

基于格林函数法的奇型 Mathieu-Gaussian 光束

吴琼 任志君 杜林岳 胡海华 顾颖 杨朝凤

Odd version Mathieu-Gaussian beam based on Green function

Wu Qiong Ren Zhi-Jun Du Lin-Yue Hu Hai-Hua Gu Ying Yang Zhao-Feng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 204201 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.204201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.204201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I20>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

双包层稀土掺杂光纤抽运吸收特性的分析

[Analysis of absorption property for pumping laser with double cladding rare earth doped fiber](#)

物理学报.2012, 61(16): 164203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.164203>

一维反激光器完美相干吸收理论分析

[Theoretical analysis of coherent perfect absorption in one-dimensional anti-laser](#)

物理学报.2012, 61(16): 164204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.164204>

尘埃粒子电势对等离子体电导率的影响

[Effect of dust particle potential on plasma conductivity](#)

物理学报.2012, 61(15): 154202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.154202>

部分空间相干光束在非 Kolmogorov 湍流大气中的有效曲率半径

[Effective radius of curvature of spatially partially coherent beams propagating through non-Kolmogorov turbulence](#)

物理学报.2012, 61(14): 144202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.144202>

树叶状红外频段完美吸收器的仿真设计

[Numerical simulation of leaf-shaped metamaterial absorber at infrared frequency](#)

物理学报.2012, 61(14): 144203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.144203>

基于格林函数法的奇型 Mathieu-Gaussian 光束*

吴琼^{1)2)†} 任志君¹⁾²⁾ 杜林岳¹⁾²⁾ 胡海华¹⁾²⁾ 顾颖²⁾ 杨朝凤²⁾

1) (浙江师范大学信息光学研究所, 金华 321004)

2) (浙江师范大学, 浙江省光信息检测与显示技术研究重点实验室, 金华 321004)

(2017 年 4 月 11 日收到; 2017 年 5 月 19 日收到修改稿)

根据光束传播的独立性和叠加性原理, 引入了一组能够产生第一类 $(2n + 2)$ 阶奇型 Mathieu-Gaussian 光束的虚光源点. 利用虚源点技术和格林函数法, 计算得到第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束的严格解析积分表达式. 利用该表达式得到了轴上光场分布的积分解析解. 以三阶非旁轴修正为例, 得到了第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束保留到三阶非旁轴修正项的轴上光场分布精确解.

关键词: 格林函数法, Mathieu-Gaussian 光束, 虚源点

PACS: 42.25.Bs, 42.68.Ay, 42.30.Kq

DOI: 10.7498/aps.66.204201

1 引言

无衍射光束是满足波动方程的一种特殊本征模式. 无衍射传输模式的特殊之处在于其分布与传输距离无关, 因而在传播过程中, 垂直于传播方向的截面光强分布处处不变, 即光束不会发生衍射. 1987 年, Durnin 找到并产生了第一个可实用的无衍射光束——Bessel 光束^[1,2]. 由于无衍射 Bessel 光束在传输过程中形态不变, 因此在产生后广泛应用于科学实验, 比如光通信和检测^[3]、激光打孔或准直^[4]、医学成像^[5,6]、微观粒子的俘获和操纵^[7]. 需要指出的是, 无衍射 Bessel 光束只是一个理论模型, 就像实际并不存在理想的余弦波一样, 实际使用的 Bessel 光束均是剪切过的有限能量的准无衍射 Bessel 光束^[3-7].

除无衍射 Bessel 光束之外, Gutiérrez-Vega 等通过进一步的研究指出, 在不同坐标系下的波动方程传输不变(无衍射)特解有四种形式, 分别为直角坐标系下的 Cosine 光束、极坐标系下的 Bessel 光束、椭圆坐标系下的 Mathieu 光束^[8-10], 以及抛物坐标系下的 Parabolic 光束^[11,12]. 对于椭

圆坐标系下的无衍射 Mathieu 光束, 在数学上描述它的 Mathieu 函数比描述 Cosine 光束和 Bessel 光束的 Cosine 函数和 Bessel 函数复杂得多, 其光学形态也丰富得多. 与 Cosine 函数和 Bessel 函数类似, Mathieu 函数并不能平方可积, 这意味着理想 Mathieu 光束有无穷大的能量. 显然, 理想 Mathieu 光束仅仅是一个理论模型, 实际中常使用被 Gaussian 函数剪切的、具有准无衍射传输特性的 Mathieu-Gaussian 光束^[13-15]. 研究 Mathieu-Gaussian 光束的传输更具实际意义.

光束的传输问题本质上是衍射问题. Born 和 Wolf 指出, “衍射问题是光学中遇到的最困难的问题之一, 在衍射理论中, 那种在某种意义上可以认为是严格的解, 是很少有的”, “对少数其他衍射问题也求得了严格解. 但是, 由于数学上的困难, 在大多数有实际意义的情况中, 还必须采用近似方法”. 近似方法只能处理满足某种近似条件的光束传输问题, 比如旁轴光学问题. 对于光束传输的任意情况, 特别是非旁轴情况, 近似法不能给出正确结果.

在随后的研究中, 人们发现在构建虚源点基础

* 国家自然科学基金(批准号: 11674288)和浙江省教育厅科研项目(批准号: Y201534211)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wuqiong@zjnu.cn

上^[16–18], 利用格林函数法^[19–22], 可研究某些光束的非旁轴传输. 对于光束的传输(衍射)问题, 虚源点技术将初始光束分解成很多点源的叠加, 如果知道每个点源产生的场分布, 利用光束的叠加原理, 即可求出光束传输过程的场分布, 这种方法称为格林函数法. 点源产生的场叫作格林函数. 到目前为止, 通过构建虚源点, 利用格林函数法, 已经研究了多种具有实用价值的光束的传播, 包括几类准无衍射光束的传播, 比如 Laguerre-Gaussian 光束^[19], Bessel-Gaussian 光束^[20], Elegant Hermite-Laguerre-Gaussian 光束^[21], Pearcey 光束^[22]. 然而, 由于椭圆坐标系下 Mathieu 函数的复杂性, 至今还未见通过构建虚源点, 利用格林函数法研究 Mathieu-Gaussian 光束的报道.

以第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束为例, 首先根据光束传输的独立性和叠加性原理, 将 Mathieu-Gaussian 光束分解为不同阶次的 Bessel 光束无穷项求和的形式. 然后, 通过构建虚源点, 利用格林函数法理论推导得到 Mathieu-Gaussian 光束传输的解析积分表达式. 根据该积分表达式, 得到 Mathieu-Gaussian 光束在轴上光场的三阶非旁轴修正. 研究结论进一步说明了格林函数法在研究光束旁轴与非旁轴传输方面的重要作用.

2 理 论

在椭圆坐标系下描述 Mathieu 光束, 形式最为简单直接^[8–10]. 在椭圆坐标系 (ξ, η) 下, Mathieu 光束有四种类型, 分别为第一、第二类奇型 Mathieu 光束和第一、第二类偶型 Mathieu 光束. 第一、第二类奇型 Mathieu 光束即 $\text{se}_{2n+2}(\eta, q)\text{Jo}_{2n+2}(\xi, q)$ 和 $\text{se}_{2n+1}(\eta, q)\text{Jo}_{2n+1}(\xi, q)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, se 和 Jo 分别为奇型角向和奇型径向 Mathieu 光束; 第一、第二类偶型 Mathieu 光束即 $\text{ce}_{2n}(\eta, q)\text{Je}_{2n}(\xi, q)$ 和 $\text{ce}_{2n+1}(\eta, q)\text{Je}_{2n+1}(\xi, q)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ce 和 Je 分别为偶型角向和偶型径向 Mathieu 光束^[13–15, 23–25].

相对于人们熟知的直角坐标和极坐标, 椭圆坐标系很少使用, 数学上也较难理解. 为此, 根据光束传输的独立性和叠加性原理, 与文献^[13–15, 23–25]所采用的数学手段类似, 我们仍采用级数展开的方式, 将 Mathieu 函数展开为极坐标系的形式.

两类奇型 Mathieu 光束可分别展开为^[13–15, 23–25]

$$\begin{aligned} E_{2n+2}(\rho, \phi, z=0) \\ = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+2}^{(2n+2)}(q)(-1)^{j+1} \sin[(2j+2)\phi] \\ \times J_{2j+2}(k_t \rho), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} E_{2n+1}(\rho, \phi, z=0) \\ = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1}^{(2n+1)}(q)i^{2j+1} \sin[(2j+1)\phi] \\ \times J_{2j}(k_t \rho); \end{aligned} \quad (2)$$

两类偶型 Mathieu 光束可分别展开为

$$\begin{aligned} E'_{2n}(\rho, \phi, z=0) \\ = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}^{(2n)}(q)(-1)^j \cos(2j\phi) J_{2j}(k_t \rho), \quad (3) \\ E'_{2n+1}(\rho, \phi, z=0) \\ = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1}^{(2n+1)}(q)i^{2j+1} \cos[(2j+1)\phi] \\ \times J_{2j}(k_t \rho), \end{aligned} \quad (4)$$

式中 ρ, ϕ, z 为圆柱坐标系下的位置变量; k_t 为光束的径向分量; $J_{2j}(\cdot)$ 和 $J_{2j+2}(\cdot)$ 分别表示 $2j$ 阶和 $2j+2$ 阶第一类 Bessel 函数; q 为椭圆参数, $q = h^2 k_t^2 / 4$, h 为对应椭圆两焦点间的距离; $A_{2j}^{(2n)}$, $A_{2j+1}^{(2n+1)}$, $A_{2j+2}^{(2n+2)}$, $A_{2j+1}^{(2n+1)}$ 为 Mathieu 函数的展开系数^[14].

由(1)–(4)式可知, 根据光束传播的独立性和叠加性原理, 在圆柱坐标系下, Mathieu-Gaussian 光束能够展开为不同阶数的 Bessel 光束的无穷项求和的形式. 这为我们避开椭圆坐标系下复杂的 Mathieu 函数运算, 借助较为成熟简单的 Bessel 函数的性质, 在圆柱坐标系下研究 Mathieu-Gaussian 光束的传输特性, 提供了一个很好的思路. 典型地, 以第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束(即 $2n+2$ 阶奇型 Mathieu-Gaussian 光束)作为研究对象, 其在 $z=0$ 平面的场分布为^[13–15]

$$\begin{aligned} E_{2n+2}(\rho, \phi, z=0) \\ = \sum_{j=0}^{\infty} E_{2n+2, 2j+2}(\rho, \phi, z=0) \\ = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+2}^{(2n+2)}(q)(-1)^{j+1} \sin[(2j+2)\phi] \end{aligned}$$

$$\times J_{2j+2}(k_t \rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{\omega_0^2}\right), \quad (5)$$

式中 $2n+2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 为奇型 Mathieu-Gaussian 光束的阶数, ω_0 为 $z = 0$ 平面上光束的束腰宽度.

在极坐标系下, 标量波函数 $E(\rho, \phi, z)$ 作为标量波动函数, 能够产生沿 z 轴正方向 (在 $z > 0$ 的物理空间) 传播的第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束, 且满足齐次亥姆霍兹方程. 既然 Mathieu 函数可在极坐标系下展开^[13-15, 23], 根据虚源技术, 假设有一系列强度为 $S_{cs}(2j+2)$, 位于 $z = z_{cs}$, 半径 $\rho = \rho_{cs}$, 并带有一个方位角变量 $\sin[(2j+2)\phi]$ 的电环, 能够产生第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束. 只要选取合适的参量 $S_{cs}(2j)$, z_{cs} 和 ρ_{cs} , 即可得到所需 Mathieu-Gaussian 光束. 在极坐标系下, 设虚光源的标量波函数 $E(\rho, \phi, z)$ 为

$$E_{2n+2, 2j+2}(\rho, \phi, z) = U_{2n+2, 2j+2}(\rho, z) \sin[(2j+2)\phi]. \quad (6)$$

当标量波函数 $E_{2n+2, 2j+2}(\rho, \phi, z)$ 为第一类奇型近旁轴 Mathieu-Gaussian 波函数时, $U_{2n+2, 2j+2}(\rho, z)$ 满足非齐次亥姆霍兹方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{(2j+2)^2}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \times U_{2n+2, 2j+2}(\rho, z) = -A_{2j+2}^{(2n+2)}(q) S_{cs}(2j+2) \frac{\delta(\rho - \rho_{cs})}{\rho} \delta(z - z_{cs}), \quad (7)$$

利用极坐标系下的傅里叶-贝塞尔变换可得

$$U_{2n+2, 2j+2}(\rho, z) = \int_0^\infty J_{2j+2}(\eta \rho) \bar{U}_{2n+2, 2j+2}(\eta, z) \eta d\eta, \quad (8)$$

$$\bar{U}_{2n+2, 2j+2}(\eta, z) = \int_0^\infty J_{2j+2}(\eta \rho) \bar{U}_{2n+2, 2j+2}(\rho, z) \rho d\rho. \quad (9)$$

由(7)式可得关于 $U_{2n+2, 2j+2}(\rho, z)$ 的光谱 $\bar{U}_{2n+2, 2j+2}(\eta, z)$ 的微分方程, 将 $\bar{U}_{2n, 2j}(\rho, z)$ 代入(8)式, 有

$$U_{2n+2, 2j+2}(\rho, z) = A_{2j+2}^{(2n+2)}(q) \int_0^\infty \eta d\eta J_{2j+2}(\eta \rho) J_{2j+2}(\eta \rho_{cs}) \times \frac{i S_{cs}(2j+2)}{2\zeta} \exp[i\zeta(z - z_{cs})]. \quad (10)$$

当 $\text{Re}(z - z_{cs}) > 0$ 时, 有 $\zeta = (k^2 - \eta^2)^{\frac{1}{2}}$. 现利用标准旁轴表述, 在旁轴条件 $\eta^2 \ll k^2$ 限制下, 将 ζ 展开为关于小量 η^2 的级数, $\zeta = k - \frac{\eta^2}{2k} + \dots$, 保留其首项 k 作为振幅因子, 保留其前两项 $k - \frac{\eta^2}{2k}$ 作为相位因子. 在上述近似条件下, (10) 式化简为

$$U_{2n+2, 2j+2}(\rho, z) = A_{2j+2}^{(2n+2)}(q) \exp(ikz) \left[\frac{i S_{cs}(2j+2)}{2k} \exp(-ikz_{cs}) \right] \times \int_0^\infty \eta d\eta J_{2j+2}(\eta \rho) J_{2j+2}(\eta \rho_{cs}) \times \exp\left[-\frac{i\eta^2}{2k}(z - z_{cs})\right]. \quad (11)$$

计算(11)式的积分, 可以得到

$$U_{2n+2, 2j+2}(\rho, z) = A_{2j+2}^{(2n+2)}(q) \exp(ikz) \frac{i S_{cs}(2j+2)}{2k} \exp(-ikz_{cs}) \times \exp\left[-\frac{3}{2}(2j+2)\pi i\right] \frac{-ik}{z - z_{cs}} \exp\left[\frac{ik\rho_{cs}^2}{2(z - z_{cs})}\right] \times \exp\left[\frac{ik\rho^2}{2(z - z_{cs})}\right] J_{2j+2}\left(\frac{-k\rho_{cs}\rho}{z - z_{cs}}\right). \quad (12)$$

为了在 $z > 0$ 处获得第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束, 假设在边界 $z = 0$ 处, 在旁轴近似下, 入射场分布由(5)式给出. 通过比较(5)式与(12)式在 $z = 0$ 处的场分布, 可以得到参量 $S_{cs}(2j+2)$, z_{cs} 和 ρ_{cs} 为

$$z_{cs} = \frac{ik\omega_0^2}{2} = ia, \quad (13)$$

$$\rho_{cs} = \frac{ik_t\omega_0^2}{2} = ib, \quad (14)$$

$$S_{cs}(2j+2) = (-1)^{j+1}(-2ia) \times \exp(-ka) \exp[3(j+1)\pi i] \times \exp\left(\frac{-k_t^2\omega_0^2}{4}\right). \quad (15)$$

将(13)–(15)式代入(12)式, 得到关于 $U_{2n+2, 2j+2}(\rho, z)$ 的旁轴近似解为

$$U_{2n+2, 2j+2, p}(\rho, z) = A_{2j+2}^{(2n+2)}(q) (-1)^{j+1} \exp\left(\frac{ikz}{1 + iz/a}\right) \times \exp\left(\frac{-k_t^2\omega_0^2}{4}\right) \exp\left(\frac{k_t^2\omega_0^2/4}{1 + iz/a}\right) \times \exp\left[\frac{-\rho^2}{\omega_0^2(1 + iz/a)}\right] J_{2j+2}\left(\frac{k_t\rho}{1 + iz/a}\right), \quad (16)$$

式中 $U_{2n+2,2j+2,p}$ 的下标 p 表示旁轴近似. 此外, 将 (13)—(15) 式代入 (10) 式, 得到关于 $U_{2n+2,2j+2}(\rho, z)$ 的精确解的积分表达式为

$$\begin{aligned} & U_{2n+2,2j+2}(\rho, z) \\ &= A_{2j+2}^{(2n+2)}(q)(-1)^{j+1}a \exp(-ka) \exp[i3(j+1)\pi] \\ & \times \exp\left(\frac{-k_t^2 \omega_0^2}{4}\right) \int_0^\infty \eta d\eta \\ & \times J_{2j+2}(\eta\rho) J_{2j+2}(i\eta b) \frac{\exp[i\zeta(z-ia)]}{\zeta}. \quad (17) \end{aligned}$$

结合 (6) 式和 (16) 式, 得到旁轴条件下的第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束. 结合 (6) 式和 (17) 式, 可得第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束的光波传输场. 根据 (13) 式和 (15) 式, 我们发现 (7) 式给出的光源位于 $z > 0$ 处. (17) 式给出的结果即为求解与 (7) 式相关的齐次亥姆霍兹方程, 得到的 Mathieu-Gaussian 光束在自由空间传输的精确解析积分表达式. 不难看出, 积分表达式 ((17) 式) 包含了低阶旁轴近似解 ((16) 式) 和所有更高阶的所谓非旁轴项 (如倏逝波一样).

运用格林函数法, 进一步研究第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束传输的解析表达式. 格林函数的微分方程为

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{(2j+2)^2}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] G(\rho, z) \\ &= -S_{cs}(2j+2) \frac{\delta(\rho - \rho_{cs})}{2\pi\rho} \delta(z - z_{cs}), \quad (18) \end{aligned}$$

其中

$$G(\rho, z) = S_{cs}(2j+2) \exp(ikR) / (4\pi R), \quad (19)$$

$$R = [(\rho - \rho_{cs})^2 + (z - z_{cs})^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

(18) 式等号两边同乘以 $\sin[(2j+2)\phi_{cs}]$ 且对 ϕ_{cs} 积分, 积分区间为 $[0, 2\pi]$, 结合 (13)—(15) 式, 且与 (7) 式进行比较, 可得

$$\begin{aligned} & E_{2n+2}(\rho, \phi, z) \\ &= -\sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+2}^{(2n+2)}(q)(-1)^{j+1} \frac{ia}{2\pi} \exp(-ka) \\ & \times \exp[3(j+1)\pi i] \exp\left(\frac{-k_t^2 \omega_0^2}{4}\right) \\ & \times \int_0^{2\pi} d\phi_{cs} \sin[(2j+2)\phi_{cs}] \frac{\exp(ikR)}{R}, \quad (21) \end{aligned}$$

其中

$$R = [\rho^2 - b^2 - i2\rho b \cos(\phi_{cs} - \phi) + (z - ia)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

由 (5) 式, (11) 式和 (21) 式可知, ρ 变化的度规长度是 ω_0 , η 的变化范围是 $0-1/\omega_0$ 的数量级范围. 如果光束束腰宽度 ω_0 远大于波长 $\lambda = 2\pi/k$, 可以得到 $\eta^2 \ll k^2$, 这与前述得到的旁轴近似解的条件相同. 显然, 实现旁轴近似的要求, 就是光束宽度必须比波长大. 对大多数光束来说, 这是容易满足的条件. 这也是大多数光学问题能够在旁轴近似条件下得到相对容易的处理并可得到基本正确的结果的原因.

我们将计算 $2n$ 阶奇型 Mathieu-Gaussian 光束轴上 ($\rho = 0$) 光场的非旁轴修正项. 根据 (6) 式和 (17) 式, 可以得到轴上光场的分布为

$$\begin{aligned} & E_{2n+2}(\rho = 0, z, \phi) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+2}^{(2n+2)}(q)(-1)^{j+1}a \exp(-ka) \\ & \times \exp[i3(j+1)\pi] \exp\left(\frac{-k_t^2 \omega_0^2}{4}\right) \sin[(2j+2)\phi] \\ & \times \int_0^\infty \eta d\eta J_{2j+2}(i\eta b) \frac{\exp[i\zeta(z-ia)]}{\zeta}. \quad (23) \end{aligned}$$

对 (23) 式中的振幅因子 $1/\zeta$ 和相位因子 $\exp[i\zeta(z-ia)]$ 作级数展开. 对于 $\eta^2 \ll k^2$ 的情况, 两者级数展开结果中, 只有 $(k\omega_0)^{-2m}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) 及之前的项被保留, 因而获得 m 阶修正项. 为了获得轴上光场的三阶非旁轴修正, 此时 $m = 3$, 即保留 $(k\omega_0)^{-6}$ 及之前的项. 在这样的展开结果下, 将 (23) 式变形为

$$\begin{aligned} & E_{2n+2}(\rho = 0, z, \phi) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+2}^{(2n+2)}(q)(-1)^{j+1} \frac{\omega_0^2}{2} \exp(-ka) \\ & \times \exp[i3(j+1)\pi] \exp\left(\frac{-k_t^2 \omega_0^2}{4}\right) \\ & \times \exp(ikz) \sin[(2j+2)\phi] \\ & \times \int_0^\infty \exp\left[-\frac{i\eta^2}{2k}(z-ia)\right] \sum_{m=0}^3 \frac{G^{2m}(\eta^2, z)}{(k\omega_0)^{2m}} \eta d\eta \\ & \times J_{2j+2}(i\eta b), \quad (24) \end{aligned}$$

其中

$$G^{(0)}(\eta^2, z) = 1, \quad (25)$$

$$G^{(2)}(\eta^2, z) = \frac{\omega_0^2 \eta^2}{2} - \frac{\omega_0^4 \eta^4}{16f^2(z)}, \quad (26)$$

$$G^{(4)}(\eta^2, z) = \frac{3\omega_0^4 \eta^4}{8} - \frac{\omega_0^6 \eta^6}{16f^2(z)} + \frac{\omega_0^8 \eta^8}{512f^4(z)}, \quad (27)$$

$$G^{(6)}(\eta^2, z) = \frac{5\omega_0^6\eta^6}{16} - \frac{15\omega_0^8\eta^8}{256f^2(z)} + \frac{3\omega_0^{10}\eta^{10}}{1024f^4(z)} - \frac{\omega_0^{12}\eta^{12}}{6 \times 4096f^6(z)}, \quad (28)$$

式中 $f^2(z) = (1 + iz/a)^{-1}$.

存在关系式

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \exp(-p^2\eta^2)\eta d\eta J_{2j+2}(i\eta b) \\ &= \frac{\Gamma[(2j+4)/2]}{2p^2\Gamma(2j+3)} \left(\frac{ib}{2p}\right)^{2j+2} \\ & \times {}_1F_1\left(\frac{2j+4}{2}; 2j+3; \frac{b^2}{4p^2}\right), \quad (29) \end{aligned}$$

$$p^2 = \frac{i(z - ia)}{2k}, \quad (30)$$

式中 Γ 为伽马函数, ${}_1F_1\left(\frac{2j+4}{2}; 2j+3; \frac{b^2}{4p^2}\right)$ 为合流超几何函数, 可以根据合流超几何函数的等式 ${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n} z^n$ 计算. 根据 (24)—(30) 式, 可以得到

$$\begin{aligned} & E_{2n+2}(\rho = 0, z, \phi) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+2}^{(2n+2)}(q)(-1)^{j+1} \frac{\omega_0^2}{2} \exp(-ka) \\ & \times \exp[i3(j+1)\pi] \exp\left(\frac{-k_t^2\omega_0^2}{4}\right) \\ & \times \exp(ikz) \sin[(2j+2)\phi] \\ & \times \frac{1}{2p^2\Gamma(2j+3)} \left(\frac{ib}{2p}\right)^{2j+2} \\ & \times \sum_{m=0}^3 (k\omega_0)^{-2m} f^{2j+2}(z) g_{m,2j+2}(z), \quad (31) \end{aligned}$$

其中

$$g_{0,2j+2} = \Gamma[(2j+4)/2] {}_1F_1\left(\frac{2j+4}{2}; 2j+3; \frac{b^2}{4p^2}\right), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & g_{1,2j+2} = 2\Gamma[(2j+6)/2] {}_1F_1\left(\frac{2j+6}{2}; 2j+3; \frac{b^2}{4p^2}\right) \\ & - \Gamma[(2j+8)/2] {}_1F_1\left(\frac{2j+8}{2}; 2j+3; \frac{b^2}{4p^2}\right), \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & g_{2,2j+2} = 6\Gamma[(2j+8)/2] {}_1F_1\left(\frac{2j+8}{2}; 2j+3; \frac{b^2}{4p^2}\right) \\ & - 4\Gamma[(2j+10)/2] {}_1F_1\left(\frac{2j+10}{2}; 2j+3; \frac{b^2}{4p^2}\right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2}\Gamma[(2j+12)/2] {}_1F_1\left(\frac{2j+12}{2}; 2j+3; \frac{b^2}{4p^2}\right), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & g_{3,2j+2} = 20\Gamma[(2j+10)/2] {}_1F_1\left(\frac{2j+10}{2}; 2j+3; \frac{b^2}{4p^2}\right) \\ & - 15\Gamma[(2j+12)/2] {}_1F_1\left(\frac{2j+12}{2}; 2j+3; \frac{b^2}{4p^2}\right) \\ & + 3\Gamma[(2j+14)/2] {}_1F_1\left(\frac{2j+14}{2}; 2j+3; \frac{b^2}{4p^2}\right) \\ & - \frac{1}{6}\Gamma[(2j+16)/2] {}_1F_1\left(\frac{2j+16}{2}; 2j+3; \frac{b^2}{4p^2}\right). \quad (35) \end{aligned}$$

(31) 式表示轴上的第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束 ((23) 式) 保留到三阶非旁轴修正项的非旁轴表达式. 典型地, 取 $\lambda = 632.8$ nm, $\omega_0 = 45$ μ m, $q = 6$, 基于 (31) 式, 对第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束的轴上光强分布进行数值模拟, 结果如图 1 所示. 当传输距离较小时, 利用本文推导的非旁轴表达式计算得到的轴上光强分布结果与旁轴理论计算结果有明显差异. 很显然, 基于衍射理论研究光束近场传输时, 只有利用非旁轴理论才能计算得到正确的结果. 但非旁轴理论的数学计算极为复杂, 一般很难给出解析表达式. 本文基于虚源技术的格林函数法给出 Mathieu-Gaussian 光束解析表达式, 对于解析研究这种重要光束的传输有较为重要的理论价值. 而且从图 1 可以看出, 随着传输距离的增加, 旁轴的近似计算结果与考虑校正项的非旁轴计算结果越来越接近. 这说明只有在研究光束的远场传输时, 才能利用旁轴理论的近似法计算得到相对正确的结果. 这一结论与经典的光学理论相一致.

综上所述, 通过构建虚源点, 利用格林函数法, 本文研究了第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束, 即 $2n+2$ 阶奇型 Mathieu-Gaussian 光束传输的严格解析表达式. 另外三种 Mathieu-Gaussian 光束, 包括第二类 ($2n+1$ 阶) 奇型 Mathieu-Gaussian 光束, 第一类 ($2n$ 阶)、第二类 ($2n+1$ 阶) 偶型 Mathieu-Gaussian 光束, 可作类似处理, 限于篇幅, 文中不再赘述. 研究结果充分说明在构建虚源点的基础上, 利用格林函数法, 可很好地研究 Mathieu-Gaussian 光束旁轴与非旁轴光场分布情况, 这也为研究其他复杂光束提供了很好的方法与思路.

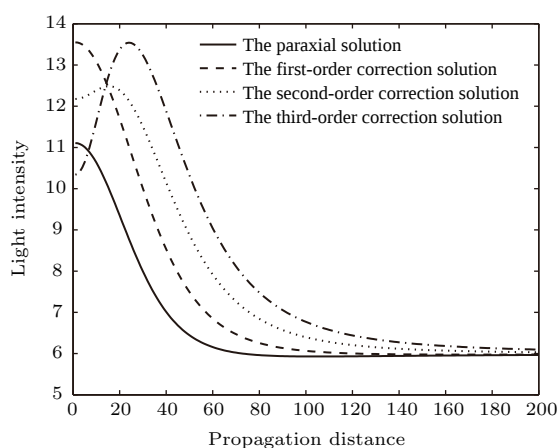


图1 第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束轴上光强分布

Fig. 1. The on-axis intensity distribution of the odd Mathieu-Gaussian beam of the first kind.

3 结 论

根据光束传播的独立性和叠加性原理, Mathieu-Gaussian 光束可写为不同阶次的 Bessel 光束无穷项求和的形式. 这为我们借助 Bessel 光束的性质, 在圆柱坐标系下研究 Mathieu-Gaussian 光束在自由空间中的传输特性提供了可能. 引入了一组能够产生第一类 $(2n + 2)$ 阶奇型 Mathieu-Gaussian 光束的虚光源点, 利用格林函数法, 推导出该光束在自由空间传输的严格解析积分表达式. 根据第一类奇型 Mathieu-Gaussian 光束的积分形式精确解, 直接计算得到光轴上光场分布的解析解. 以三阶非旁轴修正为例, 得到了第一类 Mathieu-Gaussian 光束保留到三阶非旁轴修正项的轴上光场分布精确解. 研究结果充分体现了通过构建虚源点, 利用格林函数法研究光束特性、非旁轴修正等光束旁轴与非旁轴光场分布的好处. 本文基于光束传播的独立性和叠加性原理, 利用复杂函数展开为简单函数叠加的方法, 为现代光学中研究其他复杂光束问题提供了很好的方法与思路.

参考文献

[1] Durnin J, Miceli J J Jr, Eberly J H 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1499

[2] Durnin J 1987 *J. Opt. Soc. Am. A* **4** 651
 [3] Rajesh K B, Anbarasan P M 2008 *Chin. Opt. Lett.* **6** 785
 [4] Dudley A, Lavery M, Padgett M, Forbes A 2013 *Opt. Photonics News* **24** 22
 [5] Lorensen D, Singe C C, Curatolo A, Sampson D D 2014 *Opt. Lett.* **39** 548
 [6] Planchon T A, Gao L, Milkie D E, Davidson M W, Galbraith J A, Galbraith C G, Betzig E 2011 *Nat. Methods* **8** 417
 [7] Yan Z, Jureller J E, Sweet J, Guffey M J, Pelton M, Schere N F 2012 *Nano Lett.* **12** 5155
 [8] Gutiérrez-Vega J C, Iturbe-Castillo M D, Chávez-Cerda S 2000 *Opt. Lett.* **25** 1493
 [9] Gutiérrez-Vega J C, Iturbe-Castillo M D, Ramírez G A, Tepichina E, Rodríguez-Dagninob R M, Chávez-Cerda S, New G H C 2001 *Opt. Commun.* **195** 35
 [10] Chávez-Cerda S, Padgett M J, Allison I, New G H C 2002 *J. Opt. B* **4** S52
 [11] Bandres M A, Gutiérrez-Vega J C, Chávez-Cerda S 2004 *Opt. Lett.* **29** 44
 [12] López-Mariscal C, Bandres M, Gutiérrez-Vega J, Chávez-Cerda S 2005 *Opt. Express* **13** 2364
 [13] Chafiq A, Hricha Z, Belafhal A 2006 *Opt. Commun.* **265** 594
 [14] Gutiérrez-Vega J C, Bandres M A 2007 *J. Opt. Soc. Am. A* **24** 215
 [15] Alvarez-Elizondo M B, Rodríguez-Masegosa R, Gutiérrez-Vega J C 2008 *Opt. Express* **16** 18770
 [16] Deschamps G A 1971 *Electron. Lett.* **7** 684
 [17] Felsen L B 1976 *J. Opt. Soc. Am. A* **66** 751
 [18] Shin S Y, Felsen L B 1977 *J. Opt. Soc. Am.* **67** 699
 [19] Seshadri S R 2002 *Opt. Lett.* **27** 1872
 [20] Seshadri S R 2002 *Opt. Lett.* **27** 998
 [21] Deng D, Guo Q 2008 *Opt. Lett.* **33** 1225
 [22] Deng D, Chen C, Zhao X, Chen B, Peng X, Zheng Y 2014 *Opt. Lett.* **39** 2703
 [23] Gutiérrez-Vega J C, Rodríguez-Dagnino R M 2003 *Am. J. Phys.* **71** 233
 [24] Li D, Wu F T, Xie X X, Sun C 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 014201 (in Chinese) [李冬, 吴逢铁, 谢晓霞, 孙川 2015 物理学报 **64** 014201]
 [25] Li D, Wu F T, Xie X X, Wu M 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 152401 (in Chinese) [李冬, 吴逢铁, 谢晓霞, 吴敏 2014 物理学报 **63** 152401]

Odd version Mathieu-Gaussian beam based on Green function*

Wu Qiong^{1)2)†} Ren Zhi-Jun¹⁾²⁾ Du Lin-Yue¹⁾²⁾ Hu Hai-Hua¹⁾²⁾
Gu Ying²⁾ Yang Zhao-Feng²⁾

1) (Institute of Information Optics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

2) (Zhejiang Provincial Key Laboratory of Optical Information Detecting and Display Technology, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

(Received 11 April 2017; revised manuscript received 19 May 2017)

Abstract

Like the theoretical pattern of non-diffracting Bessel beams, ideal non-diffracting Mathieu beams also carry infinite energy, but cannot be generated as a physically realizable entity. Mathieu-Gaussian beams can be experimentally generated by modulating ideal Mathieu beams with a Gaussian function, and thus they are a kind of pseudo-non-diffracting beams with finite energy and finite transverse extent. The research of Mathieu-Gaussian beam propagating characteristics in free space is of great significance. In order to analytically study the propagation of Mathieu-Gaussian beams, the Mathieu function is expanded into the superposition of a series of Bessel functions in polar coordinates based on the superposition principle of light waves. It means that the Mathieu-Gaussian beam can be converted into accumulation of the infinite terms of the Bessel beams with different orders. According to the properties of the Bessel function, the free-space propagation properties of Mathieu-Gaussian beams can be studied in the circular cylindrical coordinates. Thus, a group of virtual optical sources are introduced to generate the odd Mathieu-Gaussian beams of the first kind, i.e., $(2n + 2)^{\text{th}}$ -order, which is a family of Mathieu-Gaussian beams. Using the virtual source technique and the Green function, we derive the rigorous integral formula for the odd Mathieu-Gaussian beams of the first kind. Taking for example the first three orders with non-paraxial corrections, the analytical solution of the on-axis field of odd Mathieu-Gaussian beams of the first kind is further obtained from the integral formula. The axial intensity distribution of the odd Mathieu-Gaussian beams of the first kind is numerically calculated by the integral formula. The simulation results show that the calculation results obtained with the paraxial theory and the rigorous integral expressions of non-paraxial Mathieu-Gaussian beams are obviously different when the propagation distance of the odd Mathieu-Gaussian beams of the first kind is small. The calculation results of the two methods are coming closer and closer with the increasing propagation distance. The results indicate that the correct results can be obtained with the paraxial theory when we study the propagation of Mathieu-Gaussian beams in the far-field, but the non-paraxial theory must be used to obtain correct results when we study the propagation of Mathieu-Gaussian beams in the near-field. Owing to the complexity of the non-paraxial theory, it is difficult to obtain the exact analytic solutions of Mathieu-Gaussian beams in the near-field with the classical diffraction theory. Based on the superposition principle of light waves, by introducing the virtual source technique and the Green function, the complex Mathieu-Gaussian function can be expanded into the superposition of a series of simple Bessel functions, and the axial intensity distributions of Mathieu-Gaussian beams in the far-field and the near-field can be studied well. It will also provide a feasible method to study other complex beams propagating in free space.

Keywords: Green function, Mathieu-Gaussian beams, virtual sources

PACS: 42.25.Bs, 42.68.Ay, 42.30.Kq

DOI: 10.7498/aps.66.204201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11674288) and the Education Department Program of Zhejiang Province, China (Grant No. Y201534211).

† Corresponding author. E-mail: wuqiong@zjnu.cn