

参 考 文 献

- [1] Xie G F, He X H, Tong J J, Zheng Y H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3193 (in Chinese) [谢国锋, 何旭洪, 童节娟, 郑艳华 2007 物理学报 **56** 3193]
- [2] Luo J Q, Liu F 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 190201 (in Chinese) [罗佳奇, 刘锋 2013 物理学报 **62** 190201]
- [3] Jordan M I, Jacobs R A 1994 *Neural Comput.* **6** 181
- [4] Couplet M, Basdevant C, Sagut P 2005 *J. Comput. Phys.* **207** 192
- [5] Gao Q, Yi S H, Jiang Z F, He L, Xie W K 2013 *Chin. Phys. B* **22** 014202
- [6] Wang W, Guan X L, Jiang N 2014 *Chin. Phys. B* **23** 104703
- [7] Sirovich L, Kirby M 1987 *J. Opt. Soc. Am. A* **4** 519
- [8] Dowell E, Hall K, Thomas J, Florea R, Heeg J 1999 *AIAA Paper* **1999** 1261
- [9] LeGresley P A, Alonso J J 2001 *AIAA Paper* **2001** 0926
- [10] Wilcox K, Peraire J 2002 *AIAA J.* **40** 2323
- [11] Bui-Thanh T, Damodaran M, Willcox K 2004 *AIAA J.* **42** 1063
- [12] Duan Y H, Cai J S, Li Y Z 2012 *AIAA J.* **50** 968
- [13] Kato H, Funazaki K I 2014 *ASME Paper* **2014** 27229
- [14] Luo J, Duan Y, Tang X, Liu F 2015 *ASME Paper* **2015** 42876
- [15] Krige D G 1951 *J. Chem. Metal. Min. Soc. S. Afr.* **52** 119
- [16] Ostrowski Z, Bialecki R A, Kassab A J 2008 *Inverse Probl. Sci. En.* **16** 39
- [17] Rogers C A, Kassab A J, Divo E A, Ostrowski Z, Bialecki R A 2012 *Inverse Probl. Sci. En.* **20** 749
- [18] Qiu Y S, Bai J Q, Hua J 2013 *Acta Aeronau. Astronau. Sin.* **34** 1249 (in Chinese) [邱亚松, 白俊强, 华俊 2013 航空学报 **34** 1249]
- [19] Braconnier T, Ferrier M, Jouhaud J C, Montagnac M, Sagaut P 2011 *Comput. Fluids* **40** 195
- [20] Gao S G, Dong H R, Sun X B, Ning B 2015 *Chin. Phys. B* **24** 010501
- [21] McKay M D, Beckman R J, Conover W J 2000 *Technometrics* **42** 55

- [22] Wang G G 2003 *J. Mech. Design* **125** 210
- [23] Thomson Q, Martins J R R A 2011 *Eng. Optimiz.* **43** 615
- [24] Sirovich L, Kirby M 1987 *Q. Appl. Math.* **45** 561
- [25] Finkel R, Bentley J L 1974 *Acta Inform.* **4** 1
- [26] Strazisar A J, Wood J R, Hathaway M D, Suder K L 1989 *NASA TP* **1989** 2879
- [27] Denton J D, Xu L 2002 *ASME Paper* **2002** 30327
- [28] Luo J, Zhou C, Liu F 2014 *J. Turbomach.* **136** 051005

Transonic flow reconstruction by an adaptive proper orthogonal decomposition hybrid model*

Luo Jia-Qi¹⁾[†] Duan Yan-Hui²⁾ Xia Zhen-Hua¹⁾

1) (College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China)

2) (China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, China)

(Received 6 December 2015; revised manuscript received 26 February 2016)

Abstract

A proper orthogonal decomposition (POD) based hybrid surrogate model and the applications to transonic flow reconstructions are presented in the paper. In the implementations, the radial basis function (RBF) model response instead of the least-square linear regression is employed in order to improve the coefficients of POD basis modes; moreover, an adaptive sampling strategy with both the model response error and sample independence taken into account is studied to reduce the sample number, while maintaining sufficient response accuracy. Firstly, the POD-RBF surrogate model is studied and compared with the least-square-based POD through pressure reconstruction studies on the two-dimensional blade surface. The results demonstrate that the non-linear model response method significantly improves the coefficients of the basis modes and thus the averaged description error. Meanwhile, the beneficial gains on the convergence performance of the response error versus the number of basis modes are obtained. Then by comparing with the uniform sampling and the resampling strategy with taking only the response error into account, the adaptive sampling method proposed in the paper obtains the best performance on reducing the averaged description error. Finally, the flow characteristics of the flow fields on the suction surface, at the blade tip, in the blade passage of the sampled three-dimensional transonic compressor rotor blades with different spanwise sweeps based on the baseline blade, NASA Rotor 67 are illustrated through the flow basis modes. Compared with the suction flow, the flow at the blade tip contains more intensive flow characteristics including shock, tip-leakage flow and shock-leakage interaction, resulting in a higher averaged description error. Besides, the missed flow fields in the passages of the test blades are reconstructed from the flow basis modes by using the adaptive POD-RBF hybrid model and the corresponding aerodynamic parameters are then predicted. The spanwise distributions of the circumferentially averaged aerodynamic parameters at the blade outlet reconstructed from POD-RBF model are consistent well with the numerical solutions. The results demonstrate that the adaptive POD-RBF hybrid surrogate model is effective and accurate enough for reconstructing the transonic flow. In order to further evaluate the response performance of the adaptive POD-RBF model, statistic analysis is carried out for a group of hybrid models with different sampling strategies and different numbers of samples. Generally, although the number of adaptive samples is much less, the mean value and standard deviation of the adaptive model are close enough to those of the static model with sufficient uniform samples. Besides, the standard deviations of a lot of aerodynamic parameters of interest exhibit significant peaks near the blade tip, further demonstrating that the flow at the blade tip is more intensive in the three-dimensional transonic rotor blade passage.

Keywords: flow analysis, proper orthogonal decomposition, transonic, surrogate model

PACS: 47.85.Gj, 47.40.Hg, 02.30.Mv

DOI: 10.7498/aps.65.124702

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51206003, 51376009) and the China Postdoctoral Science Foundation (Grant Nos. 2012M510267, 2013T60035).

† Corresponding author. E-mail: jiaqil@pku.edu.cn