

反场构型等离子体中 Grad-Shafranov 方程的数值解

赵小明 孙奇志 方东凡 贾月松 刘正芬 孙承伟

Numerical solutions of Grad-Shafranov equation in a field-reversed configuration

Zhao Xiao-Ming Sun Qi-Zhi Fang Dong-Fan Jia Yue-Song Liu Zheng-Fen Sun Cheng-Wei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 185201 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.185201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.185201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I18>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一维动理学数值模拟激光与等离子体的相互作用

Study of laser plasma interactions using one-dimensional particle-in-cell code in kinetic regime

物理学报.2014, 63(8): 085207 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.085207>

黏性、表面张力和磁场对 Rayleigh-Taylor 不稳定性气泡演化影响的理论分析

Theoretical analysis of effects of viscosity, surface tension, and magnetic field on the bubble evolution of Rayleigh-Taylor instability

物理学报.2014, 63(8): 085203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.085203>

反场构型等离子体中 Grad-Shafranov 方程的数值解*

赵小明 孙奇志 方东凡 贾月松[†] 刘正芬 孙承伟

(中国工程物理研究院流体物理研究所, 脉冲功率科学与技术重点实验室, 绵阳 621999)

(2016 年 4 月 19 日收到; 2016 年 6 月 30 日收到修改稿)

基于反场构型 (field-reversed configuration) 渐近理论, 编写了反场构型等离子体中二维 Grad-Shafranov 方程的数值模拟代码, 研究了不同拉长形状的反场构型剖面. 通过模拟, 得到了磁面坐标系中反场构型等离子体压强及梯度分布, 同时求解了大拉长比、不同分界面 (separatrix) 类型的磁通量分布. 研究表明, 等离子体压强梯度随着磁通量呈线性增长, 在分界面处发生突变; 分界面处的等离子体压强越高, 分界面内部的压强会更高, 即具有更高的等离子体 β 值, 反映了反场构型较好的约束效果.

关键词: 反场构型, Grad-Shafranov 方程, 分界面, 拉长比

PACS: 52.55.Lf, 52.65.Kj, 52.25.Xz

DOI: 10.7498/aps.65.185201

1 引言

反场构型 (field-reversed configuration, FRC) 是磁化靶聚变技术的实现途径之一, 反场构型的实验研究始于上世纪五十年代末, 早期的实验装置以 Scylla I, theta-p II 为代表, 主要开展预电离实验研究, 后续的几十年中, 随着脉冲功率技术的发展, 反场构型的实验装置有了很大的改进和完善, 形成了以 FRX-A, FRX-L, “荧光-1”, C-2 等为代表的现代实验装置, 并且开展了大量的实验研究, 包括 FRC 等离子体靶的形成, 不稳定性的产生以及输运等问题. FRC 装置具有如下几个特点: 装置结构简单, 装置中心区域为等离子体, 易于维持芯部聚变; 其次, 磁场结构简单, 无环向磁场, 有利于避免大破裂出现的可能性; 另外, FRC 靶易于移动, 可将其从形成区域移动到约束区域, 对实现聚变的方式提供多种选择; 最后是高 β , 高 β 意味着反场构型约束能力强, 装置的经济效益高^[1].

FRC 等离子体属于紧凑环形等离子体结构, 环形等离子体的磁流体力学平衡由 Grad-Shafranov 方程描述^[2]. Grad-Shafranov 方程描述的是 FRC 形成后达到的一种理想平衡状态, 由于等离子体内部因素产生的不稳定性, 使得平衡状态存在的时间比较短暂, 通常情况下, 把 Grad-Shafranov 方程描述的平衡状态当作初始状态, 来研究等离子体的不稳定性及输运等物理问题. 初始状态下等离子体的压强及磁面的分布情况必须由 Grad-Shafranov 的解给出, 同时, 为了比较方便地研究等离子体的不稳定性及输运特性, 往往把磁面坐标系作为首选的参考系, 磁面坐标系与实验室坐标系之间的转化关系可借助于 Grad-Shafranov 方程求解^[3-8]. 因此精确求解 Grad-Shafranov 方程显得十分重要.

FRC 等离子体磁面结构的特点是严重拉伸变形, 这种拉伸变形在一定程度上为二维的 Grad-Shafranov 求解带来了诸多困难, 尤其是等离子体边界和分界面的处理. 关于 FRC 平衡的研究, 最早是二维的解析模型, 比如 Hill 漩涡模型, 及刚

* 中国工程物理研究院聚变能源科学技术研究中心科研课题 (批准号: J2014-0401-02) 和国家自然科学基金 (批准号: 11375163) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: jysniper@163.com

性转子模型, 半定量地给出了FRC分界面内部的磁通量分布或者径向的磁场和等离子体密度分布^[9,10]. 文献^[11—13]利用格林函数法直接求解了二维 Grad-Shafranov, 成功地处理非线性积分问题, 根据FRX-C的实验参数, 计算了针对装置模型的平衡截面, 同时研究了端部磁镜及纵向磁场对平衡的影响. 动理学效应被认为是等离子体中一个非常重要的因素, 但是, 研究表明FRC等离子体的动理学平衡与 Grad-Shafranov 方程求解的平衡几乎没有差别, 只是在动理学平衡中多了静电力, 是由电子和离子电荷分离造成的^[14]. FRC的混合平衡模型表明, 分界面附近流剪切效应会影响剖面结构, 标准的 Grad-Shafranov 方程无法处理流剪切效应^[15]. 国际上的一些FRC装置上开展了等离子体平衡的实验研究, 证实了 Grad-Shafranov 理论结果的准确性^[16,17].

根据FRC大拉长比的特点, Barnes^[18,19]提出了反场构型渐近理论的方法求解 Grad-Shafranov 方程, 反场构型渐近理论避开了 Grad-Shafranov 算子的非线性耦合项, 将所求物理量逐级展开, 分阶求解. 本文基于反场构型渐近理论, 编写了求解 Grad-Shafranov 方程的二维代码, 研究了FRC等离子体的平衡截面. Grad-Shafranov 方程二维代码为后续开展FRC等离子体磁流体不稳定性及输运等物理问题的研究奠定了基础.

2 FRC等离子体中的 Grad-Shafranov 方程

FRC形成过程中, 由于初始预电离等离子体密度较低, 磁场的磁压很大, FRC等离子体在轴向和径向收缩, 并且在收缩过程中由于磁场的压缩对等离子体产生了绝热压缩效应. 当外部磁压与等离子体内部总压相当时, 等离子体达到平衡, 这时等离子体的温度大致在几十到一百电子伏特, 等离子体密度比初始的气体密度大10倍左右. 达到平衡时, FRC等离子体靶几何结构如图1所示, 在 r - z 平面内, 分界面长度为 L_s , 分界面半径为 r_s , 石英玻璃管半径为 r_w .

FRC平衡时, 等离子体满足的MHD方程为

$$-\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

磁场 $\mathbf{B}$ 和电流方向 $\mathbf{J}$ 有 $\mathbf{J} \cdot \nabla P = 0$, $\mathbf{B} \cdot \nabla P = 0$,

P 为等离子体压强, 因此等离子体压强在磁力线上和电流方向是均匀的. 等离子体必须满足在径向和轴向的力学平衡, 因此方程(1)可化为 Grad-Shafranov 方程,

$$\Delta^* \psi = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\mu_0 r^2 \frac{dP}{d\psi}, \quad (2)$$

其中, ψ 是极向磁通量, 极向电流为 J_θ ,

$$J_\theta = -\frac{1}{\mu_0 r} \nabla_\perp^2 \psi. \quad (3)$$

将方程做归一化处理, $r = r/r_w$, $z = z/r_w$, $\psi = \psi/(2\psi_w)$, $p = P/p_0$, 其中, r_w 为器壁半径, ψ_w 为边界处磁通量, p_0 为真空磁压.

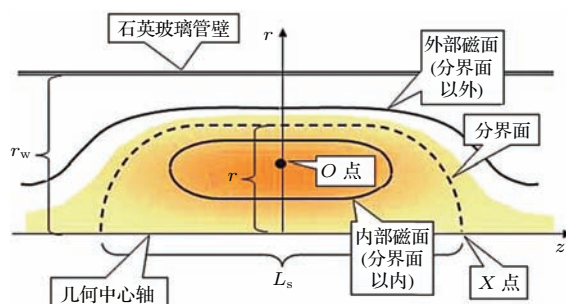


图1 (网刊彩色) 反场构型几何结构图^[1]

Fig. 1. (color online) Sketch of Field-reversed configuration^[1].

归一化后的 Grad-Shafranov 方程变为

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{r^2}{2} \frac{dp}{d\psi}. \quad (4)$$

在分界面处的磁通量为零, 假设FRC刮削层磁通量 $\psi > 0$, 那么, 在FRC芯部磁通量 $\psi < 0$, 在磁面坐标系中, 等离子体压强梯度 $dp/d\psi < 0$, 根据反场构型渐近理论, 变化快的方向为主方向, 变化慢的方向为高阶次方向, 高阶项可作为低阶项的修正. 在大拉长比的FRC中, z 向上变量变化相对缓慢, 因此对 z 向的微分认为是零. 方程(4)变为

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + p = p_e, \quad (5)$$

其中, p_e 分界面以外的磁压, 方程(5)两边分别对 r 和 ψ 积分可得

$$\frac{r^2}{2} = \int \frac{d\psi}{\sqrt{p_e - p}}, \quad (6)$$

设磁力线开放区域的半径为 r_{op} , 将方程(6)右边的积分为分界面以内和分界面以外,

$$\frac{r_{op}^2}{2} = \int_0^{p_s} \frac{dp/|p'|}{\sqrt{p_e - p}} + \int_{p_s}^{p_e} \frac{dp/|p'|}{\sqrt{p_e - p}}, \quad (7)$$

其中, p_s 为分界面压强, 经过逆 Abel 变化及近似处理得到磁通量与压强的渐进关系解^[18]:

$$\begin{aligned}
 & -2\pi\psi \\
 & = \sqrt{p-p_s} - \Delta\psi_{\text{op}} \cos \sqrt{\frac{p_s}{p}} + \frac{\psi_{\text{op}}}{p_s} \\
 & \times \left(2p \sin \sqrt{\frac{p_s}{p}} - 2\sqrt{p}\sqrt{p-p_s} - \pi p_s \right). \quad (8)
 \end{aligned}$$

分界面外部磁通量与分界面处等离子体压强的关系式为:

$$\begin{aligned}
 \psi_{\text{op}} & = \frac{\sqrt{p_s}-1}{2}, \\
 \Delta\psi_{\text{op}} & = 1 - 2\psi_{\text{op}}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

等离子体压强梯度为

$$-\frac{2\pi}{p'} = \frac{\Delta\psi_{\text{op}}}{2\sqrt{p_s}} \frac{\sqrt{p-p_s}}{p} + \frac{2\psi_{\text{op}}}{p_s} \sin \sqrt{\frac{p_s}{p}}. \quad (10)$$

方程(8)和(10)是反场构型渐进理论给出的FRC等离子体压强及梯度与磁通量之间的关系, 分界面处的等离子体压强 p_s 与磁通量 ψ_{op} 为边界参数. 对于二维的求解, 我们首先将磁通量和压强以逆拉长比 ε 的阶数展开如下:

$$\begin{aligned}
 \psi & = \psi_0 + \varepsilon^2\psi_1 + \cdots, \\
 p & = p_0 + \varepsilon^2p_1 + \cdots, \quad (11)
 \end{aligned}$$

其中, 逆拉长比 $\varepsilon = L^{-1} = r_s/L_s$, L 为FRC磁面拉长比. 零阶的等离子体压强由方程(8)决定, 而零阶磁通量根据等离子体分区的特点, 进行分段求解, 分段函数为

$$\begin{cases} \psi_0 = \psi_{\text{op}} + \frac{\Delta\psi_{\text{op}}}{2} \frac{r^2 - r_s^2}{1 - r_s^2}, & r \geq r_s, \\ \frac{d\psi_0}{dr} = r\sqrt{p_e - p_0(\psi_0)}, & r_s/\sqrt{2} \leq r < r_s, \\ \psi_0(r) = \psi_0(\sqrt{r_s^2 - r^2}), & r < r_s/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (12)$$

在 $r \geq r_s$ 的区域, 为FRC磁力线开放区, 等离子体中存在自由流, 等离子体并不严格地满足Grad-Shafranov方程; 在 $r < r_s$ 的区域, 为FRC芯部, O 点到中性轴之间满足反射条件, 通过方程(12)可求得各分界面处零阶磁通量分布. 一阶量的Grad-Shafranov为

$$L(\psi_1) \equiv L(p_1), \quad (13)$$

其中,

$$L(\psi_1) = \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{rp_0''}{2} \right) \psi_1, \quad (14)$$

$$L(p_1) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + \frac{rp_1'}{2}. \quad (15)$$

对于任意的 ψ_1, p_1 都满足方程(13), 那么方程有解的惟一条件是方程(14), 方程(15)恒等于零. 对方程(15)进行积分, 就有

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \frac{\partial \psi_0}{\partial r_s} L(p_1) dr \\
 & = \int_0^1 \frac{\partial \psi_0}{\partial r_s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + \frac{rp_1'}{2} \right) dr = 0, \quad (16)
 \end{aligned}$$

利用Abel积分公式,

$$\frac{d}{dr_s} \int_{p_s}^{p_e} \frac{p_1/|p_0'|}{\sqrt{p_e-p}} dp = - \int_0^1 \frac{\partial \psi_0}{\partial r_s} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} dr, \quad (17)$$

最终得到一阶的等离子体压强和磁通量^[18]

$$p_1 = \frac{p_0'}{\pi} \int_0^{r_s(\psi)} \frac{dr_s}{\sqrt{p-p_e}} \int_0^1 \frac{\partial \psi_0}{\partial r_s} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} dr, \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 \psi_1 & = -\frac{\partial \psi_0}{\partial r_s} \int_{r_s}^r \frac{r}{\partial \psi_0 / \partial r_s} dr \\
 & \times \int_0^r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + \frac{rp_1'}{2} \right) \frac{\partial \psi_0}{\partial r_s} dr. \quad (19)
 \end{aligned}$$

方程(8)和(10)给出了磁面坐标系下FRC等离子体压强和梯度的分布情况, 其中有几个反映FRC特征的物理量, 分别为分界面处的等离子体压强、边界磁通量. 根据FRC分界面方程, $G(z, r_s) = 0$, 方程(17)—方程(19)磁通量对 z 的偏微分可化为对 r_s 的偏微分. 借助于(12)式可求得一阶的磁通量和等离子体压强.

3 计算结果

方程(8)和方程(10)给出了FRC等离子体压强和梯度随磁通量变化的关系, 方程(12)描述的是零阶磁通量在 r 方向的分布情况, 一阶的等离子体压强和磁通量由方程(18)和(19)给出, 联合方程(12), 方程(18)和方程(19), 就可以得到特定结构FRC等离子体中磁通量的二维分布情况, 按照方程(8)和方程(10), 得到等离子体压强和梯度的二维分布情况. 方程(12)采用了龙格-库塔法求解, 而方程(18)和方程(19)两个积分方程则采用牛顿插值法.

根据方程(8)和方程(10)求得等离子体压强和梯度随磁通量变化的分布情况. 图2和图3分别给出了分界面处压强值为 $p_s = 1.5, 1.6, 1.65$ 的压强

及梯度分布. 图2显示, FRC分界面处的等离子体压强越高, 封闭磁力线内部的等离子体压强会更高, 内部具有更高的等离子体磁压比, 表明FRC具有更好的约束效果. 封闭磁力线内部($\psi \ll 0$), FRC等离子体梯度与磁通量几乎为线性函数关系(如图3). 在分界面附近等离子体梯度有突变, 出现这一现象的原因可能是分界面内侧磁力线相对密集, 磁压大, 满足力学平衡等离子体热压也就变大, 而在分界面外侧, 磁力线变疏, 磁压迅速减小, 等离子体的热压也就减小. 等离子体梯度为零的区域为真空区.

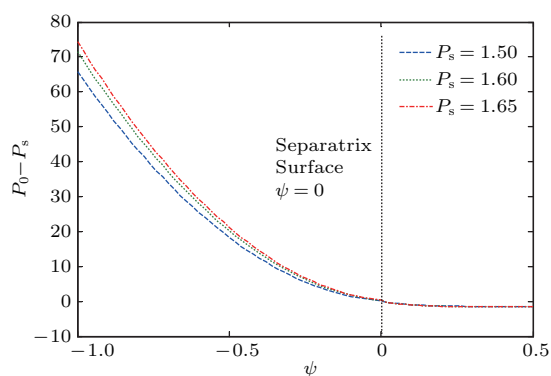


图2 (网刊彩色) 等离子体压强

Fig. 2. (color online) Plasma pressure.

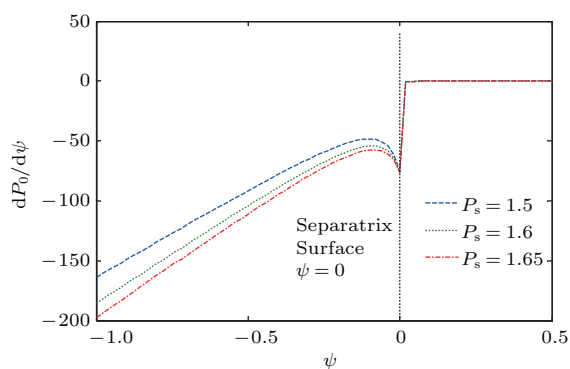


图3 (网刊彩色) 等离子体压强梯度 (分界面处压强分别为1.5, 1.6, 1.65)

Fig. 3. (color online) Gradient of pressure (Pressure at the separatrix is 1.5, 1.6, 1.65, respectively).

根据(12)式, 得到了磁通量在径向的分布情况, 按照FRC磁场结构的特点, 首先确定边界值, 真空区域的边界值取0.5, 而FRC芯部的磁通量为0. 为了达到更高的计算精度, 计算过程中的空间格点数为10000. 不同分界面半径的磁通量分布情况如图4, 分界面半径取值分别为: $r_s = 0.04, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6, 0.8$. 分界面半径越小, 反射条件越不

明显, 由反射条件给出的O点(磁通量在径向的极值)会逐渐消失.

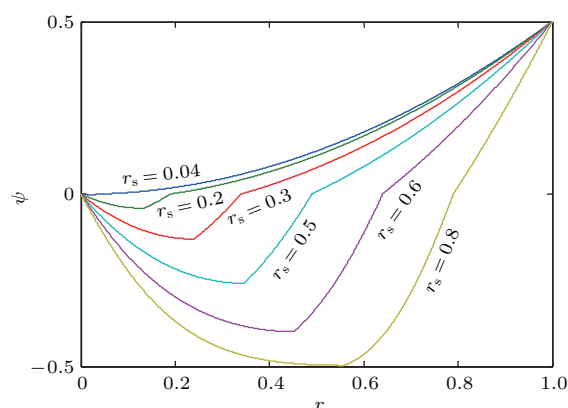


图4 (网刊彩色) 零阶的磁通量分布情况 (分界面半径取值: $r_s = 0.04, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6, 0.8$)

Fig. 4. (color online) Magnetic flux of leading order(separatrix radius is $r_s = 0.04, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6, 0.8$, respectively).

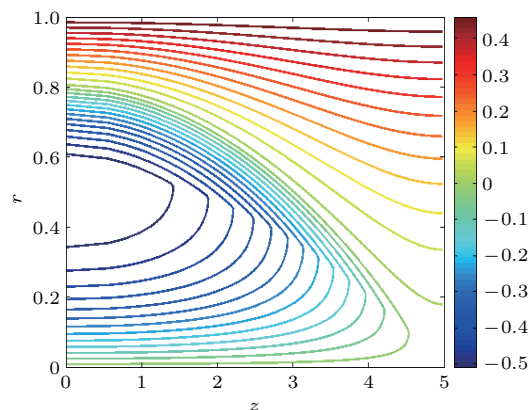


图5 (网刊彩色) “椭圆型”FRC磁通量分布

Fig. 5. (color online) Magnetic flux of “elliptical” shaped separatrix.

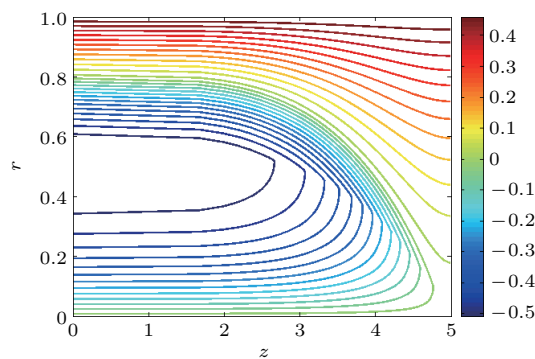


图6 (网刊彩色) “跑道型”FRC磁通量分布

Fig. 6. (color online) Magnetic flux of “racetrack” shaped separatrix.

FRC的分界面方程一般为 $r_s = r_{s\max}(1 - z^{2a})$. 当 $a = 1$ 时, 分界面为“椭圆型”; 当 $a > 1$ 时, 分界

面为“跑道型”。“椭圆型”及“跑道型”分界面FRC的二维分布分别如图5和图6所示. 纵向分界面长度为 $L_s = 5.0$, 分界面最大半径为 $r_{s\max} = 0.8$, “椭圆型”分界面形状参数 $a = 1$, “跑道型”分界面形状参数 $a = 2$. 为了证实本文模拟代码的有效性, 将所得结果和文献结果进行了比较, “椭圆型”分界面FRC的参数与文献[19]中的参数值一致, 计算结果与文献[19]结果符合得很好.

我们对不同分界面半径的FRC做了相应的计算, 其中, 分界面长度 $L_s = 3$, 分界面形状参数为 $a = 1$, 分界面半径取值为 $r_{s\max} = 0.3, 0.5, 0.8$, 分别对应图7(a), 图7(b)和图7(c). 随着FRC分界面半径的增大, O 点位置由内逐渐向外移动, 可能

的原因是, 形成FRC磁面结构的环形电流具有曲率, 曲率限制分界面内部的磁通量必须满足反射条件, 而反射条件的极值点正好是 O 点所在的位置, 反射条件的极值点随着分界面半径的增大而向外移动.

代码模拟了大拉长比(分界面半长度为 z_s)的FRC平衡剖面, 拉长比是反应FRC几何尺寸的另外一个重要物理量, 图8(a), 图8(b)和图8(c)显示拉长比分别为3.75, 11.25, 18.75的平衡剖面, 其中分界面形状参数为 $a = 2$, 为“跑道型”分界面, 分界面半径为 $r_{s\max} = 0.8$. 大拉长比FRC中性面附近磁力线几乎是直线, 反映了渐近理论的合理性.

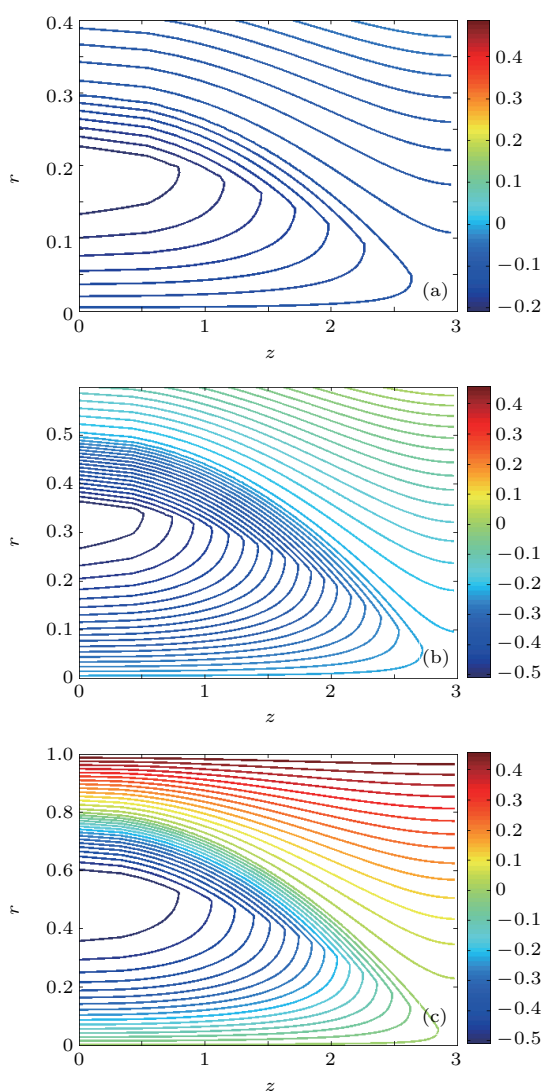


图7 (网刊彩色) 不同分界面半径的FRC磁通量分布 (a) $r_{s\max} = 0.3$; (b) $r_{s\max} = 0.5$; (c) $r_{s\max} = 0.8$

Fig. 7. (color online) FRC magnetic flux distribution in separatrix radius: (a) $r_{s\max} = 0.3$; (b) $r_{s\max} = 0.5$; (c) $r_{s\max} = 0.8$.

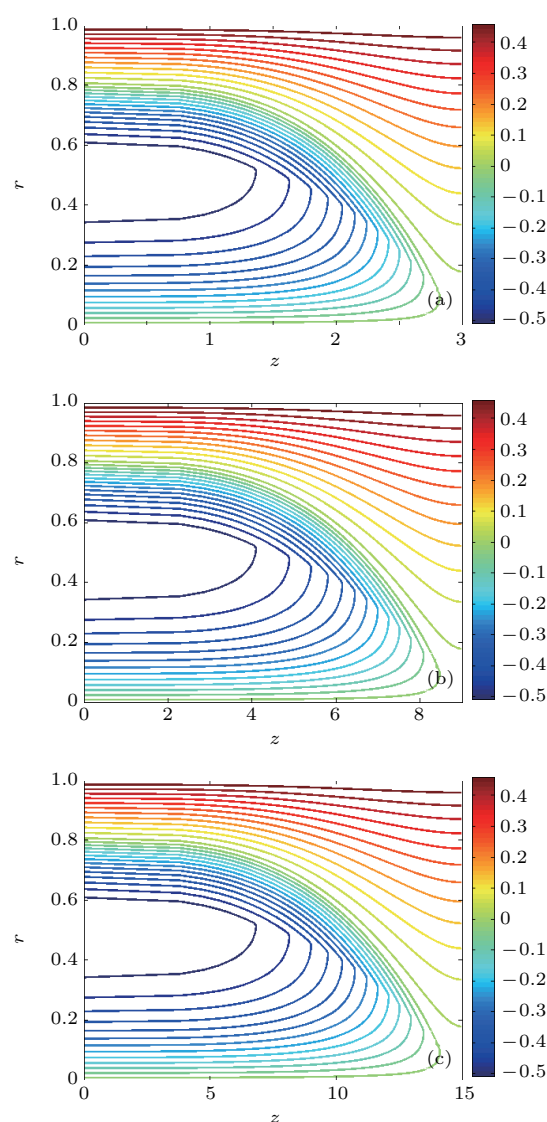


图8 (网刊彩色) 不同拉长比的FRC磁通量分布 (a) $z_s = 3.0$; (b) $z_s = 9.0$; (c) $z_s = 15.0$

Fig. 8. (color online) FRC magnetic flux distribution in elongations: (a) $z_s = 3.0$; (b) $z_s = 9.0$; (c) $z_s = 15.0$.

4 讨 论

本文首先对反场构型渐近理论做了简介, 基于反场构型渐近理论模型, 编写了求解FRC等离子体中二维Grad-Shafranov方程的数值模拟代码. 通过二维计算结果, 对数值模拟代码进行了标定, 在相同参数下, 计算结果与文献结果一致, 从而证实了代码的有效性. 反场构型渐近理论只适用于大拉长比FRC等离子体Grad-Shafranov方程的求解, 大拉长比的FRC磁面结构中, 磁场在 r 方向的梯度远远大于 z 方向的梯度, 梯度大的方向为主方向, 梯度小的方向为高阶次方向, 高阶项为低阶项的修正, 修正的量级为逆拉长比 ε . 反场构型渐近理论将方程中维度之间的耦合分解开来, 减少了计算量及计算难度.

一维计算结果表明分界面处等离子体压强是影响FRC等离子体约束效果的关键物理量之一. 另外, 在FRC分界面附近等离子体压强梯度有突变, 分析可能的原因是分界面内侧磁力线相对密集, 磁压大, 满足力学平衡等离子体热压也就就会变大, 而在分界面外侧, 磁力线变疏, 磁压迅速减小, 等离子体的热压也就减小.

二维计算的一个关键问题是FRC的分界面方程的选择, 本文所采用的是一般方程: $r_s = r_{s\max}(1 - z^{2a})$, 只需要改变形状参数 a , 就可以实现椭圆分界面或者圆分界面的选择, 分界面的几何特征结构在一阶量中得到体现 (一阶方程中 $\frac{\partial\psi_0}{\partial z} = \frac{\partial\psi_0}{\partial r_s} \frac{\partial r_s}{\partial z}$, $\frac{\partial\psi_0}{\partial r_s}$ 在零阶计算中求得, $\frac{\partial r_s}{\partial z}$ 由分界面方程决定). FRC等离子体中 O 点会随着分界面半径的增大而向外移动, 这是因为, 分界面半径增大, FRC等离子体磁面的曲率半径会增大, 曲率中心, 也就是 O 点也会随之向外移动.

5 结 论

利用二维代码, 计算了FRC等离子体满足Grad-Shafranov方程的压强和梯度, 数值结果表明, 在FRC芯部, 等离子体压强梯度随磁通量线性增加; 在分界面附近, 等离子体压强梯度出现突变, 分界面附近磁力线陡峭分布造成了这一现象. FRC

等离子体形状一般分为“椭圆型”和“跑道型”, 针对分界面半径及拉长比两个物理参量, 本文对这两种结构的FRC平衡剖面分别进行了计算, 结果显示分界面半径和拉长比是决定FRC平衡剖面的关键因素. 大拉长比FRC平衡剖面计算说明模拟代码的计算参数范围较广. FRC等离子体中Grad-Shafranov方程的求解是一个基础性的工作, MHD宏观不稳定性、等离子体的输运等物理问题解决, 大多数情况下需要在磁面物理坐标系下进行, 而实验室坐标系到磁面坐标系的转换关系, 需要借助于Grad-Shafranov方程求解, 而且, 这些问题中等离子体初始条件就是满Grad-Shafranov方程的平衡分布. Grad-Shafranov方程虽然能够比较准确地给出FRC平衡剖面, 但是无法解释FRC平衡形成过程 O 点及 X 点的演化过程及这两点处带电粒子的行为等问题, 需要从动理学的角度去研究.

参考文献

- [1] Steinhauer L C 2011 *Phys. Plasmas* **18** 070501
- [2] Shafranov V D 1966 *Reviews of Plasma Physics* **2** 103
- [3] Schwarzmeier J L, Barnes D C, Hewett D W, Seyler C E, Shestakov A I, Spencer R L 1983 *Phys. Fluids* **26** 1295
- [4] Schwarzmeier J L, Seyler C E 1984 *Phys. Fluids* **27** 2151
- [5] Iwasawa N, Ishida A, Steinhauer L C 2001 *Phys. Plasmas* **8** 1240
- [6] Ohtsuka T, Okubo M, Okada S, Goto S 1998 *Phys. Plasmas* **5** 3649
- [7] Steinhauer L C 1990 *Phys. Fluids B* **2** 2679
- [8] Werley K A 1987 *Phys. Fluids* **30** 2129
- [9] Herbert L B, James H H, Harold W 1981 *Phys. Fluids* **24** 1758
- [10] Morse R L 1969 *Equilibria of Collisionless Plasma Part II* (N. Mex.: Los Alamos Scientific Lab.) p5
- [11] Hewett D W, Spencer R L 1983 *Phys. Fluids* **26** 1299
- [12] Spencer R L, Tuszewski M 1985 *Phys. Fluids* **28** 1810
- [13] Spencer R L, Hewett D W 1982 *Phys. Fluids* **25** 1365
- [14] Webster R B, Schwarzmeier J L, Lewis H R, Choi C K, Terry W K 1991 *Phys. Fluids B* **3** 1026
- [15] Steinhauer L C 2011 *Phys. Plasmas* **18** 110509
- [16] Armstrong W T, Linford R K, Lipson J 1981 *Phys. Fluids* **24** 2068
- [17] Okada S, Kiso Y, Goto S, Ishimura T 1989 *J. Appl. Phys.* **65** 4625
- [18] Barnes D C 2001 *Phys. Plasmas* **8** 4865
- [19] Barnes D C 2001 *Phys. Plasmas* **8** 4864

Numerical solutions of Grad-Shafranov equation in a field-reversed configuration*

Zhao Xiao-Ming Sun Qi-Zhi Fang Dong-Fan Jia Yue-Song[†]
Liu Zheng-Fen Sun Cheng-Wei

(Key Laboratory of Pulse Power, Institute of Fluid Physics, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621999, China)

(Received 19 April 2016; revised manuscript received 30 June 2016)

Abstract

The solution of Grad-Shafranov equation in field-reversed configuration (FRC) is a basic problem. The solution of Grad-Shafranov equation can help to understand most of physical processes in FRC plasma, such as magnetohydrodynamic (MHD) instabilities and plasma transport. In the present paper, based on the FRC asymptotic theory by Barnes D C, the code for solving the two-dimensional Grad-Shafranov equation in FRC is developed. By using the code, the equilibriums of FRC with different elongations and separatrix radii are investigated in the present paper. The one-dimensional numerical results show that the plasma density gradient increases linearly with magnetic flux increasing in the FRC center, while, it steepens due to the high magnetic field distribution at the separatrix. The results also show that the plasma density in the closed field region increases with the density at the separatrix increasing, which implies that FRC embodies the strong confinement ability. It is a key problem to choose equations determining the shape of the separatrix in a two-dimensional numerical investigation. In the present paper, the shape equation is described as $r_s = r_{s\max}(1 - z^{2a})$, in which a is the shaping parameter. When $a = 1$, the separatrix shape is elliptical, and when $a > 1$, the separatrix shape is like a racetrack. The geometry character of the separatrix appears in the one-order equations (in one-order equations: $\frac{\partial\psi_0}{\partial z} = \frac{\partial\psi_0}{\partial r_s} \frac{\partial r_s}{\partial z}$, where $\frac{\partial\psi_0}{\partial r_s}$ is determined by lead equations and $\frac{\partial r_s}{\partial z}$ is given by separatrix equation). The two-dimensional numerical results show that O -point moves outward as the separatrix radius increases. The curvature radius of magnetic flux surface increases with the separatrix radius increasing. The O -point of magnetic flux surface is just at the curvature center. Thus O -point moves outward as the separatrix radius increases.

Keywords: field-reversed configuration, Grad-Shafranov equation, separatrix, elongation

PACS: 52.55.Lf, 52.65.Kj, 52.25.Xz

DOI: 10.7498/aps.65.185201

* Project supported by the Research Program of Center for Fusion Energy Science and Technology, China Academy Engineering Physics (Grant No. J2014-0401-02) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11375163).

[†] Corresponding author. E-mail: jysniper@163.com