

基于量子相干性的四体贝尔不等式构建

叶世强 陈小余

Four-partite Bell inequalities based on quantum coherence

Ye Shi-Qiang Chen Xiao-Yu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 200301 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.200301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.200301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I20>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

用两比特海森伯 XY 模型研究热几何失协

Thermal geometric discords in a two-qubit Heisenberg XY model

物理学报.2016, 65(22): 220301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.220301>

极性分子摆动态的三体量子关联

Tripartite quantum correlations of polar molecules in pendular states

物理学报.2014, 63(20): 200302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.200302>

弱相干场原子-腔-光纤系统中的量子失协

Quantum discord in the system of two atoms trapped in weak coherent state cavities connected by an optical fiber

物理学报.2014, 63(11): 110303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.110303>

{Cu₃} 单分子磁体在磁场中的热纠缠

Thermal entanglement in a {Cu₃} single molecular magnet in the magnetic field

物理学报.2013, 62(19): 190302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.190302>

多进制量子图态纠缠的确定

Determining the entanglement of quantum nonbinary graph states

物理学报.2012, 61(22): 220304 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.220304>

基于量子相干性的四体贝尔不等式构建*

叶世强 陈小余†

(浙江工商大学信息与电子工程学院, 杭州 310018)

(2017年5月23日收到; 2017年7月12日收到修改稿)

贝尔不等式在定域性和实在性的双重假设下, 对于被分隔的粒子同时被测量时其结果的可能关联程度建立了一个严格的限制, 违反贝尔不等式确保量子态存在纠缠. 本文利用量子相干性的 I_1 和相对熵测度构建了四体量子贝尔不等式, 发现一般实系数 Greenberger-Horne-Zeilinger 纯态和簇纯态总是违反四体相对熵相干性测度贝尔不等式, 因此违反四体相对熵相干性测度贝尔不等式的这些态是纠缠态.

关键词: 贝尔不等式, 量子相干性, 多体量子态

PACS: 03.67.Mn, 03.65.Ud

DOI: 10.7498/aps.66.200301

1 引言

在实在性的理论中, 一个粒子带有先前的测量结果会影响现在的测量结果, 并且当前的测量结果是由独立的观察者得到的. 在定域性的理论中, 两个在不同系统中测量的粒子其结果是相互独立的, 互不影响. 贝尔不等式^[1-8]是贝尔1964年提出的一个强有力定理的内容. 该定理在定域性和实在性的双重假设下, 对于被分隔的粒子同时被测量时其结果的可能关联程度建立了一个严格的限制. 量子力学预测存在许多违反贝尔不等式的现象, 这些物理现象的形成的原因是量子态的非定域性, 这是多体量子态的一个基本属性. 非定域性是量子纠缠^[9,10]最重要的特点. 如果一个多体的量子态不能写成单体量子态的张量积形式的概率和, 则说明这个量子态是纠缠的. 一个二体纠缠纯态^[11,12]总是违反贝尔不等式, 违反贝尔不等式是检测一个二体纯态是否纠缠的充分必要条件^[13-19], 在多体相关函数的贝尔不等式中, 测量其每个系统的粒子, 通常会选择两个二元观察者^[20-22].

量子相干性作为一个很重要的概念已经被建

立起来, 尤其是在量子信息理论领域^[23-26], 如量子生物学^[27-31]和量子热力学^[32-36]领域的进展已经显示了量子相干性在量子信息处理中的特殊作用. 在量子信息理论中, 人们猜测量子相干性是一种资源^[23-26], 后来证明量子相干性确实是资源^[37,38]. 文献^[23]提出了测量相干性的测度, 包括 I_1 和相对熵测度. 通过非相干操作可以将一个具有量子相干性的态转化成另一个具有量子相干性的态, 相干性不增加; 提出了相干性和纠缠之间, 以及与量子失谐之间的相互关系^[25,39-43]. 这些结果有助于这些资源的相互转化. 2016年, 文献^[44]构建了二体 I_1 和相对熵测度的贝尔不等式; 文献^[45]研究了三体 I_1 和相对熵相干性测度的贝尔不等式. 本文研究四体量子态, 并建立了四体 I_1 和相对熵相干性测度下的贝尔不等式.

本文介绍了 I_1 及相对熵相干性测度的定义, 以及四体贝尔不等式的定义, 构建了四体 I_1 和相对熵测度的贝尔不等式; 给出了一些违反四体贝尔不等式的典型四体(四量子)纠缠态, 结果显示, 四体一般实系数 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 纯态和簇纯态总是违反相对熵相干性测度贝尔不等式.

* 国家自然科学基金(批准号: 11375152)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xychen@zjgsu.edu.cn

2 量子相干性的两组测度及四体贝尔不等式

本节介绍两组量子相干性测度的定义, l_1 相干性测度和相对熵相干性测度, 及四体贝尔不等式.

2.1 两组量子相干性测度

对于一个量子态 ρ , 在参考基 $\{|i\rangle\}$ 下, 文献 [23] 提出了两组合适的相干性测度. l_1 相干性测度定义如下:

$$C_{l_1}(\rho) = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} |\rho_{ij}| = \sum_{i,j} |\rho_{ij}| - 1. \quad (1)$$

相对熵相干性测度定义如下:

$$C_r(\rho) = \min_{\sigma \in I} S(\rho||\sigma) = S(\rho_d) - S(\rho), \quad (2)$$

I 是在参考基 $\{|i\rangle\}$ 下所有非相干态的集合, $S(\rho||\sigma) = \text{tr}(\rho(\log_2 \rho - \log_2 \sigma))$ 是 ρ 和 σ 之间的相对熵, $S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log_2 \rho)$ 是 ρ 态的冯·诺依曼熵, ρ_d 是量子态 ρ 在参考基 $\{|i\rangle\}$ 下的密度矩阵的对角线元素构成的态, $\rho_d = \sum_i \langle i|\rho|i\rangle |i\rangle\langle i|$. 例如对于二维系统的最大相干态 $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^2 |i\rangle$, 有 $C_{l_1} = 1$, $C_r = 1$.

2.2 贝尔不等式

对于测量的每个粒子, 可以选择两个二元观察者, 文献 [20] 推导了一个简单的一般贝尔不等式, 认为定域性和实在性是描述 N 体贝尔不等式的充分必要条件. 不等式如下:

$$\left| \sum_{\substack{s_1, \dots, s_N \\ s_i = -1, 1}} S(s_1, \dots, s_N) \sum_{\substack{k_1, \dots, k_N \\ k_i = 1, 2}} s_1^{k_1-1} \dots s_N^{k_N-1} \times E(k_1, \dots, k_N) \right| \leq 2^N, \quad (3)$$

其中, $S(s_1, \dots, s_N) = \sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4} + (s_1 + \dots + s_N - N)\frac{\pi}{4}\right)$, $s_1, \dots, s_N \in \{-1, 1\}$. $E(k_1, \dots, k_N)$ $k_1, \dots, k_N \in \{1, 2\}$ 是多体相关函数. 通过上述不等式, 可以得到两体系统的 Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) 不等式 [3], 得到 N 体的 Mermin-Ardehali-Belinskii-Klyshko (MABK) 不等式 [4-6]. 本文研究的是四体的贝尔不等式. 令 $N = 4$, 并且在局域实在性条件下用局域测量的乘

积 $M_A^{k_1} M_B^{k_2} M_C^{k_3} M_D^{k_4}$ 替代相关函数 $E(k_1, \dots, k_N)$, 由 (3) 式可以得到四体贝尔不等式如下:

$$\begin{aligned} & |M_A^2 M_B^2 M_C^1 M_D^1 + M_A^2 M_B^1 M_C^2 M_D^1 \\ & + M_A^2 M_B^1 M_C^1 M_D^2 + M_A^1 M_B^2 M_C^1 M_D^1 \\ & + M_A^1 M_B^2 M_C^2 M_D^1 + M_A^1 M_B^1 M_C^2 M_D^2 \\ & + M_A^1 M_B^1 M_C^1 M_D^2 + M_A^1 M_B^1 M_C^1 M_D^2 \\ & - M_A^2 M_B^2 M_C^2 M_D^2 - M_A^2 M_B^2 M_C^2 M_D^1 \\ & - M_A^2 M_B^2 M_C^1 M_D^2 - M_A^2 M_B^1 M_C^2 M_D^2 \\ & - M_A^1 M_B^2 M_C^2 M_D^2 - M_A^1 M_B^1 M_C^1 M_D^1| \leq 4, \quad (4) \end{aligned}$$

不等 (4) 式中, 上标 1 和 2 代表测量每个子系统粒子所选择的二元观察者, M_k^i ($K = A, B, C, D$; $i = 1, 2$) 代表对不同量子比特 K 执行测量操作时得到的测量结果.

3 四体 l_1 和相对熵相干性测度贝尔不等式

3.1 四体 l_1 相干性测度贝尔不等式

构建四体 l_1 相干性测度贝尔不等式, 选择四个观察者 X, Y, Z , 和 H 对应于 H_A, H_B, H_C 和 H_D 的希尔伯特空间. $C_{l_1}(\rho_{ABCD}, X, Y, Z, H)$ 表示 ρ_{ABCD} 态在 X, Y, Z, H 基组下的 l_1 相干性测度值, $C_r(\rho_{ABCD}, X, Y, Z, H)$ 表示 ρ_{ABCD} 态在 X, Y, Z, H 基组下的相对熵相干性测度值.

定理 1 对于乘积态 $\rho_{ABCD} = \rho_A \otimes \rho_B \otimes \rho_C \otimes \rho_D$, 对应空间为 $H_A \otimes H_B \otimes H_C \otimes H_D$ 的四体量子系统, 并且观察者为 O_K^i ($K = A, B, C, D$; $i = 1, 2$) 有

$$\begin{aligned} & C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^2, O_C^1, O_D^1) \\ & + C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^1, O_C^2, O_D^1) \\ & + C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^1, O_C^1, O_D^2) \\ & + C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^1, O_C^1, O_D^1) \\ & + C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^2, O_C^2, O_D^1) \\ & + C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^2, O_C^1, O_D^2) \\ & + C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^2, O_C^1, O_D^1) \\ & + C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^1, O_C^2, O_D^2) \\ & + C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^1, O_C^2, O_D^1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^1, O_C^1, O_D^2) \\
 &- C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^2, O_C^2, O_D^2) \\
 &- C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^2, O_C^2, O_D^1) \\
 &- C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^2, O_C^1, O_D^2) \\
 &- C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^1, O_C^2, O_D^2) \\
 &- C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^2, O_C^2, O_D^2) \\
 &- C_{l_1}(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^1, O_C^1, O_D^1) \leq 60. \quad (5)
 \end{aligned}$$

为了简化, 在下文中用 $B_{C_{l_1}}$ 代替不等 (5) 式的左半部分, 在附录 A 中给出了不等 (5) 式的证明过程.

3.2 四体相对熵相干性测度贝尔不等式

对比四体 l_1 相干性测度贝尔不等式, 建立了四体相对熵相干性测度贝尔不等式.

定理 2 对于乘积态 $\rho_{ABCD} = \rho_A \otimes \rho_B \otimes \rho_C \otimes \rho_D$ 对应的空间为 $H_A \otimes H_B \otimes H_C \otimes H_D$ 的四体量子系统, 并且观察者为 O_K^i ($K = A, B, C, D; i = 1, 2$) 有

$$\begin{aligned}
 &C_r(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^2, O_C^1, O_D^1) \\
 &+ C_r(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^1, O_C^2, O_D^1) \\
 &+ C_r(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^1, O_C^1, O_D^2) \\
 &+ C_r(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^1, O_C^1, O_D^1) \\
 &+ C_r(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^2, O_C^2, O_D^1) \\
 &+ C_r(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^2, O_C^1, O_D^2) \\
 &+ C_r(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^2, O_C^1, O_D^1) \\
 &+ C_r(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^1, O_C^2, O_D^2) \\
 &+ C_r(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^1, O_C^2, O_D^1) \\
 &+ C_r(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^1, O_C^1, O_D^2) \\
 &- C_r(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^2, O_C^2, O_D^2) \\
 &- C_r(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^2, O_C^2, O_D^1) \\
 &- C_r(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^2, O_C^1, O_D^2) \\
 &- C_r(\rho_{ABCD}, O_A^2, O_B^1, O_C^2, O_D^2) \\
 &- C_r(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^2, O_C^2, O_D^2) \\
 &- C_r(\rho_{ABCD}, O_A^1, O_B^1, O_C^1, O_D^1) \leq 16. \quad (6)
 \end{aligned}$$

为了简化, 在下文中用 B_{C_r} 代替不等式 (6) 的左半部分, 在附录 B 中给出了不等式 (6) 的证明过程.

4 违反四体 l_1 和相对熵相干性测度贝尔不等式

给出了一些违反四体 l_1 和相对熵相干性测度的贝尔不等式的四体量子态, 四体纠缠态意味着态在所有四个子量子系统中也是纠缠的, 这里存在四个不等价的子态: 四体 GHZ 态, W 态 [46,47], 簇态 [48,49], Dicke 态 [50]. 因此, 仅研究这四个态及其相关的纯态和混合态 [51,52] 是否违反四体 l_1 和相对熵相干性测度贝尔不等式.

对于两组相干性测度, 观察者被假定为 $M_A^1 = \sigma_x, M_A^2 = \sigma_z, M_B^1 = -\sigma_y, M_B^2 = \sigma_z, M_C^1 = \sigma_x, M_C^2 = \sigma_z, M_D^1 = -\sigma_y, M_D^2 = \sigma_z$, 即 M_A^1, M_A^2 对于 A 的基组为

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T \right\}, \left\{ (1, 0)^T, (0, 1)^T \right\},$$

类似地, B 的基组为

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^T, \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T \right\}, \left\{ (1, 0)^T, (0, 1)^T \right\},$$

C 的基组为

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T \right\}, \left\{ (1, 0)^T, (0, 1)^T \right\},$$

D 的基组为

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^T, \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T \right\}, \left\{ (1, 0)^T, (0, 1)^T \right\}.$$

现在, 考虑在这些不同基下展开的四体量子态违反四体和相对熵相干性测度贝尔不等式的情况.

对于四体 GHZ 态 $|\text{GHZ}_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle)$, 经过计算, 可以得到 $B_{C_{l_1}} = 82 > 60$, 意味着违反了四体 l_1 相干性测度贝尔不等式. 类似地, 经过计算, 得到 $B_{C_r} = 22 > 16$, 显示四体 GHZ 态违反四体相对熵相干性测度贝尔不等式.

对于四体一般实系数 GHZ 纯态 $|\psi_{\text{GHZ}_4}\rangle = \cos \theta |0000\rangle + \sin \theta |1111\rangle$, $\theta \in (0, \pi)$, 经过仔细计算, 得到 $B_{C_{l_1}} = 47|\sin(2\theta)| - 8|\cos(2\theta)| + 35$. 类似地, 得到

$$\begin{aligned}
 B_{C_r} = &16 - 5 \cos^2 \theta \log_2 \cos^2 \theta - 5 \sin^2 \theta \log_2 \sin^2 \theta \\
 &+ \frac{1}{2}(\cos \theta - \sin \theta)^2 \log_2 (\cos \theta - \sin \theta)^2 \\
 &+ \frac{1}{2}(\cos \theta + \sin \theta)^2 \log_2 (\cos \theta + \sin \theta)^2. \quad (7)
 \end{aligned}$$

由图 1(a) 可以得到, 在参数的大部分区域, 四体一般实系数 GHZ 纯态违反四体 l_1 相干性测度贝尔不等式. 由图 1(b) 可以得到, 在 $\theta \in (0, \pi)$ 时, B_{C_r} 总是大于 16, 这就意味着四体一般实系数 GHZ 纯态总是违反四体相对熵相干性测度贝尔不等式, 因此四体一般实系数 GHZ 纯态是纠缠态.

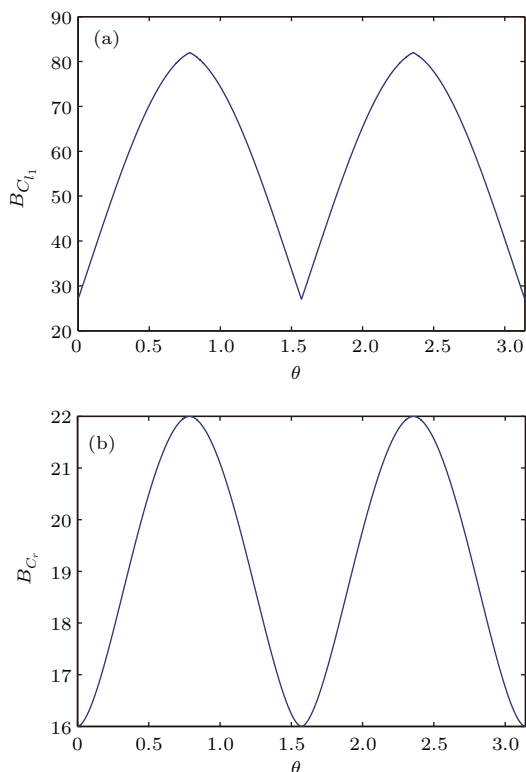


图 1 四体一般实系数 GHZ 纯态 (a) $B_{C_{l_1}}$ 和 (b) B_{C_r} 随参数 θ 的变化

Fig. 1. (a) $B_{C_{l_1}}$, (b) B_{C_r} as a function of the parameters θ for the four partite general pure GHZ states with the real coefficients.

对于四体 GHZ 类的混合态, $\rho_{\text{GHZ}} = \frac{p}{16} \mathbf{I}_{16} + (1-p)|\text{GHZ}_4\rangle\langle\text{GHZ}_4|$, $\mathbf{I}_{16}$ 是 16×16 的单位矩阵, 且 $p \in (0, 1)$. 这些混合态是四体 GHZ 态根据文献 [53] 的定义产生的, 经过计算, 得到 $B_{C_{l_1}} = 82(1-p)$ 当 $p \in (0, 11/41)$ 时, 四体 GHZ 类混合态违反四体 l_1 相干性测度贝尔不等式. 对于 B_{C_r} , 我们采取数值计算, 得到 B_{C_r} 的图形如图 2.

从图 2 可以得到, 加入的白噪声参数 p 的 GHZ 类混合态在 $0 < p < 0.141$ 内违反四体相对熵相干性测度贝尔不等式.

对于四体簇态, $|Cl_4\rangle = \frac{1}{2}(|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle)$, 计算可得 $B_{C_{l_1}} = 96 > 60$, $B_{C_r} = 21 > 16$, 因此, 四体簇态违反四体 l_1 和相对熵相干性测度贝尔不等式.

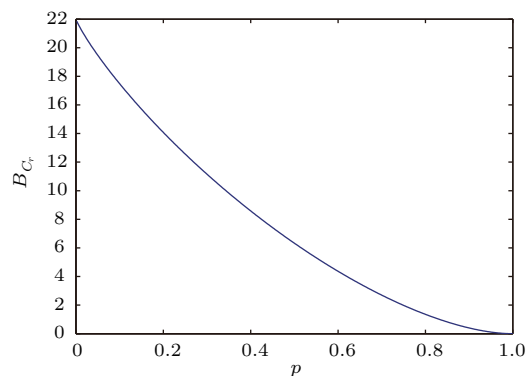


图 2 四体 GHZ 类混合态 B_{C_r} 随参数 p 的变化

Fig. 2. B_{C_r} as a function of the parameters p for the four partite GHZ class mixed states.

对于四体一般实系数簇纯态

$$\begin{aligned} |\psi_{Cl_4}\rangle &= \cos \theta_1 |0000\rangle + \sin \theta_1 \cos \theta_2 |0011\rangle \\ &\quad + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 |1100\rangle \\ &\quad - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 |1111\rangle, \\ \theta_1, \theta_2, \theta_3 &\in (0, 2\pi), \end{aligned}$$

经过仔细计算, 得到 $B_{C_{l_1}}$ 和 B_{C_r} 是比较复杂的表达式, 我们用图像来分析表达式的结果. 在图 3(a) 中, 用 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 三个参数分别对应深度、宽度、高度方向, 图右侧的长方形颜色条形块用不同的颜色表示在不同的参数下表达式的值, 下文的其他求纯态 $B_{C_{l_1}}$ 和 B_{C_r} 变化图也这样表示, 由图 3(a) 可以看出, $B_{C_{l_1}}$ 在参数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的大部分区域都大于 60, 因此四体一般实系数簇纯态在大部分区域都违反四体 l_1 相干性测度贝尔不等式. B_{C_r} 在 $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0, 2\pi)$ 时值总是大于 16, 总是违反四体相对熵相干性测度贝尔不等式, 因此, 四体一般实系数簇纯态是纠缠态.

对于四体簇类混合态, $\rho_{Cl} = \frac{p}{16} \mathbf{I}_{16} + (1-p)|Cl_4\rangle\langle Cl_4|$, 经过计算, 可得 $B_{C_{l_1}} = 96(1-p)$, 当 $p \in (0, 9/24)$ 时, 四体簇类混合态违反四体 l_1 相干性测度贝尔不等式. 类似地, 经过数值计算, 得到 $B_{C_{l_1}}$ 的图像如图 4.

从图 4 可以得到, 加入的白噪声参数 p 的簇类混合态在 $0 < p < 0.11$ 内违反四体相对熵相干性测度贝尔不等式.

对于四体 W 态, $|W_4\rangle = \frac{1}{2}(|0001\rangle + |0010\rangle + |0100\rangle + |1000\rangle)$, 经过计算, 可得, $B_{C_{l_1}} \approx 67.8 > 60$, $B_{C_r} \approx 16.704 > 16$, 因此, 四体 W 态违反四体 l_1 和相对熵相干性测度贝尔不等式.

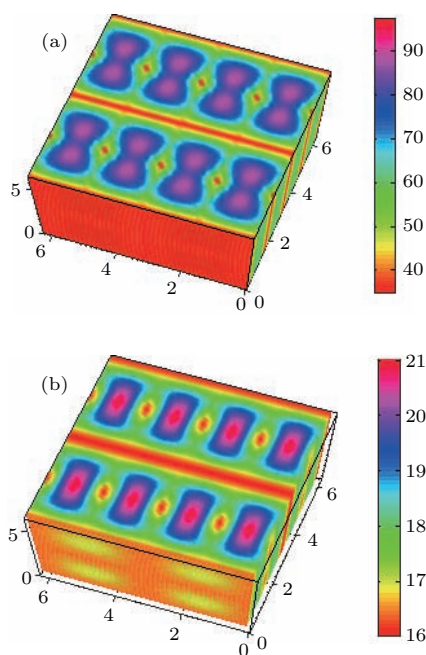


图3 (网刊彩色) 四体一般实系数簇纯态 (a) $B_{C_{l_1}}$ 和 (b) B_{C_r} 随参数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的变化

Fig. 3. (color online) (a) $B_{C_{l_1}}$, (b) B_{C_r} as a function of the parameters $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ for the four partite general pure Cluster states with the real coefficients.

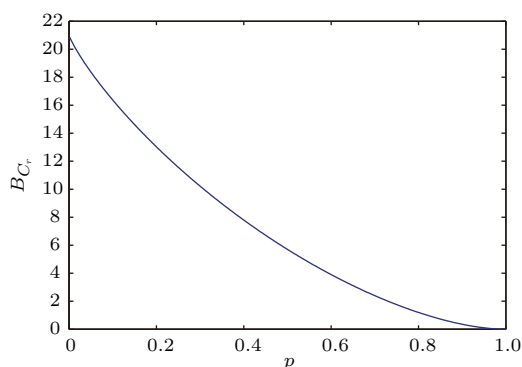


图4 四体簇类混合态 B_{C_r} 随参数 p 的变化图

Fig. 4. B_{C_r} as a function of the parameter p for the four partite general Cluster class mixed states.

对于四体一般实系数 W 纯态

$$|\psi_{W_4}\rangle = \cos \theta_1 |0001\rangle + \sin \theta_1 \cos \theta_2 |0010\rangle + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 |0100\rangle + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 |1000\rangle,$$

经过仔细计算, 得到的 $B_{C_{l_1}}$ 和 B_{C_r} 的表达式同样比较复杂. 由图5(a)可以看出, $B_{C_{l_1}}$ 在参数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的大部分区域都大于60, 因此四体一般实系数 W 纯态在大部分区域都违反四体 l_1 相干性测度贝尔不等式; 由图5(b)可以看出, 在 B_{C_r} 在 $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0, 2\pi)$ 时的值大部分区域都大于16, 因

此四体一般实系数 W 纯态在大部分区域都违反四体相对熵相干性测度贝尔不等式.

对于四体 W 类混合态, $\rho_W = \frac{p}{16} I_{16} + (1-p)|W_4\rangle\langle W_4|$, 经过计算, $B_{C_{l_1}} = 12(2+\sqrt{2}+\sqrt{5})(1-p)$ 当 $0 < p < \frac{-3+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{5}} \approx 0.115$ 时, 四体 W 类混合态违反四体 l_1 相干性测度贝尔不等式. 类似地, 经过数值计算, 得到 B_{C_r} 的图像如图6.

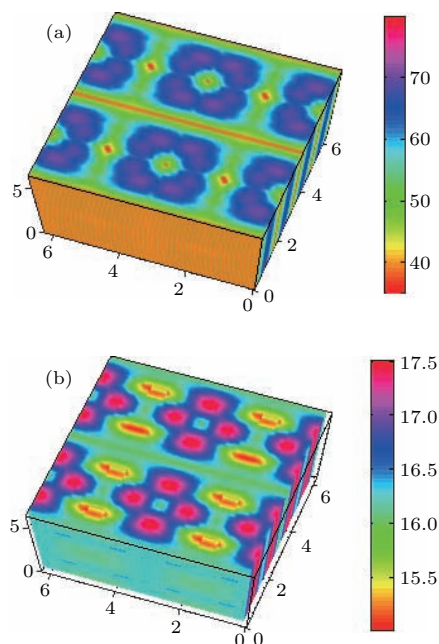


图5 (网刊彩色) 四体一般实系数 W 纯态 (a) $B_{C_{l_1}}$ 和 (b) B_{C_r} 随参数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的变化

Fig. 5. (color online) (a) $B_{C_{l_1}}$, (b) B_{C_r} as a function of the parameters $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ for the four partite general W pure states with the real coefficients.

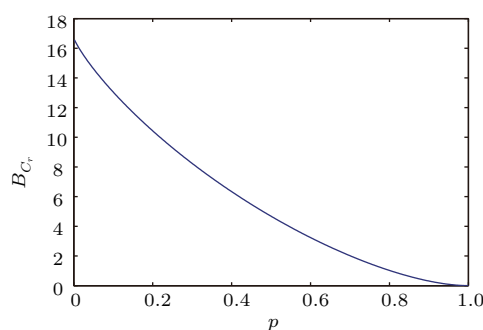


图6 四体 W 类混合态 B_{C_r} 随参数 p 的变化

Fig. 6. B_{C_r} as a function of the parameter p for the four partite W mixed class states.

从图6可以得到, 加入的白噪声参数 p 的 W 类混合态在 $0 < p < 0.01$ 内违反四体相对熵相干性测度贝尔不等式.

$|\text{Dicke}_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|0011\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1100\rangle)$, 这是四体 Dicke 态, 经过计算, 可以得到, $B_{C_{l_1}} \approx 70.683 > 60$, $B_{C_r} \approx 16.596 > 16$, 因此, 四体 Dicke 态违反四体 l_1 和相对熵相干性测度贝尔不等式.

对于四体 Dicke 类混合态, $\rho_{\text{Dicke}} = \frac{p}{16}I_{16} + (1-p)|\text{Dicke}_4\rangle\langle\text{Dicke}_4|$, 经过计算, $B_{C_{l_1}} = \left(7 + \frac{29}{3} + \frac{64\sqrt{2}}{3} + \frac{32\sqrt{5}}{3}\right)(1-p)$, 当 $0 < p < \frac{-130 + 64\sqrt{2} + 32\sqrt{5}}{50 + 64\sqrt{2} + 32\sqrt{5}} \approx 0.151$ 时, 四体 Dicke 类混合态违反四体 l_1 相干性测度贝尔不等式. 类似地, 经过数值计算, 得到 B_{C_r} 的图像如图 7.

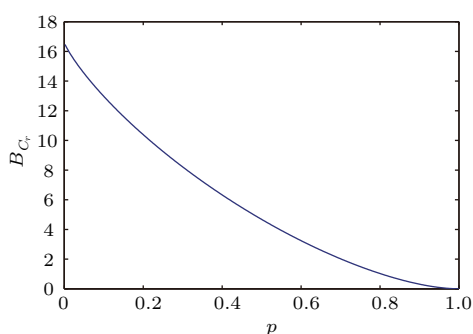


图 7 四体 Dicke 类混合态 B_{C_r} 随参数 p 的变化

Fig. 7. B_{C_r} as a function of the parameter p for the four partite Dicke class mixed states.

从图 7 可以得到, 加入的白噪声参数 p 的 Dicke 类混合态在 $0 < p < 0.008$ 内违反四体相对熵相干性测度贝尔不等式.

5 结 论

本文构建了四体 l_1 和相对熵相干性测度贝尔不等式, 计算发现四体 GHZ 态、簇态、W 态、Dicke 态都违反四体 l_1 和相对熵测度的贝尔不等式, 对于这些态的一般实系数纯态, 四体 GHZ 和簇态在各自的参数 θ 和 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的区间内总是违反四体相对熵相干性测度贝尔不等式, 在区间内的大部分区域违反四体 l_1 相干性测度贝尔不等式. 四体 W 态在参数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的大部分区域违反四体和相对熵相干性测度贝尔不等式. 对于这些态的混合态, 在加入白噪声参数 p 的区间内, 我们发现这四个态违反四体 l_1 和相对熵相干性测度贝尔不等式边界值的程度决定了这些态的混合态加入白噪声参数 p 区间的大小, 四体 GHZ 态、簇态、W 态、Dicke 态违反

四体 l_1 和相对熵相干性测度贝尔不等式的程度越大, 其混合态违反四体 l_1 和相对熵相干性测度贝尔不等式的白噪声参数 p 区间越大, 即可以加入更多的噪声. 对于这些总是违反四体相对熵相干性测度贝尔不等式的四体一般实系数纯态, 可以确定这些态是纠缠态. 本文只运用了 l_1 和相对熵相干性测度来构建四体贝尔不等式, 几何相干性测度^[25]和鲁棒相干性测度^[54]构建四体贝尔不等式是否可行也是一个值得研究的内容.

附录 A 定理 1 l_1 相干性测度下的贝尔不等式

证明 对于 $\rho_{ABCD} = \rho_A \otimes \rho_B \otimes \rho_C \otimes \rho_D$, 可以证明得到如下等式

$$\begin{aligned} & C_{l_1}(\rho_{ABCD}, X, Y, Z, H) + 1 \\ &= [C_{l_1}(\rho_A, X) + 1][C_{l_1}(\rho_B, Y) + 1] \\ & \quad \times [C_{l_1}(\rho_C, Z) + 1][C_{l_1}(\rho_D, H) + 1], \quad (\text{A1}) \end{aligned}$$

利用等式 (A1), 并且令 $C_{l_1}(\rho_K, O_K^i) + 1 = M_K^i$ ($K = A, B, C, D; i = 1, 2$) 使 (5) 式每项加 1, 可以得到其简化的不等式如下:

$$\begin{aligned} & M_A^2 M_B^2 M_C^1 M_D^1 + M_A^2 M_B^1 M_C^2 M_D^1 + M_A^2 M_B^1 M_C^1 M_D^2 \\ &+ M_A^2 M_B^1 M_C^1 M_D^1 + M_A^1 M_B^2 M_C^2 M_D^1 + M_A^1 M_B^2 M_C^1 M_D^2 \\ &+ M_A^1 M_B^2 M_C^1 M_D^1 + M_A^1 M_B^1 M_C^2 M_D^2 + M_A^1 M_B^1 M_C^2 M_D^1 \\ &+ M_A^1 M_B^1 M_C^1 M_D^2 - M_A^2 M_B^2 M_C^2 M_D^2 - M_A^2 M_B^2 M_C^2 M_D^1 \\ &- M_A^2 M_B^2 M_C^1 M_D^2 - M_A^2 M_B^1 M_C^2 M_D^2 - M_A^1 M_B^2 M_C^2 M_D^2 \\ &- M_A^1 M_B^1 M_C^1 M_D^1. \quad (\text{A2}) \end{aligned}$$

由于 $1 \leq M_K^i \leq 2$, (A2) 式的绝对值为

$$\begin{aligned} & |M_A^1(M_B^2 M_C^2 M_D^1 + M_B^2 M_C^1 M_D^2 + M_B^2 M_C^1 M_D^1 \\ &+ M_B^1 M_C^2 M_D^2 + M_B^1 M_C^2 M_D^1 + M_B^1 M_C^1 M_D^2 \\ &- M_B^2 M_C^2 M_D^2 - M_B^1 M_C^1 M_D^1) + M_A^2(M_B^2 M_C^1 M_D^1 \\ &+ M_B^1 M_C^2 M_D^1 + M_B^1 M_C^1 M_D^2 + M_B^1 M_C^1 M_D^1 \\ &- M_B^2 M_C^2 M_D^2 - M_B^2 M_C^2 M_D^1 - M_B^2 M_C^1 M_D^2 \\ &- M_B^1 M_C^2 M_D^2)| \\ &\leq |M_A^1(M_B^2 M_C^2 M_D^1 + M_B^2 M_C^1 M_D^2 + M_B^2 M_C^1 M_D^1 \\ &+ M_B^1 M_C^2 M_D^2 + M_B^1 M_C^2 M_D^1 + M_B^1 M_C^1 M_D^2 \\ &- M_B^2 M_C^2 M_D^2 - M_B^1 M_C^1 M_D^1)| + |M_A^2(M_B^2 M_C^1 M_D^1 \\ &+ M_B^1 M_C^2 M_D^1 + M_B^1 M_C^1 M_D^2 + M_B^1 M_C^1 M_D^1 \\ &- M_B^2 M_C^2 M_D^2 - M_B^2 M_C^2 M_D^1 - M_B^2 M_C^1 M_D^2 \\ &- M_B^1 M_C^2 M_D^2)| \\ &\leq 2(|M_B^1(M_C^2 M_D^2 + M_C^2 M_D^1 + M_C^1 M_D^2 - M_C^1 M_D^1)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + M_B^2(M_C^2M_D^1 + M_C^1M_D^2 + M_C^1M_D^1 - M_C^2M_D^2)| \\
 & + |M_B^1(M_C^2M_D^1 + M_C^1M_D^2 + M_C^1M_D^1 - M_C^2M_D^2)| \\
 & + M_B^2(M_C^1M_D^1 - M_C^2M_D^2 - M_C^2M_D^1 - M_C^1M_D^2)| \\
 \leq & 4(|M_C^2M_D^2 + M_C^2M_D^1 + M_C^1M_D^2 - M_C^1M_D^1| \\
 & + |M_C^2M_D^1 + M_C^1M_D^2 + M_C^1M_D^1 - M_C^2M_D^2| \\
 & + 2|M_C^1M_D^1 - M_C^2M_D^2|) \\
 \leq & 64.
 \end{aligned} \tag{A3}$$

通过不等式 (A3), 发现定理成立. 证毕.

在 $\rho_A, \rho_B, \rho_C, \rho_D$ 都为最大非相干纯态时, 此时 $C_{l_1}(\rho_K, O_K^i) = 1$ ($K = A, B, C, D; i = 1, 2$), 这个不等式刚好到达临界值.

附录 B 定理2 相对熵相干性测度下的贝尔不等式

证明 对于张量积 $\rho_A \otimes \rho_B \otimes \rho_C \otimes \rho_D$ 相对熵相干性测度, 满足

$$\begin{aligned}
 & C_r(\rho_A \otimes \rho_B \otimes \rho_C \otimes \rho_D, X, Y, Z, H) \\
 = & C_r(\rho_A, X) + C_r(\rho_B, Y) + C_r(\rho_C, Z) + C_r(\rho_D, H),
 \end{aligned} \tag{B1}$$

利用等式 (B1), 可以得到不等 (6) 式的左边部分为

$$\begin{aligned}
 & 4[C_r(\rho_A, O_A^2) + C_r(\rho_B, O_B^2) + C_r(\rho_C, O_C^2) \\
 & + C_r(\rho_D, O_D^2)] \leq 16,
 \end{aligned} \tag{B2}$$

证毕.

在 $\rho_A, \rho_B, \rho_C, \rho_D$ 都为最大非相干纯态时, 这个不等式也同样刚好到达临界值.

参考文献

- [1] Bell J S 1964 *Physics* **1** 195
- [2] Greenberger D M, Horne M A, Shimony A, Zeilinger A, Am J 1990 *Physica* **58** 1131
- [3] Clauser J F, Horne M A, Shimony A, Holt R A 1969 *Phys. Rev. Lett.* **23** 880
- [4] Mermin N D 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1838
- [5] Ardehali M 1992 *Phys. Rev. A* **46** 5375
- [6] Belinskii AV, Klyshko D N 1993 *Phys. Usp.* **36** 653
- [7] Peres A 1999 *Found. Phys.* **29** 589
- [8] Pitowsky I, Svozil K 2001 *Phys. Rev. A* **64** 014102
- [9] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865
- [10] Wang X Q, Lu H X, Zhao J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 110301 (in Chinese) [王晓芹, 逯怀新, 赵加强 2011 物理学报 **60** 110301]
- [11] Chen J L, Wu C F, Kwek L C, Oh C H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 140407
- [12] Yu S X, Chen Q, Zhang C J, Lai C H, Oh C H 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 120402
- [13] Gisin N 1991 *Phys. Lett. A* **154** 201
- [14] Gisin N, Peres A 1992 *Phys. Lett. A* **162** 15
- [15] Silva R, Gisin N, Guryanova Y, Popescu S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 250401
- [16] Gisin N 2015 arXiv:1509.00767
- [17] Gisin N, Tanzilli S, Tittel W 2015 *Europhys. News* **46** 36
- [18] Pütz G, Aktas D, Martin A, Fedrici B, Tanzilli S, Gisin N 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 010401
- [19] Xie L J, Zhang D Y, Wang X W, Zhan X G, Tang S Q, Gao F 2011 *Chin. Phys. B* **20** 080301
- [20] Zukowski M, Brukner C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 210401
- [21] Sen A, Sen U, Zukowski M 2002 *Phys. Rev. A* **66** 062318
- [22] Zhao J Q, Cao L Z, Lu H X, Wang X Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 120301 (in Chinese) [赵加强, 曹连振, 逯怀新, 王晓芹 2013 物理学报 **62** 120301]
- [23] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 140401
- [24] Girolami D 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 170401
- [25] Streltsov A, Singh U, Dhar H S, Bera M N, Adesso G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 020403
- [26] Mondal D, Pramanik T, Pati A K 2017 *Phys. Rev. A* **95** 010301
- [27] Abbott D, Davies P, Pati A K 2008 *Quantum Aspects of Life* (London: Imperial College Press)
- [28] Plenio M B, Huelga S F 2008 *New J. Phys.* **10** 113019
- [29] Rebentrost P, Mohseni M, Aspuru-Guzik A 2009 *J. Phys. Chem. B* **113** 9942
- [30] Lloyd S 2011 *J. Phys. Conf. Ser.* **302** 012037
- [31] Huelga S, Plenio M 2013 *Contemp. Phys.* **54** 181
- [32] Rodriguez-Rosario C A, Frauenheim T, Aspuru-Guzik A 2013 arXiv: 1308.1245
- [33] Lostaglio M, Jennings D, Rudolph T 2015 *Nat. Commun.* **6** 6383
- [34] Narasimhachar V, Gour G 2015 *Nat. Commun.* **6** 7689
- [35] Lostaglio M, Korzekwa K, Jennings D, Rudolph T 2015 *Phys. Rev. X* **5** 021001
- [36] Gardas B, Deffner S 2015 *Phys. Rev. E* **92** 042126
- [37] Singh U, Bera M N, Misra A, Pati A K 2015 arXiv: 1506.08186
- [38] Winter A, Yang D 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 120404
- [39] Singh U, Bera M N, Dhar H S, Pati A K 2015 *Phys. Rev. A* **91** 052115
- [40] Kumar A 2017 *Phys. Lett. A* **381** 991
- [41] Xi Z J, Li Y M, Fan H 2015 *Sci. Rep.* **5** 10922
- [42] Yao Y, Xiao X, Ge L, Sun C P 2015 *Phys. Rev. A* **92** 022112
- [43] Cheng S, Hall M J W 2015 *Phys. Rev. A* **92** 042101
- [44] Bu K F, Kumar A, Wu J D 2016 arXiv: 1603.06322
- [45] Qiu L, Liu Z, Pan F 2016 arXiv: 1610.07237
- [46] Dür W, Vidal G, Cirac J I 2000 *Phys. Rev. A* **62** 062314
- [47] Chen X Y, Wang T T 2015 *Chin. Phys. B* **24** 080303
- [48] Gühne O, Jungnitsch B, Moroder T, Weinsten Y S 2011 *Phys. Rev. A* **84** 052319

- [49] Khosaa H, Saif F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040309
- [50] Kiesel N, Schmid C, Tóth G, Solano E, Weinfurter H 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 063604
- [51] Chen J L, Su H Y, Xu Z P, Wu Y C, Wu C F, Ye X J, Zukowski M, Kwek L C 2015 *Sci. Reports* **5** 11624
- [52] Xu J Z, Guo J B, Wen W, Bai Y K, Yan F L 2012 *Chin. Phys. B* **21** 080305
- [53] Pittenger A O, Rubin M H 2000 *Opt. Commun.* **179** 447
- [54] Napoli C, Bromley T R, Cianciaruso M, Piani M, Johnston N, Adesso G 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 150502

Four-partite Bell inequalities based on quantum coherence*

Ye Shi-Qiang Chen Xiao-Yu[†]

(College of Information and Electronic Engineering, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China)

(Received 23 May 2017; revised manuscript received 12 July 2017)

Abstract

It is well known that Bell inequalities are derived under the assumptions of locality and realism. Bell inequalities impose strict constraints on the statistical correlations of measurements of multipartite systems. Violating each of them guarantees the existence of quantum correlations in a quantum state. A quantum state with non-vanishing entanglement may violate some Bell inequalities. Recent progress of the fields like quantum biology and quantum thermodynamics reveals a particular role of quantum coherence in quantum information processing. Quantum coherence is identified by the presence of off-diagonal terms in the density matrix. To quantify quantum coherence of a given state, Baumgratz *et al.* (Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 140401) provided several kinds of coherence measures such as l_1 -norm of coherence and relative entropy of coherence. In this paper, we propose to use quantum coherence to derive Bell inequalities. We construct the Bell inequalities of four-partite product states with l_1 -norm of coherence, relative entropy of coherence. In the Bell inequalities of four-partite correlations, measurement operators are products of local measurement operators. Each local operator is one of the two arbitrary observables. We consider the violations of the four-partite Bell inequalities by the four-partite general pure Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) state, cluster states, W states with real coefficients. We also investigate the violations of the four-partite Bell inequalities by the four-partite GHZ class mixed states, cluster class mixed states, W class mixed states and Dicke class mixed states. It is shown that the four-partite Bell inequalities in terms of relative entropy of coherence are always violated by the four-partite general pure GHZ states, cluster states with the real coefficients. Hence there is non-vanishing entanglement for these states.

Keywords: Bell inequalities, quantum coherence, multipartite quantum states

PACS: 03.67.Mn, 03.65.Ud

DOI: 10.7498/aps.66.200301

* Project support by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11375152).

[†] Corresponding author. E-mail: xychen@zjgsu.edu.cn