

Carlson 迭代与任意阶分数微积分算子的有理逼近

何秋燕 袁晓

Carlson iterating and rational approximation of arbitrary order fractional calculus operator

He Qiu-Yan Yuan Xiao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 160202 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.160202

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.160202>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I16>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一个分数阶忆阻器模型及其简单串联电路的特性

A fractional-order memristor model and the fingerprint of the simple series circuits including a fractional-order memristor

物理学报.2015, 64(23): 238401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.238401>

多天线信道空间衰落相关性近似算法及其复杂性研究

Approximate analysis of spatial fading correlation for multiple antenna system

物理学报.2014, 63(23): 230205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.230205>

分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路

Fractional-order multiple $RL_\alpha C_\beta$ circuit

物理学报.2014, 63(3): 038401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.038401>

荷控忆阻器等效电路分析模型及其电路特性研究

Equivalent circuit analysis model of charge-controlled memristor and its circuit characteristics

物理学报.2013, 62(21): 218401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.218401>

基于 Dini 展开的高阶 Hankel 变换及其在光束传输中的应用

High order Hankel transform based on Dini expansion and its applications in beam propagation

物理学报.2013, 62(14): 140203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.140203>

Carlson迭代与任意阶分数微积分算子的有理逼近^{*}

何秋燕 袁晓[†]

(四川大学电子信息学院, 成都 610065)

(2016年4月29日收到; 2016年5月27日收到修改稿)

将针对 $1/n$ 阶微积分算子有理逼近的经典 Carlson 正则牛顿迭代法拓展到任意阶分数微积分算子的有理逼近. 为了构造一个有理函数序列收敛于无理的分微积分算子函数, 将分数微积分算子有理逼近问题转换为二项方程的算术根代数迭代求解. 并引入预矫正函数, 使用牛顿迭代公式求解算术根, 获得任意阶分数微积分算子的有理逼近阻抗函数. 对 n 从 2 到 5 变化的九种不同运算阶, 针对特定的运算阶, 选择八种不同的初始阻抗, 通过研究阻抗函数的零极点分布和频域特征, 分析阻抗函数是否同时满足计算有理性、正实性原理和运算有效性. 证明对任意的运算阶, 在选择合适的初始阻抗的情况下, 阻抗函数具有物理可实现性, 在一定频率范围内具有分数微积分算子的运算特性. Carlson 正则牛顿迭代法的推广为进一步的理论研究和构造任意分数阶电路与系统提供一种新思路.

关键词: 分数微积分, 分数算子, 分抗逼近电路, Carlson 有理逼近

PACS: 02.30.Vv, 02.60.Gf, 84.30.Bv

DOI: 10.7498/aps.65.160202

1 引言

分数微积分算子, 简称分数算子, 通常在拉普拉斯变换域中表示为 s^μ , s 是拉普拉斯变量 (常称复频率变量, 亦称运算变量), μ 是运算阶 (取值为分数, 即 $\mu \in \mathbb{Q}$). 人们提出二项式展开法^[1-3]、连分式展开法^[4-7]、Padé 有理逼近法^[8,9]、Carlson 正则牛顿迭代法^[10-12] 等方法构造分数算子 s^μ 的有理逼近阻抗函数序列 $\{Z_k(s)\}$ ($k \in \mathbb{N}$) (k 是迭代次数). 根据电路网络综合理论, 使用现成的 (无源的或有源的) 电气电子元器件 (比如电阻或电容等元件) 组成阻抗函数为 $Z_k(s)$ 的电路——分抗逼近电路, 在一定复频率范围内逼近分数算子 s^μ ^[13-15]. 结合有源器件 (比如运算放大器、OTA 器件等), 便能够实现模拟的分数阶微积分电路^[16,17], 建模与研究自然界中的分数阶现象与过程 (比如模拟生物神经脉冲振荡信号^[18], 分数布朗运动的建模^[19],

著名的 Curie 定律^[20] 等). 分数微积分在分数阶信号处理^[21,22]、分数阶电路与系统^[23-26]、分数阶混沌系统^[27-29] 等方面的应用日益广泛.

20 世纪五、六十年代, Carlson 与 Halijak 提出正则牛顿迭代法有理逼近分数算子 $s^{\pm 1/n}$ (n 为大于或等于 2 的整数). 通过 Carlson 正则牛顿迭代法 (简称 Carlson 迭代法) 获得的阻抗函数序列 $\{Z_k(s)\}$ ($k \in \mathbb{N}$) 能够同时等程度地、均匀地、平稳地向高频、低频段逼近分数算子^[14,30]. Carlson 迭代法的 K 指标等于 $2n \lg[(n+1)/(n-1)]$ ——迭代次数 k 增加一次, 逼近分数算子的频率带宽增加约 1.7—1.9 个数量级^[30]. 因此, Carlson 迭代法对分数算子 $s^{\pm 1/n}$ 的有理逼近是一种卓有成效的方法.

在现有相关文献中, Carlson 迭代法仅仅用于分数算子 $s^{\pm 1/n}$ 的有理逼近. 本文考察 Carlson 迭代法能否实现对任意阶分数算子 $s^{\pm j/n}$ ($n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2, j \in \mathbb{N}^+, 1 \leq j \leq n-1$) 的有理逼近.

^{*} 成都市科技计划 (批准号: 12DXYB255JH-002) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: heqiuyan789@163.com

首先简要论述理想分数算子 s^μ 的有理逼近原理, 重点探讨阻抗函数的物理可实现性及需要满足的基本性质; 接着介绍 Carlson 迭代有理逼近原理, 推导任意阶分数算子 s^μ 的有理逼近阻抗函数序列 $\{Z_k(s)\}$; 然后考察阻抗函数的计算有理性、正实性原理和运算有效性, 分析阻抗函数 $Z_k(s)$ 是否具有分数阶运算特性和物理可实现性; 最后进行总结与展望, 并提出一些值得进一步研究的有关课题.

2 分数算子的 Carlson 有理逼近原理

2.1 理想分数算子的有理逼近概念与数学要求

理想分数算子

$$I^{(\mu)}(s) = s^\mu \quad (0 < |\mu| < 1, \mu \in \mathbb{Q}) \quad (1)$$

是一个无理函数. 分数算子的有理逼近问题是用实系数有理阻抗函数序列 $\{Z_k(s)\} (k \in \mathbb{N})$ 在一定频率范围内逼近理想分数算子所对应的无理函数 $I^{(\mu)}(s)$,

$$Z_k(s) = \frac{N_k(s)}{D_k(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_k} \beta_{ki} s^i}{\sum_{i=0}^{d_k} \alpha_{ki} s^i} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} I^{(\mu)}(s) = s^\mu, \quad (2)$$

式中, 正整数参变量 n_k 和 d_k 分别表示分子多项式 $N_k(s)$ 与分母多项式 $D_k(s)$ 的次数.

$$\beta_k = [\beta_{k,n_k}, \beta_{k,n_k-1}, \dots, \beta_{k,1}, \beta_{k,0}], \quad (3)$$

$$\alpha_k = [\alpha_{k,d_k}, \alpha_{k,d_k-1}, \dots, \alpha_{k,1}, \alpha_{k,0}] \quad (4)$$

分别表示分子多项式 $N_k(s)$ 与分母多项式 $D_k(s)$ 的系数矢量(次数由高到低进行排列, 也即降幂排列). 理论上, 当迭代次数 k 趋于无穷大时, 阻抗函数 $Z_k(s)$ 在全频率范围内逼近理想分数算子 s^μ .

为实现电路网络综合和具有分数阶运算特性, 阻抗函数序列 $\{Z_k(s)\}$ 需要满足以下基本性质 [13,30,31].

1) 计算有理性 (computational rationality): 在 $Z_k(s)$ 的表达式中, 不能存在关于运算变量 s 的无理运算, 只能存在有理运算.

2) 正实性原理 (positive reality principle): 正实性原理是系统具有因果性与稳定性的充分必要

条件, 是无源电路网络综合理论的物理实现要求. 正实性原理要求分子、分母多项式 $N_k(s)$ 与 $D_k(s)$ 都是严格 Hurwitz 多项式——最高次数项与最低次数项之间不能有缺项, 且系数是正实数. 换言之, 阻抗函数 $Z_k(s)$ 的零极点或是在 s 复平面的负实轴上, 或是共轭成对出现在 s 复平面的左半平面.

3) 运算有效性 (operational validity): 阻抗函数 $Z_k(s)$ 在一定复频率范围内具有分数算子 s^μ 的运算性能. 在理想情况下, 要求极限阻抗函数

$$Z(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} Z_k(s) = s^\mu. \quad (5)$$

令

$$s = j\Omega = j2\pi \cdot 10^\varpi \Leftrightarrow \varpi = \lg\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) \quad (\Omega \in \mathbb{R}^+, \varpi \in \mathbb{R}), \quad (6)$$

式中, Ω 是模拟频率变量, 称 ϖ 为频率指数变量. 则运算有效性要求频率响应或频率特征函数序列 $\{Z_k(j\Omega)\}$ 收敛于 $I^{(\mu)}(j\Omega) = (j\Omega)^\mu$. 因此, 在频域, 运算有效性分解成如下三个部分:

a) 幅频特征的有效性

$$\begin{aligned} \Lambda_k(\varpi) &= \lg |Z_k(j2\pi \cdot 10^\varpi)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Lambda^{(\mu)}(\varpi) \\ &= \lg |I^{(\mu)}(j2\pi \cdot 10^\varpi)| \\ &= \mu[\varpi + \lg(2\pi)] \quad (\varpi \in \mathbb{R}); \end{aligned} \quad (7a)$$

b) 相频特征的有效性

$$\begin{aligned} \Theta_k(\varpi) &= \arg \{Z_k(j2\pi \cdot 10^\varpi)\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Theta^{(\mu)}(\varpi) \\ &= \frac{\pi}{2} \mu \quad (\varpi \in \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (7b)$$

c) 阶频特征的有效性

$$\begin{aligned} M_k(\varpi) &= \frac{d\Lambda_k(\varpi)}{d\varpi} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M^{(\mu)}(\varpi) \\ &= \frac{d\Lambda^{(\mu)}(\varpi)}{d\varpi} = \mu \quad (\varpi \in \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (7c)$$

2.2 Carlson 迭代有理逼近原理

Carlson 迭代有理逼近分数算子 $s^{\pm 1/n}$ 的基本数学思想是: 将分数算子 $s^{\pm 1/n}$ 有理逼近问题

$$Z_k(s) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} s^{\pm 1/n} (k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2) \quad (8)$$

中待求解的未知阻抗函数 $Z_k(s)$ 用未知数 x_k 替代, 确定的微积算子 $s^{\pm 1}$ 用已知正实数 a 替代(即取 $a = s^{\pm 1}$), 那么在给定正整数 $n (n \geq 2)$ 时, (8) 式

可写成

$$x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} r = \sqrt[n]{a} \quad (x_k \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+, n \geq 2). \quad (9)$$

那么分数算子有理逼近问题就转化为正实数 a 的求根问题—— n 次二项方程

$$f(x) = x^n - a = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2, x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+) \quad (10)$$

的正实根 $r = \sqrt[n]{a}$ 的迭代近似求解. 求解算术根 r 的经典牛顿迭代公式是

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_N(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k \cdot \frac{(n-1)x_k^n + a}{nx_k^n} \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned} \quad (11)$$

为加快牛顿迭代过程的收敛速度, Carlson 引入预矫正函数

$$g_m(x) = x^m > 0 \quad (x \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq n-1), \quad (12)$$

得到方程 (10) 的一个同解方程:

$$f_C(x) = \frac{f(x)}{g_m(x)} = x^{n-m} - ax^{-m} = 0. \quad (13)$$

于是算术根 $r = \sqrt[n]{a}$ 的广义牛顿迭代算法公式是

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_G(x_k) = x_k - \frac{f_C(x_k)}{f'_C(x_k)} \\ &= x_k \cdot \frac{(n-m-1)x_k^n + (m+1)a}{(n-m)x_k^n + ma} \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned} \quad (14)$$

取 $m = (n-1)/2$, 得到算术根 $r = \sqrt[n]{a}$ 的正则牛顿有理迭代公式——Carlson 迭代公式

$$x_{k+1} = F_C(x_k) = x_k \cdot \frac{(n-1)x_k^n + (n+1)a}{(n+1)x_k^n + (n-1)a} \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (15)$$

令 $a = 1/s$ 并代入迭代公式 (15) 式, 得到分数算子 $s^{-1/n}$ 的有理逼近阻抗函数序列

$$\begin{aligned} Z_{k+1}(s) &= F_C(Z_k(s)) \\ &= Z_k(s) \cdot \frac{(n-1)s \cdot Z_k^n(s) + (n+1)}{(n+1)s \cdot Z_k^n(s) + (n-1)} \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned} \quad (16)$$

2.3 分数算子 $s^{\pm j/n}$ 的有理逼近

Carlson 迭代法能否实现对任意阶分数算子 $s^{\pm j/n}$ ($j \in \mathbb{N}^+$, $1 \leq j \leq n-1$) 的有理逼近?

将分数算子 $s^{\pm j/n}$ 有理逼近问题转换为 n 次二项方程

$$f(x) = x^n - a^j = 0 \quad (a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^+) \quad (17)$$

的正实根

$$r^{(j)} = \sqrt[n]{a^j} \quad (18)$$

的数值迭代近似求解. 引入预矫正函数 $g_m(x)$ (取 $m = (n-1)/2$), 并使用牛顿迭代公式, 则求解算术根 $r^{(j)} = \sqrt[n]{a^j}$ 的迭代公式为

$$x_{k+1} = F_C^{(j)}(x_k) = x_k \cdot \frac{(n-1)x_k^n + (n+1)a^j}{(n+1)x_k^n + (n-1)a^j} \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (19)$$

令 $a = 1/s$ 并代入迭代公式 (19) 式, 得到分数算子 $s^{-j/n}$ 的有理逼近阻抗函数序列

$$\begin{aligned} Z_{k+1}(s) &= F_C^{(j)}(Z_k(s)) \\ &= Z_k(s) \cdot \frac{(n-1)s^j \cdot Z_k^n(s) + (n+1)}{(n+1)s^j \cdot Z_k^n(s) + (n-1)} \\ &= \frac{N_k(s)}{D_k(s)} \cdot \frac{(n-1)s^j \cdot N_k^n(s) + (n+1) \cdot D_k^n(s)}{(n+1)s^j \cdot N_k^n(s) + (n-1) \cdot D_k^n(s)}. \end{aligned} \quad (20)$$

与此对应的分子、分母多项式系数矢量 β_k 与 α_k 的迭代公式

$$\beta_{k+1} = \beta_k * [(n-1)^j \overrightarrow{\beta_k^{*n}} + (n+1)^j \overrightarrow{\alpha_k^{*n}}] \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (21)$$

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k * [(n+1)^j \overrightarrow{\beta_k^{*n}} + (n-1)^j \overrightarrow{\alpha_k^{*n}}] \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (22)$$

式中, $*$ 表示卷积运算. $j \overrightarrow{\beta_k^{*n}}$ 表示对 β_k 进行 $n-1$ 次卷积运算之后再增 j 次扩项操作, 例如对 β_k 进行增 j 次扩项操作

$$j \overrightarrow{\beta_k} = [\beta_{k,n_k}, \beta_{k,n_k-1}, \dots, \beta_{k,1}, \beta_{k,0}, \underbrace{0, \dots, 0}_{j \uparrow 0}], \quad (23)$$

$j \overrightarrow{\beta_k}$ 的最高次数是 $n_k + j$. $j \overrightarrow{\alpha_k^{*n}}$ 表示对 α_k 进行 $n-1$ 次卷积运算之后再增 j 次扩项操作, 例如对 α_k 进行等 j 次扩项操作

$$j \overrightarrow{\alpha_k} = [\underbrace{0, \dots, 0}_{j \uparrow 0}, \alpha_{k,d_k}, \alpha_{k,d_k-1}, \dots, \alpha_{k,1}, \alpha_{k,0}], \quad (24)$$

$j \overrightarrow{\alpha_k}$ 的最高次数仍是 d_k , 共含 $d_k + j + 1$ 项. 等次扩项便于程序中运用矩阵运算, 减少计算量. 阻抗函数 $Z_k(s)$ 分子、分母多项式的次数 n_k 与 d_k 由初

始阻抗函数分子、分母多项式的次数 n_0 与 d_0 、迭代次数 k 和运算阶 $\mu = -j/n$ 共同决定,

$$\begin{cases} n_0 = d_0 \rightarrow n_k = d_k \\ = (n+1)^k(n_0 + \mu) - \mu, \\ n_0 = d_0 + 1 \rightarrow n_k = d_k + 1 \\ = (n+1)^k(n_0 + \mu) - \mu, \\ n_0 = d_0 - 1 \rightarrow n_k = d_k - 1 \\ = (n+1)^k(n_0 + 1) - 1. \end{cases} \quad (25)$$

在数学上应用牛顿迭代公式求解方程的算术根是完全允许的. 考虑电路网络综合的物理实现和阻抗函数的分数阶运算特性, 阻抗函数序列 $\{Z_k(s)\}$ 需要满足计算有理性、正实性原理和运算有效性.

3 分数算子 $s^{\pm j/n}$ 的 Carlson 有理逼近的理论验证与实验验证

给定初始阻抗函数 $Z_0(s)$, 代入迭代公式得到阻抗函数 $Z_k(s)$ 及分子、分母多项式系数矢量 β_k 和 α_k . 阻抗函数序列 $\{Z_k(s)\}$ 是否满足基本性质通过以下方式判断.

1) 计算有理性: 当选择有理的初始阻抗函数时, 由 Carlson 迭代公式获得的阻抗函数保证计算有理性.

2) 正实性原理: 根据系数矢量计算的零极点分布判断阻抗函数是否满足正实性原理.

3) 运算有效性: 由阻抗函数的频域特征曲线判断阻抗函数是否满足运算有效性, 具有分数阶运算特性.

3.1 运算阶 $\mu = \pm 2/3$ 的分数算子的有理逼近

首先以运算阶 $\mu = -j/n = -2/3$ 为例. 当初始阻抗函数

$$Z_0(s) = \frac{N_0(s)}{D_0(s)} = \frac{1}{s} \quad (n_0 = 0, d_0 = 1), \quad (26)$$

则由迭代 (20) 式得到

$$\begin{aligned} Z_1^{(-2/3)}(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{2s+1}{s+2}, \\ Z_2^{(-2/3)}(s) &= \frac{1}{s} \\ &\times \frac{4s^5 + 42s^4 + 92s^3 + 80s^2 + 24s + 1}{s^5 + 24s^4 + 80s^3 + 92s^2 + 42s + 4}. \end{aligned} \quad (27)$$

阻抗函数的分子、分母多项式系数矢量及零极点如表 1 所示. 分母多项式的次数比分子多项式高一次, 且满足关系式 $n_k = d_k - 1 = (n+1)^k(n_0+1) - 1$ (表 1 中的系数矢量为分子、分母多项式约掉共同项后的结果). 阻抗函数 $Z_k^{(-2/3)}(s)$ 除原点存在一个极点, 其余零极点都分布在 s 复平面的左半平面, 且互为倒数——相对应的分子、分母多项式互为镜像多项式.

表 1 阻抗函数的系数矢量及零极点, $\mu = -2/3$, $Z_0(s) = 1/s$

Table 1. Coefficient vectors and zero-pole distribution of the impedance function when $\mu = -2/3$ and $Z_0(s) = 1/s$.

迭代次数 k	分子、分母多项式系数矢量	零点	极点
$k = 0$	$\beta_0 = [1]$ $\alpha_0 = [1, 0]$	—	0
$k = 1$	$\beta_1 = [2, 1]$ $\alpha_1 = [1, 2, 0]$	-0.5	0, -2.0
$k = 2$	$\beta_2 = [4, 42, 92, 80, 24, 1]$ $\alpha_2 = [1, 24, 80, 92, 42, 4, 0]$	-7.9, -1.0 + j0.48, -1.0 - j0.48, -0.5, -0.049	-20.0, -2.0, -0.8 + j0.37, -0.8 - j0.37, -0.13, 0

阻抗函数 $Z_k^{(-2/3)}(s)$ 的频域特征曲线如图 1 所示, 实线表示阻抗函数随着迭代次数 k 变化的频域特征曲线, 虚线表示理想分数算子 $s^{-2/3}$ 的频域特征曲线. 由图 1 可知, 阻抗函数 $Z_k^{(-2/3)}(s)$ 的幅

频、相频和阶频特征曲线, 随着迭代次数 k 的增加, 逼近理想分数算子 $s^{-2/3}$ 频域特征曲线的频率带宽在逐渐增加. 阻抗函数 $Z_k^{(-2/3)}(s)$ 具有分数算子 $s^{-2/3}$ 的运算特性, 满足运算有效性.

综上所述, 阻抗函数 $Z_k^{(-2/3)}(s)$ 满足计算有理性, 正实性原理和运算有效性, 所以阻抗函数能够实现分数算子 $s^{-2/3}$ 的有理逼近, 具有物理可实现性。

$Z_k^{(+2/3)}(s)$ 是阻抗函数 $Z_k^{(-2/3)}(s)$ 的倒数 (即 $Z_k^{(+2/3)}(s) = 1/Z_k^{(-2/3)}(s)$), 频域特征曲线如图 2 所示 (实线表示阻抗函数随着迭代次数 k 变化的频域特征曲线, 虚线表示理想分数算子 $s^{+2/3}$ 的频域特征曲线)。由图 2 可知, 阻抗函数 $Z_k^{(+2/3)}(s)$ 具有分数阶运算特性, 能够实现分数算子 $s^{+2/3}$ 的有理逼近。

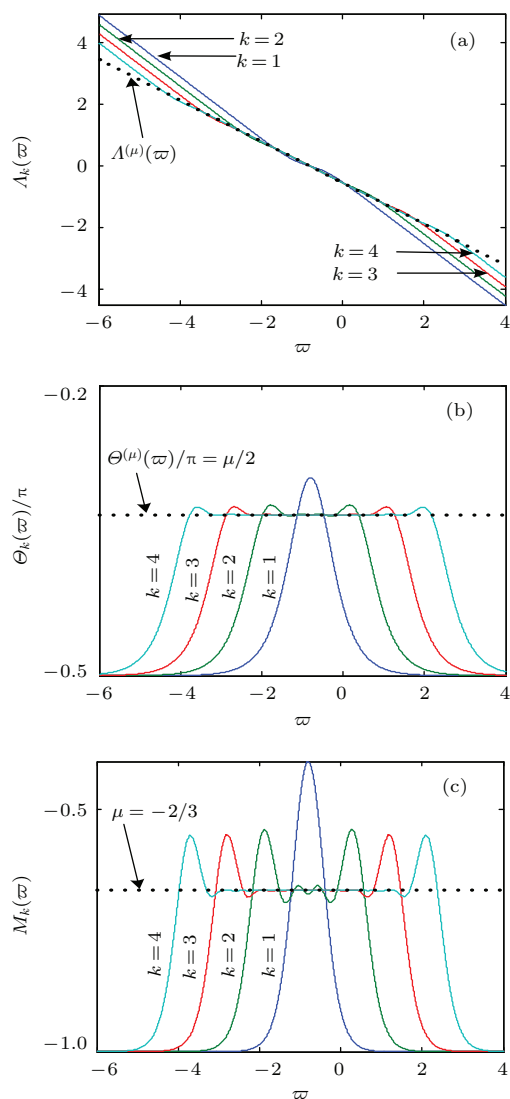


图 1 (网刊彩色) 阻抗函数 $Z_k(s)$ 的频域特征曲线图 ($\mu = -2/3$, $Z_0(s) = 1/s$) (a) 幅频特征; (b) 相频特征; (c) 阶频特征

Fig. 1. (color online) Frequency-domain characteristics curves of the impedance function $Z_k(s)$ with $\mu = -2/3$ and $Z_0(s) = 1/s$: (a) Amplitude-frequency characteristics; (b) phase-frequency characteristics; (c) order-frequency characteristics.

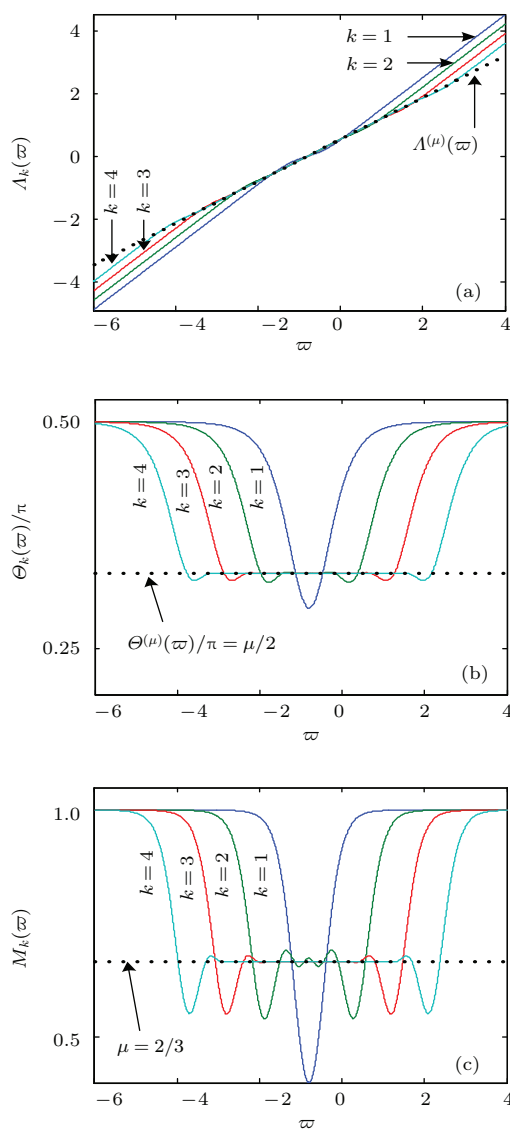


图 2 (网刊彩色) 阻抗函数 $Z_k(s)$ 的频域特征曲线图 ($\mu = 2/3$, $Z_0(s) = 1/s$) (a) 幅频特征; (b) 相频特征; (c) 阶频特征

Fig. 2. (color online) Frequency domain characteristic curves of the impedance function $Z_k(s)$ with $\mu = 2/3$ and $Z_0(s) = 1/s$: (a) Amplitude-frequency characteristics; (b) phase-frequency characteristics; (c) order-frequency characteristics.

3.2 运算阶 $\mu = -3/5$ 的分数算子的有理逼近

按照类似的分析方法考察其他运算阶 $\mu = -j/n$ 在不同初始阻抗函数的情况下是否能够有理逼近理想分数算子 $s^{-j/n}$ 。比如当运算阶 $\mu = -j/n = -3/5$, 初始阻抗为电容和电阻串联时, 即

$$Z_0(s) = \frac{N_0(s)}{D_0(s)} = R + \frac{1}{Cs} = 1 + \frac{1}{s}$$

$$(R = 1, C = 1, n_0 = d_0 = 1), \quad (28)$$

迭代次数 $k = 1$ 时, 阻抗函数的分子、分母多项式系数矢量及零极点如表 2 所示. 阻抗函数 $Z_1^{(-3/5)}(s)$ 的分子多项式的次数 n_1 等于分母多项式的次数 d_1 , 并且满足关系式 $n_k = d_k = (n + 1)^k(n_0 + \mu) - \mu$. 除原点存在一个极点, 其他零极点都分布在 s 复平面的左半平面. 随着迭代次数 k 的增加, 获得的阻抗函数由于分子、分母多项式的系数较大且项数较

多, 不便于具体表示, 但具有相同的结论.

阻抗函数 $Z_k^{(-3/5)}(s)$ 的阶频和相频特征曲线如图 3 所示 (实线表示阻抗函数的频域特征曲线, 虚线表示理想分数算子 $s^{-3/5}$ 的频域特征曲线). 当初始阻抗函数为 $Z_0(s) = R + 1/(Cs)$ 时, 由迭代公式获得的阻抗函数 $Z_k^{(-3/5)}(s)$ 虽然逼近频率边缘存在振荡现象, 但具有分数算子 $s^{-3/5}$ 的运算特性和物理可实现性.

表 2 阻抗函数 $Z_k(s)$ 的系数矢量及零极点 ($\mu = -3/5$, $Z_0(s) = 1 + 1/s$)

Table 2. Coefficient vectors and zero-pole distribution of the impedance function when $\mu = -3/5$ and $Z_0(s) = 1 + 1/s$.

迭代 次数 k	分子、分母 多项式系数矢量	零点	极点
$k = 0$	$\beta_0 = [1, 1]$ $\alpha_0 = [1, 0]$	-1	0
$k = 1$	$\beta_1 = [2, 12, 30, 43, 33, 12, 2]$ $\alpha_1 = [3, 15, 30, 32, 15, 3, 0]$	-2.6, -0.91 + j1.3, -0.91 - j1.3, -1.0, -0.3 + j0.25, -0.3 - j0.25	-2.3, -0.98 + j1.1, -0.98 - j1.1 -0.38 + j0.26, -0.38 - j0.26, 0

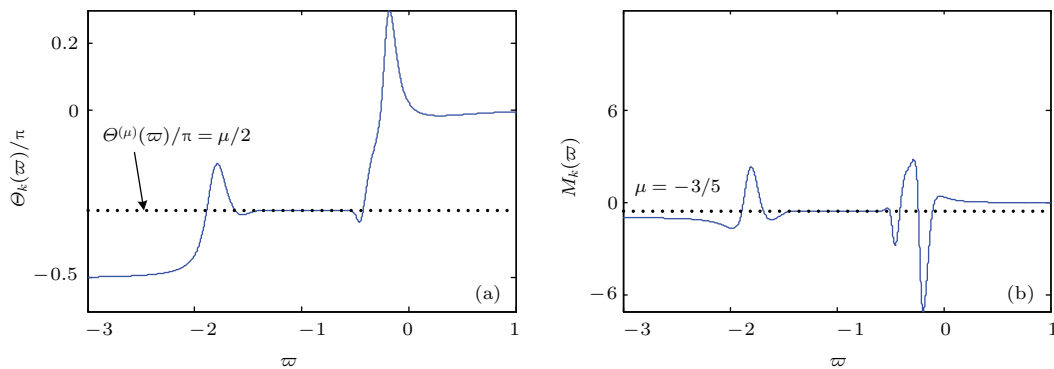


图 3 阻抗函数 $Z_k(s)$ 的频域特征曲线图 ($\mu = -3/5$, $k = 3$) (a) 相频特征; (b) 阶频特征

Fig. 3. Frequency-domain characteristics curves of the impedance function $Z_k(s)$ with $\mu = -3/5$ and $k = 3$: (a) Phase-frequency characteristics; (b) order-frequency characteristics.

3.3 运算阶与初始阻抗

运算阶 μ 分别取值 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \dots, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}$, 在选择 8 种不同初始阻抗函数的情况下, 研究理想分数算子 $s^{-j/n}$ 的有理逼近阻抗函数 $Z_k(s)$ 是否具有分数阶运算特性和具有物理可实现性, 总结如表 3 所示 (“ $\oplus$ ”表示串联, “//”表示并联. “ $\checkmark$ ”表示阻抗函数 $Z_k^{(-j/n)}(s)$ 具有分数算子 $s^{-j/n}$ 的运算特性和物理可实现性; 反之, “ $\times$ ”表示阻抗函数不具有分数阶运算特性和物理可实现性).

在以下三种特例中, 阻抗函数 $Z_k(s)$ 并不具有

分数阶运算特性和物理可实现性.

1) 不稳定. 阻抗函数的部分极点分布在 s 复平面的右半平面或者虚轴上 (除原点外), 造成系统不稳定, 不满足正实性原理. 比如运算阶 $\mu = -3/4$ 且 $Z_0(s) = (s + 2)/(s + 1)$ (初始阻抗为电容和电阻并联, 再串联一个电阻), 迭代次数 $k = 1$ 时, 阻抗函数

$$\begin{aligned} Z_1(s) = & (3s^8 + 30s^7 + 120s^6 + 245s^5 + 270s^4 \\ & + 166s^3 + 80s^2 + 45s + 10) \\ & \cdot (5s^8 + 45s^7 + 160s^6 + 283s^5 + 255s^4 \\ & + 110s^3 + 30s^2 + 15s + 3)^{-1}. \end{aligned} \quad (29)$$

表3 不同的运算阶 μ 选择不同的初始阻抗得到的阻抗函数的逼近情况

Table 3. Approximation situations of the impedance functions with different operational orders μ and different initial impedances.

初始阻抗 $Z_0(s)$	逼近情况									
	-1/2	-1/3	-2/3	-1/4	-3/4	-1/5	-2/5	-3/5	-4/5	
R	✓	✓	×	✓	×	✓	×	×	×	
C	✓	×	✓	×	✓	×	×	×	✓	
$R \oplus C$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
$R//C$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
$R_1 \oplus (R_2//C)$	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	×	×	
$C_1 \oplus (R//C_2)$	✓	✓	✓	×	✓	×	×	✓	✓	
$R_1//(R_2 \oplus C)$	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	×	×	
$C_1//(R \oplus C_2)$	✓	✓	✓	×	✓	×	×	✓	✓	

分子、分母多项式的零极点分布如图 4 所示 (“o” 表示零点, “x” 表示极点). 两个极点分布在 s 复平面的右半平面, 造成系统不稳定, 不满足正实性原理, 阻抗函数 $Z_k(s)$ 不能够实现对分数算子 $s^{-3/4}$ 的有理逼近.

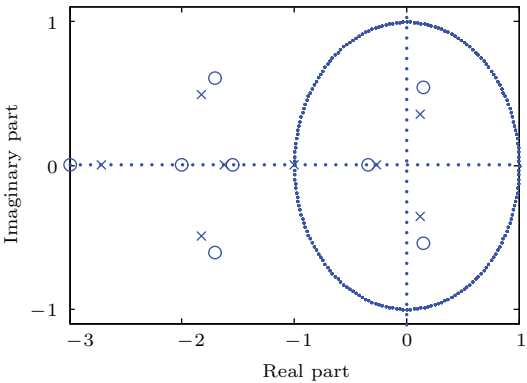


图4 阻抗函数 $Z_1(s)$ 的零极点分布图, $\mu = -3/4$
Fig. 4. Zero-pole distribution of the impedance function $Z_1(s)$ with $\mu = -3/4$.

2) 分子、分母多项式中最高次数项与最低次数项之间有缺项. 比如当运算阶 $\mu = -2/5$ 且初始阻抗 $Z_0(s) = 1/s$ 时, 迭代次数 $k = 1$ 时阻抗函数

$$Z_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} = \frac{3s^3 + 2}{2s^4 + 3s}. \tag{30}$$

分子多项式缺二次项和一次项, 分母多项式缺三次项和二次项, 不满足正实性原理. 频域特征曲线如图 5 所示 (图中实线是阻抗函数随迭代次数 k 变化的频域特征曲线, 虚线是理想分数算子 $s^{-2/5}$ 的频

域特征曲线). 阻抗函数的相频特征也不满足相频有效性

$$\Theta_k(\varpi)/\pi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Theta^{(\mu)}(\varpi)/\pi = \mu/2. \tag{31}$$

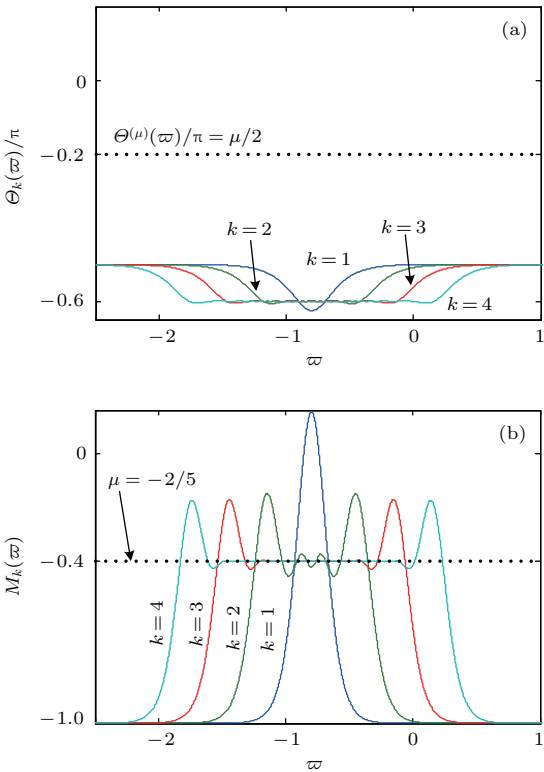


图5 (网刊彩色) 阻抗函数 $Z_k(s)$ 的频域特征曲线图: $\mu = -2/5$, $Z_0(s) = 1/s$ (a) 相频特征; (b) 阶频特征
Fig. 5. (color online) Frequency-domain characteristics curves of the impedance function $Z_k(s)$ with $\mu = -2/5$ and $Z_0(s) = 1/s$: (a) Phase-frequency characteristics; (b) order-frequency characteristics.

所以阻抗函数 $Z_k^{(-2/5)}(s)$ 并不具有分数阶运算特性和物理可实现性.

3) 阻抗函数不是复有理函数. 若阻抗函数 $Z_k^{(\pm j/n)}(s)$ 是实有理函数, 不是复有理函数, 则相频特征函数不满足相频有效性, 即不满足 (7b) 式, 阻抗函数 $Z_k(s)$ 不具有分数算子 $s^{\pm j/n}$ 的运算特性. 比如当运算阶 $\mu = -2/3$ 且初始阻抗 $Z_0(s) = R$ 时, 迭代次数 $k = 2$ 时的阻抗函数

$$Z_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{s^{10} + 24s^8 + 80s^6 + 92s^4 + 42s^2 + 4}{4s^{10} + 42s^8 + 92s^6 + 80s^4 + 24s^2 + 1}. \quad (32)$$

阻抗函数 $Z_2(s)$ 的分子、分母多项式缺少奇数项, 且对应的零极点不全分布在 s 复平面的左半平面. 而且 $Z_2(s)$ 是实有理函数, 相频特征函数 $\Theta_k(\omega) \neq -\pi/3$, 不满足相频有效性. 所以阻抗函数 $Z_k(s)$ 不可能实现对理想分数算子 $s^{\pm j/n}$ 的有理逼近.

4 结 论

Carlson 等提出正则牛顿迭代法有理逼近分数算子 $s^{\pm 1/n}$ (n 为大于或等于 2 的整数). 本文研究 Carlson 迭代法能否实现对任意阶分数算子 $s^{\pm j/n}$ 的有理逼近. 根据理论分析与实验验证, 对任意的运算阶 μ , 选择合适的有理初始阻抗 $Z_0(s)$, 通过拓展的 Carlson 迭代公式获得阻抗函数 $Z_k(s)$. 阻抗函数满足计算有理性、正实性原理和运算有效性, 具有物理可实现性和分数阶运算特性, 能够实现任意阶分数算子 s^μ 的有理逼近. Carlson 迭代法的拓展——由单一的分数算子 $s^{\pm 1/n}$ 到完美的任意阶分数算子 $s^{\pm j/n}$, 是行之有效的. 实现任意阶分数算子的有理逼近, 为进一步的理论研究和构造任意分数阶电路与系统打下坚实的基础. 接下来的研究课题是尝试获得阻抗函数 $Z_k(s)$ 的零极点的解析表达式 (类似文献 [32] 中 Oldham 链分抗的零极点解析表达式), 由零极点解析表达式便可判断系统的稳定性和分析系统对分数算子的逼近性能. 已知 Carlson 迭代法有理逼近分数算子 $s^{\pm 1/n}$ 的 K 指标, 能否获得当 $j \geq 2$ 时的 K 指标, 这是一个急需解决的难题. 使用无源器件或者结合有源器件来设计与构造分数阶元器件与系统, 比如利用网络综合理论设计分抗逼近电路, 实现任意阶分数微分和积分电路.

参考文献

- [1] Steiglitz K 1964 *IEEE Trans. Circuit Theory* **11** 160
- [2] Halijak C A 1964 *IEEE Trans. Circuit Theory* **11** 494
- [3] Ren Y, Yuan X 2008 *J. Sichuan Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **45** 1100 (in Chinese) [任毅, 袁晓 2008 四川大学学报 (自然科学版) **45** 1100]
- [4] Dutta R S C 1967 *IEEE Trans. Circuit Theory* **14** 264
- [5] Krishna B T, Reddy K V V S 2008 *Act. Passive Electron. Compon.* **2008** 369421
- [6] Krishna B T 2011 *Signal Process.* **91** 386
- [7] Liu Y, Pu Y F, Shen X D, Zhou J L 2012 *J. Sichuan Univ. (Eng. Sci. Ed.)* **44** 153 (in Chinese) [刘彦, 蒲亦非, 沈晓东, 周激流 2012 四川大学学报 (工程科学版) **44** 153]
- [8] Sun H H, Abdelwahab A A, Onaral B 1984 *IEEE Trans. Autom. Control* **29** 441
- [9] Zou D, Yuan X 2013 *J. Sichuan Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **50** 293 (in Chinese) [邹道, 袁晓 2013 四川大学学报 (自然科学版) **50** 293]
- [10] Carlson G E 1960 *M. S. Thesis* (Manhattan: Kansas State University)
- [11] Carlson G E, Halijak C A 1962 *IRE Trans. Circuit Theory* **9** 302
- [12] Carlson G E, Halijak C A 1964 *IEEE Trans. Circuit Theory* **11** 210
- [13] Zu Y X, Lu Y Q 2007 *Network Analysis and Synthesis* (Beijing: China Machine Press) pp111–120 (in Chinese) [祖云霄, 吕玉琴 2007 网络分析与综合 (北京: 机械工业出版社) 第 111—120 页]
- [14] Liao K, Yuan X, Pu Y F, Zhou J L 2006 *J. Sichuan Univ. (Eng. Sci. Ed.)* **43** 104 (in Chinese) [廖科, 袁晓, 蒲亦非, 周激流 2006 四川大学学报 (自然科学版) **43** 104]
- [15] Pu Y F, Yuan X, Liao K, Zhou J L, Zhang N, Zeng Y 2005 *Proceedings of IEEE International Conference on Mechatronics and Automation* Niagara Falls, Canada, July 29–August 1, 2005 p1375
- [16] Liao K, Yuan X, Pu Y F, Zhou J L 2005 *J. Sichuan Univ. (Eng. Sci. Ed.)* **37** 150 (in Chinese) [廖科, 袁晓, 蒲亦非, 周激流 2005 四川大学学报 (工程科学版) **37** 150]
- [17] Tsirimokou G, Psychalinos C, Elwakil A S 2015 *Analog. Integr. Circ. Sig. Process.* **85** 413
- [18] Pu Y F, Yuan X, Liao K, Zhou J L 2006 *J. Sichuan Univ. (Eng. Sci. Ed.)* **38** 128 (in Chinese) [蒲亦非, 袁晓, 廖科, 周激流 2006 四川大学学报 (工程科学版) **38** 128]
- [19] Ortigueira M D, Batista A G 2008 *Phys. Lett. A* **372** 958
- [20] Ortigueira M D 2008 *IEEE Circuits Syst. Mag.* **38** 19
- [21] Magin R, Ortigueira M D, Podlubny I, Trujillo J 2011 *Signal Process.* **91** 350
- [22] Sheng H, Chen Y Q, Qiu T S 2012 *Fractional Processes and Fractional-Order Signal Processing: Techniques and Applications* (Springer London, Dordrecht, Heidelberg, New York: Signals and Communication Technology) pp31–39
- [23] Elwakil A S 2010 *IEEE Circuits Syst. Mag.* **4** 40
- [24] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (San Diego(USA): Academic Press) pp252–259

- [25] Machado J A T, Silva M F, Barbosa R S, Jesus I S, Reis C M, Marcos M G, Galhano A F 2010 *Math. Probl. Eng.* **2010** 639801
- [26] Hu K X, Zhu K Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 108301
- [27] Ni J K, Liu C X, Liu K, Liu L 2014 *Chin. Phys. B* **23** 100504
- [28] Pan G, Wei J 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 040505 (in Chinese) [潘光, 魏静 2015 物理学报 **64** 040505]
- [29] Huang Y, Liu Y F, Peng Z M, Ding Y J 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 030505 (in Chinese) [黄宇, 刘玉峰, 彭志敏, 丁艳军 2015 物理学报 **64** 030505]
- [30] Yuan X 2015 *Mathematical Principles of Fractance Approximation Circuits* (Beijing: Science Press) pp218–236 (in Chinese) [袁晓 2015 分抗逼近电路之数学原理 (北京: 科学出版社) 第 218—236 页]
- [31] Valkenburg V M E (translated by Yang X J, Zheng J L, Yang W L) 1982 *Network Synthesis* (Beijing: Science Press) pp222–225 (in Chinese) [(美) Valkenburg V M E 著 (杨行峻, 郑君里, 杨为理 译) 1982 网络分析 (北京: 科学出版社) 第 222 —225 页]
- [32] Yi Z, Yuan X, Tao L, Liu P P 2015 *J. Sichuan Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **6** 1255 (in Chinese) [易舟, 袁晓, 陶磊, 刘盼盼 2015 四川大学学报 (自然科学版) **6** 1255]

Carlson iterating and rational approximation of arbitrary order fractional calculus operator^{*}

He Qiu-Yan Yuan Xiao[†]

(College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

(Received 29 April 2016; revised manuscript received 27 May 2016)

Abstract

With the development of fractional calculus theory and applications in different fields in recent years, the rational approximation problem of fractional calculus operator has become a hot spot of research. In the early 1950s and 1960s, Carlson and Halijak proposed regular Newton iterating method to implement rational approximation of the one-nth calculus operator. Carlson regular Newton iterating method has a great sense of innovation for the rational approximation of fractional calculus operator, however, it has been used only for certain calculus operators. The aim of this paper is to achieve rational approximation of arbitrary order fractional calculus operator. The realization is achieved via the generalization of Carlson regular Newton iterating method. To construct a rational function sequence which is convergent to irrational fractional calculus operator function, the rational approximation problem of fractional calculus operator is transformed into the algebra iterating solution of arithmetic root of binomial equation. To speed up the convergence, the pre-distortion function is introduced. And the Newton iterating formula is used to solve arithmetic root. Then the approximated rational impedance function of arbitrary order fractional calculus operator is obtained. For nine different operational orders with n changing from 2 to 5, the impedance functions are calculated respectively through choosing eight different initial impedances for a certain operational order. Considering fractional order operation characteristics of the impedance function and the physical realization of network synthesis, the impedance function should satisfy these basic properties simultaneously: computational rationality, positive reality principle and operational validity. In other words, there exists only rational computation of operational variable s in the expression of impedance function. All the zeros and poles of impedance function are located on the negative real axis of s complex plane or the left-half plane of s complex plane in conjugate pairs. The frequency-domain characteristics of impedance function approximate to those of ideal fractional calculus operator over a certain frequency range. Given suitable initial impedance and for an arbitrary operational order, it is proved that the impedance function could meet all properties above by studying the zero-pole distribution and analyzing frequency-domain characteristics of the impedance function. Therefore, the impedance function could take on operational performance of the ideal fractional calculus operator and achieve the physical realization. It is of great effectiveness in the generalization of this kind of method in both theory and experiment. The results deduced in this paper are the basis for further theoretic research and engineering application in constructing the arbitrary order fractional circuits and systems.

Keywords: fractional calculus, fractional operator, fractance approximation circuit, Carlson rational approximation

PACS: 02.30.Vv, 02.60.Gf, 84.30.Bv

DOI: 10.7498/aps.65.160202

^{*} Project supported by the Science and Technology Plan of Chengdu, China (Grant No. 12DXYB255JH-002).

[†] Corresponding author. E-mail: heqiuayan789@163.com