

Birkhoff 动力学函数成为约束系统第一积分的判别方法

崔金超 廖翠萃 刘世兴 梅凤翔

A method of judging a Birkhoffian to be a first integral of constrained mechanical system

Cui Jin-Chao Liao Cui-Cui Liu Shi-Xing Mei Feng-Xiang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 040201 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.040201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.040201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I4>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

(2+1) 维高阶 Broer-Kaup 系统的非局域对称及相互作用解

Nonlocal symmetries and interaction solutions of the (2+1)-dimensional higher order Broer-Kaup system

物理学报.2016, 65(24): 240202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.240202>

一类高阶非线性波方程的李群分析、最优系统、精确解和守恒律

Lie symmetry analysis, optimal system, exact solutions and conservation laws of a class of high-order nonlinear wave equations

物理学报.2016, 65(14): 140201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.140201>

广义 Birkhoff 系统的两类广义梯度表示

Two kinds of generalized gradient representations for generalized Birkhoff system

物理学报.2016, 65(8): 080201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.080201>

一种求解 Birkhoff 动力学函数和 Lagrange 函数的简化方法

A simplified method of solving Birkhoffian function and Lagrangian

物理学报.2016, 65(18): 180201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.180201>

Birkhoff动力学函数成为约束系统第一积分的判别方法*

崔金超¹⁾ 廖翠萃¹⁾ 刘世兴²⁾ 梅凤翔^{3)†}

1)(江南大学理学院, 无锡 214122)

2)(辽宁大学物理学院, 沈阳 110036)

3)(北京理工大学宇航学院, 北京 100018)

(2016年9月6日收到; 2016年11月18日收到修改稿)

基于Birkhoff动力学函数包含系统全部运动信息的观点, 借鉴Hamilton系统导出第一积分的思路, 结合自治、半自治Birkhoff方程的定义和Birkhoff张量反对称性的特点, 研究判别给定Birkhoff动力学函数是否是系统第一积分的方法. 主要结论包括: 证明自治系统的Birkhoff函数必是系统的第一积分, 而半自治系统的Birkhoff函数一定不是系统的第一积分; 针对非自治Birkhoff系统, 导出循环积分、类循环积分以及Hojman积分, 并讨论积分之间的关系. 最后, 通过两个例子来说明结论的具体应用.

关键词: 约束力学系统, Birkhoff方程, Birkhoff动力学函数, 第一积分

PACS: 02.30.Jr, 45.20.-d, 45.30.+s

DOI: 10.7498/aps.66.040201

1 引言

约束力学系统按照所受约束在Frobenius定理意义下是否可积, 分为完整系统和非完整系统^[1-3]. 完整保守系统的运动规律, 可以用Lagrange方程或Hamilton方程来描述. 这两类方程都是自伴随的, 并且Hamilton方程还具有变分原理与辛结构共栖的特性, 其中自伴随性质保证了系统的运动方程可由某种变分原理导出, 因而是系统演化曲线极值特性的反映, 同时它还是系统对称性的体现. 辛结构是Hamilton系统相空间的几何特征, 也是构造辛算法的基础. 当力学系统扩展到完整非保守系统时, 人们自然希望描述系统运动规律的微分方程, 仍然保持完整保守系统那样的自伴随性质和几何结构. 对这一问题的研究使得Lagrange逆问题、Hamilton逆问题向Birkhoff逆问题推广^[4-8]. 在Birkhoff逆问题框架下, 完整系统

(保守的或非保守)实现了普适的自伴随表示, 即Birkhoff方程形式, 同时还表现出一般辛结构的几何特征. 然而, Birkhoff系统的偶数维特性使其不能涵盖一般的非完整系统. 事实上要实现非完整系统普适的自伴随表示, 需要寻求更为一般的动力学形式. 文献[9]研究了这一问题, 得到了描述非完整系统普适的、自伴随的、具有预辛几何结构的广义Birkhoff方程形式.

分析力学从Lagrange系统到广义Birkhoff系统的不断发展, 最终实现了约束力学系统的自伴随表示, 但随之而来的问题是如何求解系统的动力学方程^[10-15]. 不论是Birkhoff方程还是广义Birkhoff方程, 其积分理论都是现阶段要研究的基本问题^[16-21]. 但Birkhoff方程的偏微分方程特征使其通解难以求得, 这时如果能找到某些第一积分, 对于我们了解系统的演化规律将是有益的. 如果给定系统的Birkhoff动力学函数, 就能写出对应的Birkhoff方程, 因此Birkhoff动力学函数实际上

* 国家自然科学基金(批准号: 11472124, 11401259, 11272050)和江南大学自主科研计划(批准号: JUSRP11530)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: meifx@bit.edu.cn

包含了系统全部的运动信息, 这些信息当然也包括第一积分在内. 这提示我们若对 Birkhoff 动力学函数做适当的分析, 就可能从中找到系统的第一积分. 本文研究这一问题, 主要利用与 Birkhoff 方程有关的运算技巧, 结合 Birkhoff 张量的反对称性, 研究判别 Birkhoff 动力学函数成为系统第一积分的方法, 推导过程和结论也适用于广义 Birkhoff 方程的情形.

在第 2 部分, 介绍完整系统的一阶标准形式及其 Birkhoff 表示; 在第 3 部分, 具体研究 Birkhoff 方程的第一积分, 得到系统的类能量积分、类循环积分、循环积分以及 Hojman 积分; 在第 4 部分, 通过两个例子说明本文结论的具体应用; 在第 5 部分, 总结全文并对结果进行讨论.

2 完整约束系统的 Birkhoff 方程

完整约束系统在位形空间中的运动可用如下基本形式描述

$$A_{ij}(t, q, \dot{q})\ddot{q}^j + B_i(t, q, \dot{q}) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

其中 $q^i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是广义坐标, $\dot{q}^i$ 是广义速度. 这里及以下采用爱因斯坦求和约定.

一般来说, 完整系统在方程 (1) 的形式下不是自伴随的, 其自伴随化问题需要在变分逆问题框架下研究. 在 Lagrange 逆问题框架下, 存在一些完整系统, 其运动微分方程 (1) 由于无法满足 Helmholtz 条件, 而没有等价的 Lagrange 方程形式. 此类系统被称为本质非自伴随系统. 虽然本质非自伴随系统可以先通过降为一阶方程组, 然后利用自伴随因子 Hamilton 化, 但此时的 Hamilton 函数不再具有明显的物理意义, 相空间的变量也失去了实验室可观测性质. 这种为了形式上实现 Hamilton 表示, 而放弃系统动力学变量、动力学函数物理意义的策略, 与分析力学一贯以实际物理系统为研究对象的传统模式相悖. 于是, 要坚持分析力学的传统模式, 就要放弃 Hamilton 方程简单辛结构的限制, 代之以一般辛结构, 从而在 Birkhoff 逆问题框架下实现完整系统普适的自伴随表示.

具体到完整系统位形空间的运动方程 (1), 其 Birkhoff 化需要先通过变量替换化为如下一阶标准

形式^[22]:

$$\dot{a}^\mu - \Xi^\mu(t, a) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2n). \quad (2)$$

然后以方程 (2) 为出发点, 再依据下述定理实现完整系统的自伴随表示.

定理 1^[22] 任何局域、解析、正规、完整的一阶力学系统 (2), 在其正规点的星形邻域上, 总能实现自伴随的、保持动力学函数和变量物理意义的 Birkhoff 方程形式, 即

$$\left[\frac{\partial R_\nu(t, a)}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu(t, a)}{\partial a^\nu} \right] \dot{a}^\nu - \left[\frac{\partial B(t, a)}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu(t, a)}{\partial t} \right] = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n). \quad (3)$$

其中 $B(t, a)$ 称为 Birkhoff 函数, $2n$ 个函数 $R_\mu(t, a)$ 称为 Birkhoff 函数组.

为方便起见, 本文将 $2n + 1$ 个函数 (B, R_μ) 统称为 Birkhoff 动力学函数. 若引入 Birkhoff 张量

$$\Omega_{\mu\nu}(t, a) = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}, \quad (4)$$

则方程 (3) 可写为

$$\Omega_{\mu\nu}(t, a)\dot{a}^\nu - \left[\frac{\partial B(t, a)}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu(t, a)}{\partial t} \right] = 0. \quad (5)$$

若上式中函数 B 和 R_μ 都不显含时间 t , 则 (5) 式成为自治 Birkhoff 方程形式, 即

$$\Omega_{\mu\nu}(a)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B(a)}{\partial a^\mu} = 0. \quad (6)$$

又若函数 R_μ 不显含时间 t , 而函数 B 显含时间 t , 则 (5) 式成为半自治 Birkhoff 方程形式, 即

$$\Omega_{\mu\nu}(a)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B(t, a)}{\partial a^\mu} = 0. \quad (7)$$

3 Birkhoff 方程的第一积分

现在, 我们考察自治和半自治 Birkhoff 系统的动力学函数与第一积分之间的关系.

3.1 类能量积分

定理 2 自治 Birkhoff 方程 (6) 的 Birkhoff 函数 $B(a)$ 一定是系统的第一积分, 而半自治 Birkhoff 方程 (7) 的 Birkhoff 函数 $B(t, a)$, 一定不是系统的第一积分.

证明 首先, 将半自治方程 (7) 两端同乘 $\dot{a}^\mu$, 即

$$\Omega_{\mu\nu}(a)\dot{a}^\nu\dot{a}^\mu - \frac{\partial B(t, a)}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu = 0, \quad (8)$$

注意到 Birkhoff 张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 的反对称性, 易得

$$\frac{\partial B(t, a)}{\partial a^\mu} \dot{a}^\mu = 0. \quad (9)$$

其次, 求函数 $B(t, a)$ 的全导数, 并将上式代入得

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \dot{a}^\mu = \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (10)$$

于是: 1) 对于自治 Birkhoff 方程, 因函数 B 不显含 t , 故

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \Rightarrow B = \text{const}, \quad (11)$$

即 $B = \text{const}$ 是系统的第一积分.

2) 对于半自治 Birkhoff 方程, 由于 $\frac{\partial B}{\partial t} \neq 0$, 故 $\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} \neq 0$, 即函数 $B(t, a)$ 一定不是系统的第一积分. 证毕.

与 Hamilton 系统的能量积分相对应, 我们将自治 Birkhoff 系统的第一积分 (11) 称为类能量积分.

3.2 类循环积分

定理 3 若 Birkhoff 动力学函数 B 和 R_μ 满足

$$\frac{\partial R_\nu}{\partial a^k} \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2n). \quad (12)$$

则非自治 Birkhoff 方程 (3) 有类循环积分

$$R_k = \text{const}. \quad (13)$$

证明 考虑非自治 Birkhoff 方程 (3) 的第 k 个方程

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^k} - \frac{\partial R_k}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B}{\partial a^k} + \frac{\partial R_k}{\partial t} \right) = 0. \quad (14)$$

将其改写为

$$\frac{\partial R_k}{\partial t} + \frac{\partial R_k}{\partial a^\nu} \dot{a}^\nu = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^k} \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^k}, \quad (15)$$

即

$$\frac{dR_k}{dt} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^k} \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^k}. \quad (16)$$

于是, 当条件 (12) 成立时有

$$\frac{dR_k}{dt} = 0 \Rightarrow R_k = \text{const}. \quad (17)$$

证毕.

对定理 3 中的条件做进一步限定, 可得如下推论.

推论 1 若 Birkhoff 动力学函数 B 和 R_ν 满足

$$\frac{\partial B}{\partial a^k} = 0, \quad \frac{\partial R_\nu}{\partial a^k} \dot{a}^\nu = 0, \quad (18)$$

则 Birkhoff 方程有类循环积分 (13).

为导出系统的循环积分, 我们先给出循环坐标的定义.

定义 1 若 Birkhoff 动力学函数 B 和 R_μ 都不显含变量 a^k , 即

$$\frac{\partial B}{\partial a^k} = 0, \quad \frac{\partial R_\mu}{\partial a^k} = 0, \quad (19)$$

则称 a^k 为循环坐标.

利用循环坐标的定义 1 和定理 3, 可得如下推论.

推论 2 若 a^k 为循环坐标, 则 Birkhoff 方程有循环积分 (13).

显然, 循环积分一定是类循环积分, 反之亦然. 此外, 推论 1, 2 中的条件都只是系统有类循环积分的充分条件, 而不是必要条件, 只有定理 3 的条件 (12) 才是充分必要的.

3.3 Hojman 积分

若已知完整系统 (2) 全部独立的第一积分 $I^\alpha(t, a) (\alpha = 1, 2, \dots, 2n)$, 则 Birkhoff 动力学函数可由下式确定:

$$\begin{cases} B(t, a) = -G_\alpha \frac{\partial I^\alpha}{\partial t}, \\ R_\mu(t, a) = G_\alpha \frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu}, \end{cases} \quad (20)$$

其中函数 $G_\alpha = G_\alpha(I(a))$ 要满足正规性条件

$$\det \left(\frac{\partial G_\alpha}{\partial I^\beta} - \frac{\partial G_\beta}{\partial I^\alpha} \right) \neq 0. \quad (21)$$

这种构造 Birkhoff 动力学函数的方法称为 Hojman 方法 [5].

可以验证, 由 Hojman 方法构造的 B 和 R_μ 总满足如下关系:

$$B = R_\mu \dot{a}^\mu. \quad (22)$$

将这一关系与完整系统的一阶标准形 (2) 式相结合, 我们得到如下定理.

定理 4 若完整系统的一阶标准形式 $\dot{a}^\mu = \Xi^\mu(t, a)$ 不显含 a^k , 且 Birkhoff 动力学函数 B 和 R_μ 满足关系 (22), 则 Birkhoff 系统有 Hojman 积分

$$R_k^H = \text{const}, \quad (23)$$

其中 R_k^H 的上标 H 表示此组 Birkhoff 动力学函数是由 Hojman 方法构造 (20) 的.

证明 将关系式 $B = R_\mu \dot{a}^\mu$ 代入 Birkhoff 方程的第 k 个方程 (14), 得

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^k} - \frac{\partial R_k}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \left[\frac{\partial(R_\nu \dot{a}^\nu)}{\partial a^k} + \frac{\partial R_k}{\partial t} \right] = 0. \quad (24)$$

将上式展开整理得

$$\frac{dR_k}{dt} = -R_\nu \frac{\partial \dot{a}^\nu}{\partial a^k}. \quad (25)$$

当 $\dot{a}^\mu = \Xi^\mu(t, a)$ 不含 a^k 时有

$$\frac{dR_k}{dt} = 0 \Rightarrow R_k^H = \text{const}. \quad (26)$$

证毕.

下面我们讨论 Hojman 积分与类循环积分的关系.

定理 5 当 $\frac{\partial B}{\partial a^k} = 0$ 时, Hojman 积分 (23) 成为类循环积分 (13).

证明 对于 Birkhoff 函数组 R_μ 有

$$\frac{\partial R_\nu}{\partial a^k} \dot{a}^\nu = \frac{\partial(R_\nu \dot{a}^\nu)}{\partial a^k} - R_\nu \frac{\partial \dot{a}^\nu}{\partial a^k}, \quad (27)$$

当系统有 Hojman 积分时, 关系 $B = R_\nu \dot{a}^\nu$ 成立, 于是上式写为

$$\frac{\partial R_\nu}{\partial a^k} \dot{a}^\nu = \frac{\partial B}{\partial a^k} - R_\nu \frac{\partial \dot{a}^\nu}{\partial a^k}. \quad (28)$$

再注意到此时 $\dot{a}^\nu = \Xi^\nu(t, a)$ 不显含 a^k , 故有

$$R_\nu \frac{\partial \dot{a}^\nu}{\partial a^k} = 0, \quad (29)$$

代入 (28) 式得

$$\frac{\partial R_\nu}{\partial a^k} \dot{a}^\nu = \frac{\partial B}{\partial a^k}. \quad (30)$$

显然, 当 $\frac{\partial B}{\partial a^k} = 0$ 成立时, 必有 $\frac{\partial R_\nu}{\partial a^k} \dot{a}^\nu = 0$. 由推论 1 知, 这正是系统存在类循环积分的充分条件. 命题得证.

4 算 例

例 1 给定系统的 Birkhoff 动力学函数为 [23]

$$\begin{cases} B = \frac{1}{2}[(a^3)^2 - (a^4)^2] + a^2 a^3, \\ R_1 = a^2 + a^3, \quad R_2 = 0, \\ R_3 = a^4, \quad R_4 = 0. \end{cases} \quad (31)$$

试判断其中的第一积分.

1) 类能量积分: 容易看出, (31) 式决定的 Birkhoff 方程是自治的. 于是由定理 2 知

$$B = \frac{1}{2}[(a^3)^2 - (a^4)^2] + a^2 a^3 = \text{const} \quad (32)$$

是系统的类能量积分.

2) 循环积分: 注意到 $\frac{\partial B}{\partial a^1} = 0, \frac{\partial R_\mu}{\partial a^1} = 0$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), 由定义 1 知 a^1 是循环坐标, 再由推论 2 知

$$R_1 = a^2 + a^3 = \text{const} \quad (33)$$

是系统的循环积分.

最后, 可以验证当 $k = 2, 4$ 时, 定理 3 的条件 (12) 成立, 因此 $R_2 = 0, R_4 = 0$ 可以看作是系统的平凡类循环积分.

在文章引言部分我们指出, 本文的方法和结论也适用于非完整系统广义 Birkhoff 方程第一积分的求解, 举例如下.

例 2 考虑非完整的 Appell-Hamel 椅子轮系统, 其 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - gz, \quad (34)$$

所受非线性非完整约束为

$$\dot{z} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (35)$$

此系统的一组广义 Birkhoff 动力学函数为 [24]

$$\begin{cases} R_1 = a^4/a^3, \\ R_2 = [(a^3)^2 + (a^4)^2 + ga^5]g, \\ R_3 = \frac{(a^3)^2 a^4 [(a^3)^2 + (a^4)^2 + ga^5 + 2] + (a^4)^3}{3\sqrt{(a^3)^2 + (a^4)^2}}, \\ R_4 = \frac{1}{\sqrt{(a^3)^2 + (a^4)^2}} \{ a_3^2 [(a^3)^2 + 3(a^4)^2 + ga^5] \\ + (a^4)^2 [2(a^4)^2 + 2ga^5 + 1] \}, \\ R_5 = 0, \quad B = 0. \end{cases} \quad (36)$$

试判断其中的第一积分.

1) 循环积分: 由 (36) 式可以看出, 函数 B 和 R_I ($I = 1, 2, 3, 4, 5$) 均不含变量 a^1, a^2 , 故 a^1, a^2 为循环坐标. 由推论 1 知, 系统有如下循环积分:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{a^4}{a^3} = \text{const}, \\ R_2 &= (a_3^2 + a_4^2 + ga^5)g = \text{const}. \end{aligned} \quad (37)$$

注意到 $R_5 = 0$ 是系统的平凡积分, 这表明 a^k 为循环坐标的确仅是 R_k 为循环积分的充分条件, 而不是必要条件.

2) 类循环积分: 由于 $\frac{\partial R_I}{\partial a^5} \neq 0$ ($I = 2, 3, 4$), 故 a^5 不是循环坐标, 进而 $R_5 = 0$ 不是循环积分, 但由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_J}{\partial a^5} \dot{a}^J &= 0 \quad (J = 1, 2, 3, 4, 5), \\ \frac{\partial B}{\partial a^5} &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

成立, 于是由推论 1 知, $R_5 = 0$ 是系统的平凡类循环积分.

3) Hojman 积分: 将 (36) 式给出的函数 B 和 R_I 代入 (3) 式, 可得系统的 Birkhoff 方程, 由 Birkhoff 方程又可导出系统的一阶标准形式

$$\begin{cases} \dot{a}^1 = a^3, & \dot{a}^2 = a^4, \\ \dot{a}^3 = -\frac{1}{2} \frac{ga^3}{\sqrt{(a^3)^2 + (a^4)^2}}, \\ \dot{a}^4 = -\frac{1}{2} \frac{ga^4}{\sqrt{(a^3)^2 + (a^4)^2}}, \\ \dot{a}^5 = \sqrt{(a^3)^2 + (a^4)^2}. \end{cases} \quad (39)$$

上式说明 $\dot{a}^I = \Xi^I(t, a)$ 不显含 a^1, a^2, a^5 , 又容易验证所给 B 和 R_I 满足关系 $B = R_I \dot{a}^I$, 于是由定理 4 知, 系统有如下 Hojman 积分:

$$\begin{aligned} R_1^H &= \frac{a^4}{a^3} = \text{const}, \\ R_2^H &= (a_3^2 + a_4^2 + ga^5)g = \text{const}, \\ R_5^H &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

又由于 $\frac{\partial B}{\partial a^I} = 0$ ($I = 1, 2, 3, 4, 5$) 成立, 由定理 5 知 Hojman 积分 (40) 也都是类循环积分.

5 结 论

Birkhoff 系统是一类更具一般意义的基础动力学系统, Birkhoff 系统动力学的理论与方法已被用于强子物理、量子物理、相对论、转动相对论以及分数阶动力学系统 [19, 22, 25–27]. 值得关注的是对于一个给定的动力学系统, 如何判别其 Birkhoff 函数是否是系统的第一积分, 以及如何寻找非自治 Birkhoff 系统的第一积分, 都是重要而基本的动力学问题.

本文借鉴 Hamilton 方程推导能量积分、循环积分的思路, 运用分析技巧找到了 Birkhoff 动力学函数和第一积分之间的联系, 并以定理和推论的形式给出了函数 B 和 R_μ 成为系统的类能量积分、类循环积分以及 Hojman 积分的判别条件, 并讨论了

类循环积分和 Hojman 积分之间的关系. 在第 4 部分, 我们通过两个例子说明结论的应用. 例 1 是完整系统自治 Birkhoff 方程的情形, 此时的 Birkhoff 函数一定是系统的第一积分, 这一点可以通过写出系统的一阶标准形式加以验证; 例 2 是非完整系统 Birkhoff 方程的情形, 详细给出了文中提到的各类积分的求解过程, 同时也说明本文的方法和结论适用于广义 Birkhoff 系统.

应该看到, 本文的方法对于判断给定的函数 B 和 R_μ 是否是系统的第一积分是有效的, 但不能给出更多新的积分. 弥补这一不足的可能方法是利用合痕变换得到多组等价的 Birkhoff 动力学函数, 然后利用本文的结论加以判断. 除此以外, 我们也希望在后续研究中发展出更为直接的方法来求解 Birkhoff 方程的第一积分.

参考文献

- [1] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics I* (New York: Springer-Verlag) pp219–235
- [2] Chen B 2012 *Analytical Dynamics* (2nd Ed.) (Beijing: Peking University Press) pp5–15 (in Chinese) [陈滨 2012 分析动力学 (第二版) (北京: 北京大学出版社) 第 5—15 页]
- [3] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) pp6–45 (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础 (北京: 北京工业学院出版社) 第 6—45 页]
- [4] Marsden J E, Ratiu T S 1999 *Introduction to Mechanics and Symmetry 2nd Edition* (New York: Springer-Verlag) pp181–210
- [5] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F *et al.* 1996 *Dynamics of Birkhoff System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) pp8–25 (in Chinese) [梅凤翔, 史荣昌, 张永发 等 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京: 北京理工大学出版社) 第 8—25 页]
- [6] Douglas J 1941 *Trans. Amer. Math. Soc.* **50** 71
- [7] Lee H C 1945 *Amer. J. Math.* **67** 321
- [8] Bloch A M 2009 *Repor. Math. Phys.* **63** 225
- [9] Guo Y X, Liu C, Liu S X 2010 *Commun. Math.* **18** 21
- [10] Wu H B, Mei F X 2012 *Chin. Phys. B* **21** 064501
- [11] Xue Y 2012 *Mech. Eng.* **34** 94 (in Chinese) [薛纭 2012 力学与实践 **34** 94]
- [12] Zhang Y, Xue Y 2009 *Chin. Quar. Mech.* **30** 216 (in Chinese) [张毅, 薛纭 2009 力学季刊 **30** 216]
- [13] Chen X W, Luo S K, Mei F X 2002 *Appl. Math. Mech.* **23** 47 (in Chinese) [陈向炜, 罗绍凯, 梅凤翔 2002 应用数学和力学 **23** 47]
- [14] Liu S X, Xing Y, Liu C, Guo Y X 2016 *Acta Sci. Natur. Univ. Peking* **52** 592 (in Chinese) [刘世兴, 邢燕, 刘畅, 郭永新 2016 北京大学学报 (自然科学版) **52** 592]

- [15] Liu C, Liu S X, Mei F X, Guo Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6709 (in Chinese) [刘畅, 刘世兴, 梅凤翔, 郭永新 2008 物理学报 **57** 6709]
- [16] Mei F X, Wu H B, Li Y M, Chen X W 2016 *Chin. J. Theor. Appl. Mech.* **48** 263 (in Chinese) [梅凤翔, 吴惠彬, 李彦敏, 陈向炜 2016 力学学报 **48** 263]
- [17] Guo Y X, Shang M, Luo S K 2003 *Appl. Math. Mech.* **24** 62 (in Chinese) [郭永新, 尚玫, 罗绍凯 2003 应用数学和力学 **24** 62]
- [18] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) pp62–74 (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京: 北京理工大学出版社第62—74页]
- [19] Luo S K, Xu Y L 2015 *Acta Mech.* **226** 829
- [20] Zhang Y, Zhou Y 2013 *Nonlin. Dyn.* **73** 783
- [21] Chen X W, Mei F X 2000 *Mech. Res. Commu.* **27** 365
- [22] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics II* (New York: Springer-Verlag) p54
- [23] Kong X L 2014 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Beijing Institute of Technology) (in Chinese) [孔新雷 2014 博士学位论文 (北京: 北京理工大学)]
- [24] Cui J C 2014 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Beijing Institute of Technology) (in Chinese) [崔金超 2014 博士学位论文 (北京: 北京理工大学)]
- [25] Luo S K 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 133
- [26] Luo S K, Fu J L, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese) [罗绍凯, 傅景礼, 陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]
- [27] Su H L, Qin M Z 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 329

A method of judging a Birkhoffian to be a first integral of constrained mechanical system*

Cui Jin-Chao¹⁾ Liao Cui-Cui¹⁾ Liu Shi-Xing²⁾ Mei Feng-Xiang³⁾†

1) (School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

2) (College of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China)

3) (School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100018, China)

(Received 6 September 2016; revised manuscript received 18 November 2016)

Abstract

As is well known, the development of analysis mechanics from Lagrangian systems to Birkhoffian systems, achieved the self-adjointness representations of the constrained mechanical systems. Based on the Cauchy-Kovalevsky theorem of the integrability conditions for partial differential equations and the converse of the Poincaré lemma, it can be proved that there exists a direct universality of Birkhoff's equations for local Newtonian system by reducing Newton's equations into a first-order form, which means that all local, analytic, regular, finite-dimensional, unconstrained or holonomic, conservative or non-conservative forms always admit, in a star-shaped neighborhood of a regular point of their variables, a representation in terms of first-order Birkhoff's equations in the coordinate and time variables of the experiment. The systems whose equations of motion are represented by the first-order Birkhoff's equations on a symplectic or a contact manifold spanned by the physical variables, are called Birkhoffian systems. The theory and method of Birkhoffian dynamics are used in hadron physics, quantum physics, relativity, rotational relativity, and fractional-order dynamics.

At present, for a given dynamical system, it is important and essential to determine whether a Birkhoffian function is the first integral of the system. Although the numerical approximation is an important method of solving the differential equations, the direct theoretical analysis is more helpful for refining the general integral method, and more consistent with the usual way of solving problems of analysis mechanics. In this paper, we study how to judge whether a given Birkhoffian dynamical function to be a first integral of Birkhoff's equations, based on the point of Birkhoffian dynamical functions carrying all the information about motion of the system, and use the thought of deriving the first integrals of Hamiltonian systems. In Section 2, the normal first-order form and the Birkhoff's equations of the equations of motion of holonomic systems are introduced. In Section 3, we prove that the Birkhoffian function of an autonomous Birkhoffian system must be a first integral, and the Birkhoffian function of a semi-autonomous system must not be a first integral. Moreover, the energy integral, cyclic integral and Hojman integral of the non-autonomous Birkhoffian systems are given. In Section 4, two examples are given to illustrate the applications of the results. In Section 5, the full text is summarized and the results are discussed. It is necessary to point out that the judging method is effective to determine whether a given Birkhoffian functions can be identified to be a first integral of Birkhoff's equations, but other new first integral cannot be found with this method. One possible method of covering the shortage is to obtain other equivalent Birkhoffian functions in terms of isotopic transformations of Birkhoff's equations, and then use our results to seek the new first integral. In addition, we also hope to develop a more direct method of obtaining the first integrals of Birkhoff's equations in the next study.

Keywords: constrained mechanical systems, Birkhoff's equations, Birkhoffian dynamical functions, first integrals

PACS: 02.30.Jr, 45.20.-d, 45.30.+s

DOI: 10.7498/aps.66.040201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11472124, 11401259, 11272050) and the Self-determined Research Program of Jiangnan University, China (Grant No. JUSRP11530).

† Corresponding author. E-mail: meifx@bit.edu.cn