

一类可用 Hamilton-Jacobi 方法求解的非保守 Hamilton 系统

王勇 梅凤翔 肖静 郭永新

A kind of non-conservative Hamilton system solved by the Hamilton-Jacobi method

Wang Yong Mei Feng-Xiang Xiao Jing Guo Yong-Xin

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, **66**, 054501 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.054501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.054501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I5>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

悬浮二维晶体材料反射光谱和光致发光光谱的周期性振荡现象

[Periodic oscillation in the reflection and photoluminescence spectra of suspended two-dimensional crystal flakes](#)

物理学报.2016, 65(13): 136801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.136801>

金属纳米薄膜在石墨基底表面的动力学演化

[Dynamical evolution study of metal nanofilms on graphite substrates](#)

物理学报.2016, 65(3): 036804 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.036804>

石墨烯等离激元的光学性质及其应用前景

[Optical properties of graphene plasmons and their potential applications](#)

物理学报.2015, 64(10): 106801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.106801>

硅晶体表面石墨烯褶皱形貌的分子动力学模拟研究

[Molecular dynamics study of ripples in graphene monolayer on silicon surface](#)

物理学报.2015, 64(1): 016804 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.016804>

# 一类可用 Hamilton-Jacobi 方法求解的非保守 Hamilton 系统\*

王勇<sup>1)2)</sup> 梅凤翔<sup>1)</sup> 肖静<sup>2)</sup> 郭永新<sup>3)4)†</sup>

1)(北京理工大学宇航学院, 北京 100081)

2)(广东医科大学信息工程学院, 东莞 523808)

3)(辽宁大学物理学院, 沈阳 110036)

4)(辽东学院影像物理教研室, 丹东 118001)

(2016年8月18日收到; 2016年12月3日收到修改稿)

Hamilton-Jacobi 方法通常被认为是求解完整保守 Hamilton 系统正则方程的重要手段, 但通过现代微分几何理论发现, 这种方法的适用范围不仅仅局限于完整保守的 Hamilton 系统. 根据 Hamilton-Jacobi 理论, 证明了经典 Hamilton-Jacobi 方法可以被推广至一类特殊的非保守 Hamilton 系统, 即如果非保守 Hamilton 系统受到非保守力, 则该系统的 Hamilton 正则方程也可以用 Hamilton-Jacobi 方法求解; 对于这类非保守 Hamilton 系统, 只要能够找到其对应的 Hamilton-Jacobi 方程的一个完全解, 就可以得到系统正则方程的全部第一积分. 经典的 Hamilton-Jacobi 方法则是上述方法的一个特例.

**关键词:** Hamilton-Jacobi 理论, 非保守 Hamilton 系统, Hamilton 正则方程

**PACS:** 45.20.Jj, 02.40.Yy

**DOI:** 10.7498/aps.66.054501

## 1 引言

Hamilton-Jacobi 方程是一类重要的非线性偏微分方程, 在经典力学、几何光学、流体力学、粒子物理、广义相对论、量子力学、宇宙学、最优控制、化学等诸多研究领域都有重要的应用<sup>[1-11]</sup>. 在经典力学中, 经典 Hamilton-Jacobi 方法是求解完整保守 Hamilton 系统正则方程的重要手段<sup>[9-11]</sup>, 这种方法有其独到的优点, 阿诺德曾经指出: “用 Jacobi 解出的许多问题用别的方法是解不出来的.” 根据经典 Hamilton-Jacobi 方法, 设系统的 Hamilton 函数为  $H(t, q^i, p_i)$  (本文中所有  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , 且采用爱因斯坦求和约定), 如果可以找到 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}\right) = 0 \quad (1)$$

的一个完全解  $S(t, q^i, \alpha_i)$  (其中  $\alpha_i$  为任意常数), 则完整保守 Hamilton 系统的正则方程

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \quad (2)$$

就能找到全部  $2n$  个第一积分, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \\ p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\beta_i$  为  $n$  个新的任意常数.

历史上, 经典 Hamilton-Jacobi 方法直接源自于人们对一阶偏微分方程和常微分方程组之间密切联系的认识<sup>[11]</sup>. 从偏微分方程的角度看, 经典 Hamilton-Jacobi 方法的关键是指出了正则方程 ((2) 式) 的积分曲线与 Hamilton-Jacobi 方程 ((1) 式) 的特征曲线之间的关系, 因此根据偏微分方

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11572145, 11272050, 11572034) 和广东省自然科学基金 (批准号: 2015A030310127) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yxguo@lmu.edu.cn

程理论, 只要找到一个完全解, 就可以用代数的方法解出 (1) 式的特征曲线, 从而得到完整、保守 Hamilton 系统的  $2n$  个第一积分.

近些年, 随着几何力学的发展 [12–15], 人们从经典 Hamilton-Jacobi 方法出发, 逐步构建了一套有着深刻物理和数学内涵, 并和 Lagrange 力学、Hamilton 力学相对独立的 Hamilton-Jacobi 理论体系 [14], 用现代微分几何理论从不同角度对 Hamilton-Jacobi 理论进行了深入研究 [14–21], 深刻揭示了 Hamilton-Jacobi 理论的几何内涵. 其中, 用微分几何语言可以将经典 Hamilton-Jacobi 方法表述为如下命题 [16].

**命题 1** 设  $S = S(t, q^i)$  是一个定义在  $U \times I$  上的作用量场 ( $U$  是位形空间  $M$  的一个开集,  $I = [a, b] \subset R$ ). 如果  $S$  是 (1) 式的一个解, 则存在一个可微映射  $\varphi_2 : N \rightarrow T^*M \times R$ ,  $\varphi_2(t, q^i) = \left(t, q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}\right)$ , 它定义了 Hamilton 形式  $\omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$  的一个积分子流形. 反之, 若  $\varphi_2^*\omega = 0$  且  $H^1(U \times I) = 0$  (其中  $H^1$  表示  $U \times I$  的第一上同调群), 则存在一个作用量场  $S$ , 它满足 Hamilton-Jacobi 方程, 使得  $\varphi_2^*\theta = dS$  成立 ( $\theta = p_i dq^i - H dt$ ).

在最近的研究中发现, 命题 1 不仅适用于形如 (1) 式的经典 Hamilton-Jacobi 方程, 而且可以完全类似地推广到形如

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tilde{H}\left(t, q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}, S\right) = 0 \quad (4)$$

的更一般的偏微分方程的讨论中, 这说明有可能可以把求解完整保守 Hamilton 系统的经典 Hamilton-Jacobi 方法推广, 应用于求解更一般的 Hamilton 系统的运动问题中. 本文将证明可以用 Hamilton-Jacobi 方法求解受到一个非保守力  $F_i = \mu(t)p_i$  (其中  $\mu(t)$  是一个时间因子) 的非保守 Hamilton 系统的运动问题, 并给出两个算例.

## 2 受到非保守力 $F_i = \mu(t)p_i$ 的非保守 Hamilton 系统的 Hamilton-Jacobi 方法

若一个 Hamilton 系统受到一个非保守力  $F_i = \mu(t)p_i$ , 则系统的 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \mu(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (5)$$

对应的 Hamilton 方程为

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + \mu(t)p_i. \end{cases} \quad (6)$$

此类问题的求解也可以化为求解一个一阶偏微分方程完全解的问题, 即有如下命题.

**命题 2** 设力学系统的 Hamilton 函数为  $H(t, q^i, p_i)$ , 构造如下—阶偏微分方程:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q^i, p_i) - \mu(t)S = 0, \quad (7)$$

式中  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}$ , 如果能够找到 (7) 式的一个包含  $n+1$  个任意常数  $a_i$  和  $a_{n+1}$  的完全解  $S(t, q^i, a_i, a_{n+1})$ , 则只需令

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_i} / \frac{\partial S}{\partial a_{n+1}} = b_i, \\ p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \end{cases} \quad (8)$$

式中  $b_i$  为  $n$  个任意常数, 即可得到 (6) 式所对应的包含  $2n$  个任意常数  $a_i$  和  $b_i$  的  $2n$  个第一积分.

要证明上述命题, 首先可以直接验证 (6) 式确实是 (7) 式的特征线方程的一部分, 因此只需验证由 (7) 式和 (8) 式可以推出 (6) 式即可.

由 (8) 式中第一个等式可得

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = b_i \frac{\partial S}{\partial a_{n+1}}. \quad (9)$$

将 (9) 式对时间求导可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial q^j} \dot{q}^j \\ &= b_i \left( \frac{\partial^2 S}{\partial a_{n+1} \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial a_{n+1} \partial q^j} \dot{q}^j \right). \end{aligned} \quad (10)$$

将 (7) 式分别关于  $a_i$  和  $a_{n+1}$  求偏导数并考虑 (8) 式中第二个等式后可得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial q^j} - \mu(t) \frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial a_{n+1} \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial a_{n+1} \partial q^j} - \mu(t) \frac{\partial S}{\partial a_{n+1}} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

联立 (8) 式、(10) 式和 (11) 式, 消去  $b_i$  和  $\mu(t)$  后得

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial S}{\partial a_{n+1}} \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial q^j} - \frac{\partial S}{\partial a_i} \frac{\partial^2 S}{\partial a_{n+1} \partial q^j} \right) \dot{q}^j \\ &= \left( \frac{\partial S}{\partial a_{n+1}} \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial q^j} - \frac{\partial S}{\partial a_i} \frac{\partial^2 S}{\partial a_{n+1} \partial q^j} \right) \frac{\partial H}{\partial p_j}. \end{aligned} \quad (12)$$

只要行列式

$$\left| \frac{\partial S}{\partial a_{n+1}} \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial q^j} - \frac{\partial S}{\partial a_i} \frac{\partial^2 S}{\partial a_{n+1} \partial q^j} \right| \neq 0, \quad (13)$$

即可由(12)式得到(6)式的第一个等式.

再由(8)式中第二个等式对时间求偏导可得

$$\dot{p}_i = \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^j. \quad (14)$$

将(7)式对 $q^i$ 求偏导数并考虑(8)式中第二个等式后可得

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial q^i} - \mu(t) \frac{\partial S}{\partial q^i} = 0. \quad (15)$$

联立(14)式和(15)式后即得(6)式的第二个等式. 证毕.

到此已经证明了(8)式确实是(6)式所对应的 $2n$ 个第一积分. 需要说明的是, 从物理意义的角度考虑, 上述 $2n$ 个第一积分中只能包含 $2n$ 个任意常数, 即 $n$ 个 $b_i$ 和 $(a_i, a_{n+1})$ 中的 $n$ 个任意常数, 说明(3)式所求出的完全解 $S(t, q^i, a_i, a_{n+1})$ 至少关于其中一个常数是线性的, 在本文中将这个常数记作 $a_{n+1}$ .

可以看出, 经典Hamilton-Jacobi方法实际上是命题2在 $\mu(t) = 0$ 时的特例, 此时Hamilton-Jacobi方程的解具有 $S = \tilde{S}(t, q^i, a_i) + a_{n+1}$ 的形式, (8)式就退化为经典Hamilton-Jacobi方法中的(3)式.

此外, 还可以证明如下命题.

**命题3** 可以用形如(4)式的一阶非线性Hamilton-Jacobi方程求解非保守Hamilton系统只有命题2中的情况.

要证明命题3, 假设非保守Hamilton系统所受的非保守力为 $F_i$ , 记 $T^*M$ 和 $T^*\tilde{M} \times R$ 为系统的余切丛和扩展后的余切丛, 对应的局部坐标系分别为 $(q^i, p_i)$ 和 $(t, q^i, p_i, p_{n+1}, S)$ , 则系统在其余切丛 $T^*M$ 上的矢量场为

$$X = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \left( \frac{\partial H}{\partial q^i} + F_i \right) \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (16)$$

将形如(4)式的一阶非线性Hamilton-Jacobi方程看作流形 $T^*\tilde{M} \times R$ 中的约束子流形

$$p_{n+1} + \tilde{H}(t, q^i, p_i, S) = 0, \quad (17)$$

则该约束子流形在流形 $T^*\tilde{M} \times R$ 中定义了一个由

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i} dp_i \\ & + dp_{n+1} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial S} dS \end{aligned} \quad (18)$$

所张成的可积一维余分布 $\Delta^*$ , 与(4)式的特征线所对应的特征矢量场

$$\begin{aligned} \tilde{X} = & \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial S} p_i + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \\ & - \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial S} p_{n+1} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial p_{n+1}} \\ & + \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i} p_i + p_{n+1} \right) \frac{\partial}{\partial S} \end{aligned} \quad (19)$$

属于与一维余分布 $\Delta^*$ 所对偶的可积分布 $\Delta$ . 由一阶偏微分方程的几何理论可知, 若切丛 $T^*M$ 上的矢量场(16)式可用形如(4)式的一阶非线性Hamilton-Jacobi方程求解, 则必须存在一个从 $T^*M$ 到 $T^*\tilde{M} \times R$ 上的映射 $\varphi$ , 使得矢量场(16)式的推前

$$\begin{aligned} \varphi_* (X) = & \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \left( \frac{\partial H}{\partial q^i} + F_i \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \\ & + f_4 \frac{\partial}{\partial p_{n+1}} + f_5 \frac{\partial}{\partial S} \end{aligned} \quad (20)$$

(其中 $f_4$ 和 $f_5$ 为与映射 $\varphi$ 有关的两个函数)等于Hamilton-Jacobi方程所对应的特征矢量场(19)式, 即必须满足

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ - \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial S} p_i + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^i} \right) = - \left( \frac{\partial H}{\partial q^i} + F_i \right), \end{cases} \quad (21)$$

而满足上述条件, 只有

$$\begin{cases} \tilde{H} = H(t, q^i, p_i) - \mu(t)S, \\ F_i = \mu(t)p_i. \end{cases} \quad (22)$$

证毕.

### 3 算例

**算例1** 沿直线做一维运动的质量为1的粒子, 所受外力为 $F = \mu p$ , 其中 $\mu$ 为不为零的常数, 求粒子的运动方程.

粒子的Hamilton函数 $H = \frac{1}{2}p^2$ , Hamilton方程为

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = \mu p, \quad (23)$$

对应的偏微分方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 - \mu S = 0. \quad (24)$$

设  $S(t, q) = W(t) + Q(q)$ , 则可解得 (24) 式的一个完全解为

$$S = \frac{a_2}{\mu} \exp(\mu t) + \frac{\mu}{2}(q - a_1)^2, \quad (25)$$

式中  $a_1$  和  $a_2$  是两个任意常数. 令

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} / \frac{\partial S}{\partial a_2} = b, \quad \text{并考虑 } p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad (26)$$

可得两个第一积分

$$\begin{cases} -\mu^2(q - a_1) \exp(-\mu t) = b, \\ p = -\frac{b}{\mu} \exp(\mu t), \end{cases} \quad (27)$$

式中  $b$  是任意常数.

本例也可以对 (23) 式直接求解, 求得的结果为

$$\begin{cases} q = c_1 \exp(\mu t) + c_2, \\ p = c_1 \mu \exp(\mu t), \end{cases} \quad (28)$$

考虑到式中  $c_1$  和  $c_2$  为任意常数, (28) 式和 (27) 式等价, 说明本例用 Hamilton-Jacobi 方法求解的结果是正确的.

**算例 2** 系统的 Hamilton 函数为  $H = \frac{1}{2}\mu(t) \cdot \sin^2 q \cdot p^2$ , 若初始时刻  $q(0) \in (0, \pi)$ , 求: 1) 系统不受外力时的自由运动; 2) 系统所受外力为  $F = \mu(t)p$  时的运动.

1) 系统不受外力时

系统的 Hamilton 方程为

$$\begin{cases} \dot{q} = \mu(t) \cdot \sin^2 q \cdot p, \\ \dot{p} = -\mu(t) \cdot \sin q \cdot \cos q \cdot p^2, \end{cases} \quad (29)$$

对应的偏微分方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\mu(t) \cdot \sin^2 q \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = 0. \quad (30)$$

设  $S(t, q) = W(t) + Q(q)$ , 则可解得 (30) 式的一个完全解为

$$\begin{cases} W(t) = \int a_1 \mu(t) dt, \\ Q(q) = \sqrt{-2a_1} \ln\left(\frac{1 - \cos q}{\sin q}\right) + a_2, \\ S(t, q) = \int a_1 \mu(t) dt \\ \quad + \sqrt{-2a_1} \ln\left(\frac{1 - \cos q}{\sin q}\right) + a_2, \end{cases} \quad (31)$$

式中  $a_1$  和  $a_2$  是两个任意常数. 令

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} / \frac{\partial S}{\partial a_2} = b, \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad (32)$$

式中  $b$  是任意常数, 可得两个第一积分:

$$\begin{cases} \int \mu(t) dt - (-2a_1)^{-\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1 - \cos q}{\sin q}\right) = b, \\ p = \frac{\sqrt{-2a_1}}{\sin q}. \end{cases} \quad (33)$$

可以看出, 由于上述讨论中  $\frac{\partial S}{\partial a_2} = 1$ , 所以 (32) 式可以退化为经典 Hamilton-Jacobi 方法中的 (3) 式.

2) 当系统受到外力  $F = \mu(t)p$  时

系统的 Hamilton 方程为

$$\begin{cases} \dot{q} = \mu(t) \cdot \sin^2 q \cdot p, \\ \dot{p} = -\mu(t) \cdot \sin q \cdot \cos q \cdot p^2 + \mu(t)p, \end{cases} \quad (34)$$

对应的偏微分方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\mu(t) \cdot \sin^2 q \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 - \mu(t)S = 0. \quad (35)$$

设  $S(t, q) = W(t) + Q(q)$ , 则可解得 (35) 式的一个完全解为

$$\begin{cases} W(t) = a_2 \exp\left[\int \mu(t) dt\right], \\ Q(q) = \frac{1}{2} \left[ \ln\left(\frac{1 - \cos q}{\sin q}\right) + a_1 \right]^2, \\ S(t, q) = a_2 \exp\left[\int \mu(t) dt\right] \\ \quad + \frac{1}{2} \left[ \ln\left(\frac{1 - \cos q}{\sin q}\right) + a_1 \right]^2, \end{cases} \quad (36)$$

式中  $a_1$  和  $a_2$  是两个任意常数. 令

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} / \frac{\partial S}{\partial a_2} = b, \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad (37)$$

式中  $b$  是任意常数, 可得两个第一积分

$$\begin{cases} \left[ \ln\left(\frac{1 - \cos q}{\sin q}\right) + a_1 \right] \cdot \exp\left[-\int \mu(t) dt\right] = b, \\ p = \left[ \ln\left(\frac{1 - \cos q}{\sin q}\right) + a_1 \right] \cdot \frac{1}{\sin q}. \end{cases} \quad (38)$$

## 4 结 论

本文给出了求解受到一个非保守力  $F_i = \mu(t)p_i$  的非保守 Hamilton 系统运动方程的 Hamilton-Jacobi 方法, 这种方法是 Hamilton-Jacobi 理论在非保守 Hamilton 系统中的一个应用. 从几何角度看, Hamilton-Jacobi 方法本质上

是通过Hamilton-Jacobi方程把系统Hamilton方程所描述的余切丛 $T^*M$ 上的矢量场提升到流形 $T^*M \times R$ 中的一个约束子流形上, 只要设法求出提升后的矢量场的积分曲线, 则该积分曲线在余切丛 $T^*M$ 上的投影就是系统Hamilton方程的解. 证明上述方法可以应用于求解受到一个非保守力 $F_i = \mu(t)p_i$ 的Hamilton系统的运动问题. 经典的Hamilton-Jacobi方法是这一方法的一个特例.

## 参考文献

- [1] Benamou J 1996 *J. Comput. Phys.* **128** 463
- [2] Fleming W H, Rishel R 1975 *Deterministic and Stochastic Optimal Control* (Berlin: Springer) pp80–105
- [3] Feng C J, Wang P, Wang X M 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 030502 (in Chinese) [封晨洁, 王鹏, 王旭明 2015 物理学报 **64** 030502]
- [4] Fedkiw R P, Aslam T, Merrima B, Osher S 1999 *J. Comput. Phys.* **152** 457
- [5] Yang S Z, Lin K 2010 *Sci. China* **40** 507 (in Chinese) [杨树政, 林恺 2010 中国科学 **40** 507]
- [6] Yang S Z, Lin K 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 060401 (in Chinese) [杨树政, 林恺 2013 物理学报 **62** 060401]
- [7] Kim J H, Lee H W 2000 *Can. J. Phys.* **77** 411
- [8] Joulin G, Mitani T 1981 *Comb. Flame.* **40** 235
- [9] Arnold V I. 1978 *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer-Verlag) pp161–271
- [10] Mei F X 2013 *Analytical Mechanics* (Vol. 1) (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) pp272–287 (in Chinese) [梅凤翔 2013 分析力学 (上册) (北京: 北京理工大学出版社) 第272–287页]
- [11] Courant R, Hilbert D 1989 *Methods of Mathematical Physics* (Vol. 2) (New York: John Wiley & Sons) pp62–153
- [12] Guo Y X, Luo S K, Mei F X 2004 *Adv. Mech.* **34** 477 (in Chinese) [郭永新, 罗绍凯, 梅凤翔 2004 力学进展 **34** 477]
- [13] Guo Y X, Liu S X, Liu C, Luo S K, Wang Y 2007 *J. Math. Phys.* **48** 082901
- [14] Marmo G, Morandi G, Mukunda N 1990 *La Rivista del Nuovo Cimento* **13** 1
- [15] Wang H 2013 arXiv:1305.3457v2 [math. SG]
- [16] Westenholtz C N 1981 *Differential Forms in Mathematical Physics* (Amsterdam: North-Holland Publishing Company) pp389–439
- [17] Barbero-Linñán M, de León M, Martín de Diego D 2012 *Monatsh. Math.* **171** 269
- [18] Marmo G, Morandi G, Mukunda N 2009 *J. Geom. Mech.* **1** 317
- [19] Vitagliano L 2012 *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **9** 1260008
- [20] de León M, Vilariño S 2014 *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **11** 1450007
- [21] Ohsawa T, Bloch A M 2009 *J. Geom. Mech.* **1** 461

# A kind of non-conservative Hamilton system solved by the Hamilton-Jacobi method\*

Wang Yong<sup>1)2)</sup> Mei Feng-Xiang<sup>1)</sup> Xiao Jing<sup>2)</sup> Guo Yong-Xin<sup>3)4)†</sup>

1) (School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

2) (School of Information Engineering, Guangdong Medical University, Dongguan 523808, China)

3) (College of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China)

4) (Department of Medical Imaging Physics, Eastern Liaoning University, Dandong 118001, China)

( Received 18 August 2016; revised manuscript received 3 December 2016 )

## Abstract

The Hamilton-Jacobi equation is an important nonlinear partial differential equation. In particular, the classical Hamilton-Jacobi method is generally considered to be an important means to solve the holonomic conservative dynamics problems in classical dynamics. According to the classical Hamilton-Jacobi theory, the classical Hamilton-Jacobi equation corresponds to the canonical Hamilton equations of the holonomic conservative dynamics system. If the complete solution of the classical Hamilton-Jacobi equation can be found, the solution of the canonical Hamilton equations can be found by the algebraic method. From the point of geometry view, the essential of the Hamilton-Jacobi method is that the Hamilton-Jacobi equation promotes the vector field on the cotangent bundle  $T^*M$  to a constraint submanifold of the manifold  $T^*M \times R$ , and if the integral curve of the promoted vector field can be found, the projection of the integral curve in the cotangent bundle  $T^*M$  is the solution of the Hamilton equations. According to the geometric theory of the first order partial differential equations, the Hamilton-Jacobi method may be regarded as the study of the characteristic curves which generate the integral manifolds of the Hamilton 2-form  $\omega$ . This means that there is a duality relationship between the Hamilton-Jacobi equation and the canonical Hamilton equations. So if an action field, defined on  $U \times I$  ( $U$  is an open set of the configuration manifold  $M$ ,  $I \subset R$ ), is a solution of the Hamilton-Jacobi equation, then there will exist a differentiable map  $\varphi$  from  $M \times R$  to  $T^*M \times R$  which defines an integral submanifold for the Hamilton 2-form  $\omega$ . Conversely, if  $\varphi^*\omega = 0$  and  $H^1(U \times I) = 0$  ( $H^1(U \times I)$  is the first de Rham group of  $U \times I$ ), there will exist an action field  $S$  satisfying the Hamilton-Jacobi equation. Obviously, the above mentioned geometric theory can not only be applicable to the classical Hamilton-Jacobi equation, but also to the general Hamilton-Jacobi equation, in which some first order partial differential equations correspond to the non-conservative Hamiltonian systems. The geometry theory of the Hamilton-Jacobi method is applied to some special non-conservative Hamiltonian systems, and a new Hamilton-Jacobi method is established. The Hamilton canonical equations of the non-conservative Hamiltonian systems which are applied with non-conservative force  $F_i = \mu(t)p_i$  can be solved with the new method. If a complete solution of the corresponding Hamilton-Jacobi equation can be found, all the first integrals of the non-conservative Hamiltonian system will be found. The classical Hamilton-Jacobi method is a special case of the new Hamilton-Jacobi method. Some examples are constructed to illustrate the proposed method.

**Keywords:** Hamilton-Jacobi theory, non-conservative Hamilton system, Hamilton canonical equation

**PACS:** 45.20.Jj, 02.40.Yy

**DOI:** 10.7498/aps.66.054501

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11572145, 11272050, 11572034) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 2015A030310127).

† Corresponding author. E-mail: [yxguo@lnu.edu.cn](mailto:yxguo@lnu.edu.cn)