

基于磁化电流法的双稳压电悬臂梁磁力精确分析

张雨阳 冷永刚 谭丹 刘进军 范胜波

Accurate analysis of magnetic force of bi-stable cantilever vibration energy harvesting system with the theory of magnetizing current

Zhang Yu-Yang Leng Yong-Gang Tan Dan Liu Jin-Jun Fan Sheng-Bo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 220502 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.220502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.220502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于磁化电流法的双稳压电悬臂梁磁力精确分析

Accurate analysis of magnetic force of bi-stable cantilever vibration energy harvesting system with the theory of magnetizing currents

物理学报.2017, 66(22): 220502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.220502>

受污染混沌信号的协同滤波降噪

Denoising of contaminated chaotic signals based on collaborative filtering

物理学报.2017, 66(21): 210501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.210501>

基于心脏腔式结构的心电图元胞自动机建模

A cellular automaton model for electrocardiogram considering the structure of heart

物理学报.2017, 66(20): 200501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.200501>

永磁同步风力发电机随机分岔现象的全局分析

Global analysis of stochastic bifurcation in permanent magnet synchronous generator for wind turbine system

物理学报.2017, 66(19): 190501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.190501>

基于混沌和随机共振的微弱信号检测

Weak signal detection based on chaos and stochastic resonance

物理学报.2012, 61(18): 180501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.180501>

基于磁化电流法的双稳压电悬臂梁磁力精确分析*

张雨阳 冷永刚† 谭丹 刘进军 范胜波

(天津大学机械工程学院, 天津 300350)

(2017年3月22日收到; 2017年8月21日收到修改稿)

双稳压电悬臂梁结构常用于振动能量采集系统, 其中的非线性磁力与系统势函数和动力学方程的建立紧密相关, 非线性磁力的正确分析和精确计算对系统振动响应和能量采集效果的准确预测至关重要. 本文采用形状函数分析方法, 通过悬臂梁弯曲斜率的整体积分计算, 得到了悬臂梁末端的运动轨迹及其末端磁铁精确的位置与姿态, 并由此根据磁化电流理论建立了双稳压电悬臂梁能量采集系统的磁力计算模型, 给出了末端磁铁受到的水平轴向磁力和竖直纵向磁力及其合磁力的变化规律. 数值模拟发现, 随着末端磁铁竖直纵向位移逐渐增大, 磁铁受到的水平轴向磁力和竖直纵向磁力都会依次由排斥力转变为吸引力, 从而导致磁力合力的方向会随磁铁位移发生跨越两个象限的大幅度变化. 实验验证表明, 磁力计算结果与实验测量结果符合良好, 其精确度优于现有文献方法的精度, 因此本文的方法可以准确预测双稳压电悬臂梁振动过程的磁力变化规律.

关键词: 振动能量采集, 双稳悬臂梁系统, 磁力计算, 磁化电流

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.66.220502

1 引言

目前, 随着低功耗微机电系统 (micro-electro-mechanical system, MEMS) 技术与现代无线通讯技术的迅猛发展, 电子设备愈渐小型化、微型化, 微型电子设备要求持续不间断的供电问题成为微机电技术发展的一大瓶颈^[1,2]. 为了克服传统电池尺寸大、寿命短、需要定期更换等问题, 人们希望得到一种能够吸收周围环境中能量的自供电装置. 由于环境中振动现象普遍存在, 因此振动能量的采集成为一种可替代传统电池和可自我维持的新型能源开发方式, 受到国内外学者越来越广泛的关注^[3].

在振动能量采集方式中, 压电式振动能量采集较为普遍, 其能量密度大, 结构简单, 便于微型化, 使其在与微机电系统技术结合中发挥了很大的优势^[4]. 对于线性压电悬臂梁振动能量采集结构, 系统存在共振频带过窄、能量输出效率低等问题, 因

此将磁力引入系统中构成非线性压电悬臂梁振动能量采集系统, 可有效提高振动能量采集系统的能量输出效率和宽频带激励的适应性^[5-8].

双稳态结构是非线性压电梁振动能量采集系统中的常用结构, 其系统中磁铁间作用力的建模分析与精确计算是非线性双稳振动能量采集研究中的一个难点, 它关系到系统势函数的建立与稳态的确定, 以及磁铁尺寸、间距和磁化强度等参数的选取, 并对系统的输出响应和能量采集效果有着较大的影响. 目前双稳压电梁的磁力分析与计算主要是依据磁偶极子^[9-11]或磁化电流^[12]理论. 磁偶极子法关于双稳压电梁的磁力分析与计算已在文献^[9]中进行了阐述, 本文只讨论磁化电流法在双稳压电梁中的磁力分析与计算. 在已有的文献中, 双稳压电梁的磁化电流法磁力计算模型主要考虑悬臂梁竖直纵向磁力对系统的影响, 即只考虑垂直于悬臂梁水平轴方向的磁力分力的影响, 认为磁力的水平轴向分力对悬臂梁振动响应的影响不大, 可

* 国家自然科学基金 (批准号: 51675370) 和天津市应用基础与前沿技术研究的计划 (批准号: 15JCZDJC32200) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: leng_yg@tju.edu.cn

忽略不计^[3,13,14]. 磁力模型的这种简化应用实际上忽略了梁振动过程中真实磁力(合力)的大小和方向变化对系统的影响, 且对于悬臂梁末端磁铁位置变化规律的近似计算较为粗略, 这种简化方法对于实际磁力的分析计算和梁的振动响应以及能量的采集效果带来怎样的误差目前还没有一个统一的分析结果, 特别是针对梁的大位移振动响应, 常规的小幅度、小角度、小偏转等近似分析方法是否适用有待进一步研究考证.

为了精确完整地分析双稳压电梁的非线性磁力, 本文以双稳压电梁振动能量采集系统为研究对象, 首先针对压电梁的不同振动位移尺度, 研究磁铁在磁场中的位置姿态, 然后建立磁化电流法的磁力分析计算模型, 分析磁铁间的作用力, 并给出磁力计算的精确方法, 阐明误差产生的原因, 为准确得到双稳压电悬臂梁系统的振动响应和能量输出提供可靠的非线性磁力计算方法.

2 双稳态压电悬臂梁振动能量采集系统

双稳态压电悬臂梁振动能量采集系统(以下简称双稳压电梁系统)的结构如图1所示, 系统由基座E、带有末端磁铁A的悬臂梁C和固定在基座上的外部磁铁B组成, 外部磁铁B位于悬臂梁的水平轴线延长线上, 悬臂梁根部上下两面分别对称黏贴有压电片D. 两磁铁材料及形状尺寸相同且相互排斥, 由于这种磁铁排斥力的存在, 可使悬臂梁在水平轴线的上下两侧位置保持稳定的平衡态, 而在水平轴线位置保持非稳定的平衡态. 当系统受到外界激励时, 基座带动悬臂梁振动使悬臂梁上的压电片发生形变, 根据正压电效应, 压电片将产生电能输出, 即实现机械振动能向电能的转化^[15,16].

图1(a)结构一般可简化为质量弹簧阻尼模型, 如图1(b)所示. 根据牛顿第二定律与基尔霍夫第一定律可得到系统的动力学方程与采集电路方程^[15,17]:

$$\begin{aligned} P(t) + \theta V(t) + F_x \\ = m\ddot{x}(t) + \eta\dot{x}(t) + kx(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\theta\dot{x}(t) + C_p\dot{V}(t) + \frac{V(t)}{R_L} = 0, \quad (2)$$

其中 $P(t)$ 为外界激励; F_x 为两磁铁的磁力在竖直方向上的分力; $x(t)$ 为末端磁铁的竖直位移; $V(t)$

为压电片输出电压; m , k , η 及 θ 分别为压电悬臂梁的等效质量、等效刚度、等效阻尼及压电陶瓷(PZT)的机电耦合系数; C_p 是电路电容; R_L 为电路电阻.

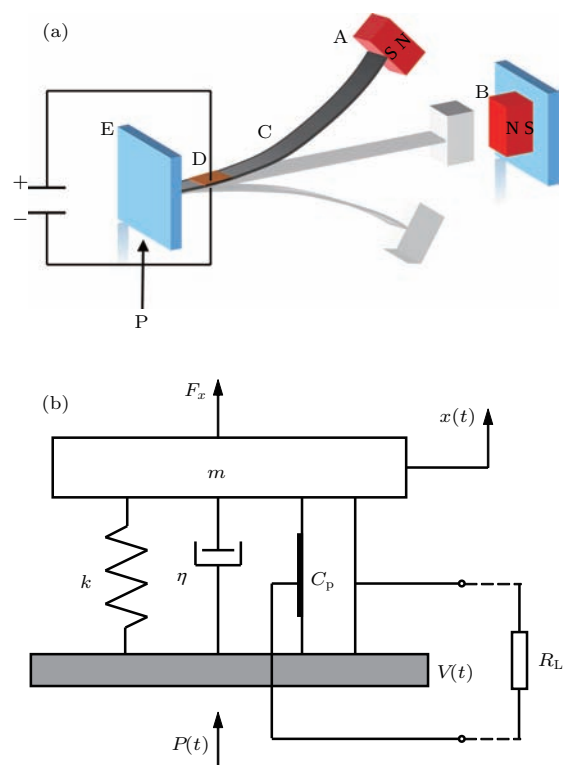


图1 (网刊彩色) 双稳压电悬臂梁振动能量采集系统 (a) 结构示意图; (b) 等效模型

Fig. 1. (color online) Bi-stable piezoelectric cantilever beam energy harvesting system: (a) Schematic diagram of structure; (b) equivalent model of energy harvesting systems.

从(1)和(2)式可以看出, 磁铁间的作用力对压电悬臂梁能量采集系统的机电能量转换起着关键性的作用, 决定了系统的稳态形式. 系统振动过程中, 悬臂梁末端磁铁位置的变化导致磁力的大小和方向也在不断变化, 准确分析计算这种动态变化的磁力, 可为双稳压电梁的振动响应和能量采集提供可靠的理论指导和评估依据.

3 双稳压电梁磁化电流法的磁力分析

3.1 悬臂梁末端轨迹计算

为精确计算出双稳压电梁系统中的磁力, 需先得悬臂梁末端磁铁的位置和姿态, 即确定悬臂梁末端磁铁的转角和水平轴向位移. 为此, 以悬臂梁根部为原点建立如图2所示坐标系, 悬臂梁上任意

点和末端位置分别表示为 $P(u_p, v_p)$ 和 $Q(u, v)$.

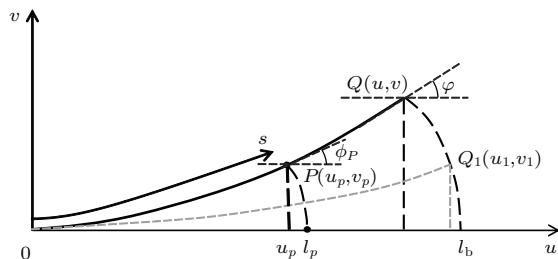


图2 悬臂梁形状函数与末端位置

Fig. 2. Diagram of the cantilever beam's shape function and end positions.

悬臂梁上任意一点的纵向位移与悬臂梁自由末端纵向位移的关系形如下^[18]:

$$v(s) = v(u)\psi(s), \quad (3)$$

其中, s 表示悬臂梁上的任意点 P 沿中性轴到固定端的距离, $v(u)$ 表示悬臂梁末端竖直纵向位移关于水平轴向位置的函数, $\psi(s)$ 称作悬臂梁的形状函数. 因必须使悬臂梁上任意点 P 的位移满足边界条件 $s = 0, v_p = 0$, 故取形状函数为^[19]

$$\psi(s) = \lambda \left(1 - \cos \left(\frac{\pi s}{2l_b} \right) \right), \quad (4)$$

其中 λ 为常数, l_b 为悬臂梁长度. 对于悬臂梁自由末端, 需使形状函数满足 $v(u) = v(u)\psi(u)$, 即 $\psi(s) = \psi(u) = 1$, 故得

$$\lambda = 1 / (1 - \cos(\pi u / 2l_b)). \quad (5)$$

令悬臂梁上任意点 P 的斜度, 即点 P 的切线与水平 u 轴的夹角, 为 ϕ_p , 则不难理解 $\sin \phi_p = v'_p$ 或 $\cos \phi_p = 1 - (l_p - u_p)'$ ^[20,21], 其中变量右上角的角分符号“'”表示变量对 s 的导数, 由此可得:

$$(l_p - u_p)' = 1 - \sqrt{1 - v_p'^2} \approx \frac{1}{2} v_p'^2, \quad (6)$$

$$l_p - u_p = \frac{1}{2} \int_0^s (v_p'(\xi))^2 d\xi. \quad (7)$$

由(7)式进一步计算悬臂梁末端位移, 可得

$$\begin{aligned} l_b - u &= \frac{1}{2} \int_0^u (v'(s))^2 ds \\ &= \frac{v^2 \pi^2}{8l_b^2 \left(1 - \cos \frac{\pi u}{2l_b} \right)} \left(\frac{u}{2} - \frac{l_b}{2\pi} \sin \frac{\pi u}{l_b} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

化简得到多项式:

$$8l_b^2 u \cos \frac{\pi u}{2l_b} - 8l_b^3 \cos \frac{\pi u}{2l_b} + \frac{\pi l_b v^2}{2} \sin \frac{\pi u}{l_b}$$

$$- \left(8l_b^2 + \frac{\pi^2 v^2}{2} \right) u + 8l_b^3 = 0. \quad (9)$$

将(9)式中的正、余弦项泰勒近似展开, 取前两项并舍去高阶无穷小项, 求得悬臂梁末端水平轴向位移与竖直纵向位移的关系为

$$u(v) = \frac{l_b}{\frac{\pi^2 v^2}{12l_b^2} + 1}$$

或

$$v = \frac{l_b}{\pi} \sqrt{12 \left(\frac{l_b}{u} - 1 \right)}. \quad (10)$$

取悬臂梁长为 $l_b = 44$ mm, 可得悬臂梁末端位置变化轨迹如图3所示. 当任意点 P 位于悬臂梁末端时, 令其切线与水平轴的夹角为 $\phi_p = \phi$, 如图2所示. 该夹角 ϕ 可由下式计算:

$$\begin{aligned} \sin \phi = v'(u) &= \left[\lambda v \left(1 - \cos \frac{\pi s}{2l_b} \right) \right]' \\ &= \frac{v \frac{\pi}{2l_b}}{1 - \cos \frac{\pi u(v)}{2l_b}} \sin \frac{\pi u(v)}{2l_b}. \end{aligned} \quad (11)$$

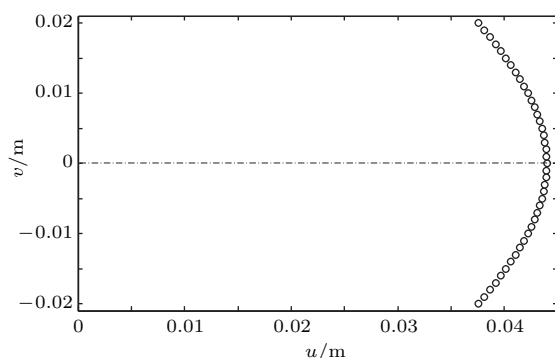


图3 悬臂梁末端位置变化轨迹

Fig. 3. The trace of the cantilever beam's end position.

3.2 磁化电流法基本原理

经典电磁理论认为, 铁磁性材料在磁场中被磁化后, 材料内部存在体内分子磁化电流, 材料表面存在表面分子磁化电流. 由于磁铁A和B都是被均匀磁化的永磁体, 其内部是线性各向同性介质, 因此其磁化强度 $\mathbf{M}$ 为常数, 内部磁化电流密度为 $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$ ^[22], 表面磁化电流面密度为^[23]

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{n}, \quad (12)$$

其中 $\mathbf{n}$ 为表面法向矢量, 符号“ $\wedge$ ”表示单位矢量.

对于双稳压电梁系统, 其磁力计算模型可以视为悬臂梁末端磁铁A的磁化电流在由外部固定磁铁B的磁化电流产生的磁场中所受的安培力. 记双稳压电梁系统中的两磁铁A, B的水平间距为 d , 两磁铁的长 l_A 和 l_B 、宽 w_A 和 w_B 、高 h_A 和 h_B 的尺寸及磁极摆放如图4所示.

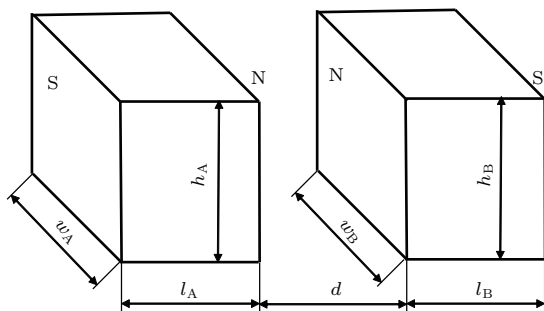


图4 磁铁几何尺寸及其间距示意图

Fig. 4. Schematic diagram of geometric dimensions and interval between two magnets.

3.3 磁感应强度计算

由毕奥-萨伐尔定律知, 电流在空间任意点产生的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 可以表示为:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (13)$$

$$\mathbf{B} = \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (14)$$

其中 $I = SK_{mB}$ 为等效电流, S 表示磁化电流所在表面的面积, 可由(12)式得 $K_{mB} = \mathbf{M}_B \times \hat{n}$; L 为积分路径, 即电流路径, $d\mathbf{l}$ 为磁化电流的微小线元, $\mathbf{r}$ 为电流微元指向待求场点的向量, μ_0 为真空磁导率.

为了便于计算分析磁铁B在空间各点产生的磁感应强度, 以磁铁B为原点建立坐标系, 如图5所示. 其磁化强度方向指向 y 轴正方向, 大小为 M_B .

在图5建立的坐标系中, 磁铁B各个表面的法向单位矢量为^[13]:

$$\hat{n} = \begin{cases} \hat{x} & (\text{上表面}) \\ -\hat{x} & (\text{下表面}) \\ \hat{y} & (\text{左侧面}) \\ -\hat{y} & (\text{右侧面}) \\ \hat{z} & (\text{前表面}) \\ -\hat{z} & (\text{后表面}) \end{cases}. \quad (15)$$

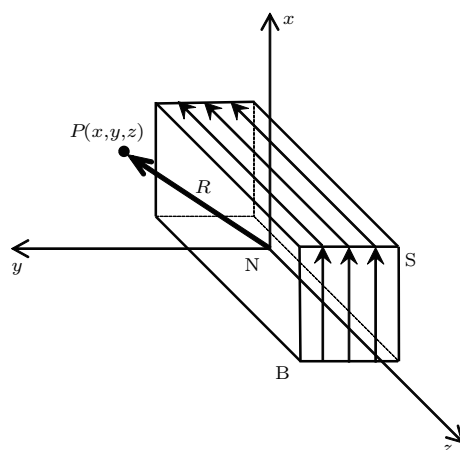


图5 磁铁B磁化电流示意图

Fig. 5. Schematic diagram of external magnet B's magnetizing currents.

已知 $\mathbf{M}_B = M_B \hat{y}$, 可得其对应表面磁化电流面密度为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{mB} &= \mathbf{M}_B \times \hat{n} \\ &= \begin{cases} -M_B \hat{z} & (\text{上表面}) \\ M_B \hat{z} & (\text{下表面}) \\ 0 & (\text{左侧面}) \\ 0 & (\text{右侧面}) \\ M_B \hat{x} & (\text{前表面}) \\ -M_B \hat{x} & (\text{后表面}) \end{cases}. \end{aligned} \quad (16)$$

因此可得图5坐标系中任意一点 $P(x, y, z)$ 在 x, y, z 三个方向的磁感应强度分别为:

$$\begin{aligned} B_i(x, y, z) &= \frac{\mu_0 M_B l_B}{4\pi} \left\{ \int_{-\frac{w_B}{2}}^{\frac{w_B}{2}} \frac{y dv}{\left[\left(x - \frac{h_B}{2} \right)^2 + y^2 + (z - v)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\frac{w_B}{2}}^{\frac{w_B}{2}} \frac{-y dv}{\left[\left(x + \frac{h_B}{2} \right)^2 + y^2 + (z - v)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} B_j(x, y, z) &= \frac{\mu_0 M_B l_B}{4\pi} \left\{ \int_{-\frac{w_B}{2}}^{\frac{w_B}{2}} \frac{-\left(x - \frac{h_B}{2} \right) dv}{\left[\left(x - \frac{h_B}{2} \right)^2 + y^2 + (z - v)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\frac{w_B}{2}}^{\frac{w_B}{2}} \frac{\left(x + \frac{h_B}{2} \right) dv}{\left[\left(x + \frac{h_B}{2} \right)^2 + y^2 + (z - v)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{-\frac{w_B}{2}}^{\frac{w_B}{2}} \frac{\left(x + \frac{h_B}{2}\right) dv}{\left[\left(x + \frac{h_B}{2}\right)^2 + y^2 + (z - v)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
 & + \int_{-\frac{h_B}{2}}^{\frac{h_B}{2}} \frac{-\left(z - \frac{w_B}{2}\right) dw}{\left[(x - w)^2 + y^2 + \left(z - \frac{w_B}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
 & + \int_{-\frac{h_B}{2}}^{\frac{h_B}{2}} \frac{\left(z + \frac{w_B}{2}\right) dw}{\left[(x - w)^2 + y^2 + \left(z + \frac{w_B}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \Bigg\}, \\
 & B_k(x, y, z) = \\
 & \frac{\mu_0 M_B l_B}{4\pi} \left\{ \int_{-\frac{h_B}{2}}^{\frac{h_B}{2}} \frac{y dw}{\left[(x - w)^2 + y^2 + \left(z - \frac{w_B}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right. \\
 & \left. + \int_{-\frac{h_B}{2}}^{\frac{h_B}{2}} \frac{-y dw}{\left[(x - w)^2 + y^2 + \left(z + \frac{w_B}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_k(x, y, z) = \\
 & \frac{\mu_0 M_B l_B}{4\pi} \left\{ \int_{-\frac{h_B}{2}}^{\frac{h_B}{2}} \frac{y dw}{\left[(x - w)^2 + y^2 + \left(z - \frac{w_B}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right. \\
 & \left. + \int_{-\frac{h_B}{2}}^{\frac{h_B}{2}} \frac{-y dw}{\left[(x - w)^2 + y^2 + \left(z + \frac{w_B}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

其推导过程详见附录 A.

3.4 磁斥力计算

根据 3.1 节求得的悬臂梁末端位置, 可进一步求解末端磁铁 A 各表面磁化电流在外部磁场坐标系中的位置坐标. 取悬臂梁任意弯曲状态如图 6 所示, O 点为悬臂梁固定端位置, A 点与 B 点分别表示悬臂梁末端磁铁与外部磁铁的中心, A_0 点为悬臂梁水平不发生形变时其末端磁铁的中心位置, C 点表示悬臂梁末端磁铁 A 任意位置在水平 y 轴上的投影. 取坐标原点在磁铁 B 的中心.

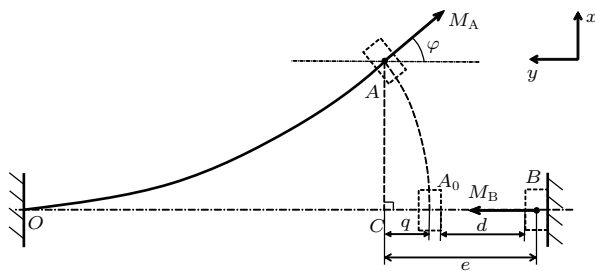


图 6 悬臂梁末端磁铁 A 与外部磁铁 B 相对位置
Fig. 6. The relative position of external magnet B and magnet A at the end of cantilever beam.

假设磁铁 A 所在区域受到的磁场分布均匀一致, 那么可将其表面磁化电流位置等效视为分布在各表面中心^[13], 如图 7 所示, 可得磁铁 A 各表面磁化电流在坐标系中的位置

$$\begin{aligned}
 & I_1 \left(x + \frac{h_A}{2} \cos \varphi, e + \frac{h_A}{2} \sin \varphi, 0 \right), \\
 & I_2 \left(x - \frac{h_A}{2} \cos \varphi, e - \frac{h_A}{2} \sin \varphi, 0 \right), \\
 & I_3 \left(x, e, \frac{w_A}{2} \right), \quad I_4 \left(x, e, -\frac{w_A}{2} \right),
 \end{aligned}$$

其中 φ 是悬臂梁末端切线与水平轴的夹角, 也是磁铁转角, 由 (11) 式确定, e 为末端磁铁 A 中心在 y 轴上的投影到坐标原点距离, 其值为

$$\begin{aligned}
 e &= |BC| = |A_0B| + |A_0C| \\
 &= \frac{l_A}{2} + \frac{l_B}{2} + d + q. \quad (20)
 \end{aligned}$$

由图 6 和图 7 不难看出, (20) 式中的 q 即为悬臂梁自由末端水平轴向位移, 结合 3.1 节悬臂梁末端位置计算 (8) 式可表示为

$$q = l_b - u. \quad (21)$$

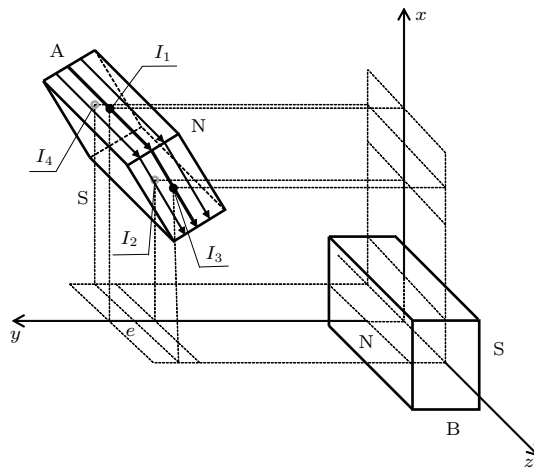


图 7 磁铁 A 表面磁化电流在坐标系中的位置
Fig. 7. The positions of magnetizing currents on the surface of magnet A in the coordinate system.

由于系统中两磁铁相斥摆放, 因此当悬臂梁处于水平中心轴位置时, 磁铁 A 的磁化强度方向与磁铁 B 相反, $M_A = -M_A \hat{y}$. 同理, 由于均匀磁化, 磁铁 A 内部磁化电流体密度为零, 其各表面磁化电流面密度为

$$\mathbf{K}_{mA} = \mathbf{M}_A \times \hat{\mathbf{n}} = \begin{cases} M_A \hat{z} & (\text{上表面}) \\ -M_A \hat{z} & (\text{下表面}) \\ 0 & (\text{左侧面}) \\ 0 & (\text{右侧面}) \\ -M_A \hat{x} & (\text{前表面}) \\ M_A \hat{x} & (\text{后表面}) \end{cases} \quad (22)$$

磁铁A表面磁化电流在外部磁铁B产生的磁场中所受的安培力为^[24]

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= - \iiint_V \mathbf{J}_{mA} \times \mathbf{B} dv - \iint_S \mathbf{K}_{mA} \times \mathbf{B} ds \\ &= - \iint_S \mathbf{K}_{mA} \times \mathbf{B} ds. \end{aligned} \quad (23)$$

因此将(17), (18), (19)式和(22)式代入(23)式中可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) &= \left[-S_1 M_A B_j \left(x + \frac{h_A}{2} \cos \varphi, d + \frac{l_A}{2} + \frac{l_B}{2} + q + \frac{h_A}{2} \sin \phi, 0 \right) \right. \\ &\quad + S_1 M_A B_j \left(x - \frac{h_A}{2} \cos \varphi, d + \frac{l_A}{2} + \frac{l_B}{2} + q - \frac{h_A}{2} \sin \varphi, 0 \right) \\ &\quad - S_2 M_A \sin \varphi B_k \left(x, d + \frac{l_A}{2} + \frac{l_B}{2} + q, \frac{w_A}{2} \right) + S_2 M_A \sin \varphi B_k \left(x, d + \frac{l_A}{2} + \frac{l_B}{2} + q, -\frac{w_A}{2} \right) \Big] \mathbf{i} \\ &\quad + \left[S_1 M_A B_i \left(x + \frac{h_A}{2} \cos \varphi, d + \frac{l_A}{2} + \frac{l_B}{2} + q + \frac{h_A}{2} \sin \varphi, 0 \right) \right. \\ &\quad - S_1 M_A B_i \left(x - \frac{h_A}{2} \cos \varphi, d + \frac{l_A}{2} + \frac{l_B}{2} + q - \frac{h_A}{2} \sin \varphi, 0 \right) \\ &\quad \left. + S_2 M_A \cos \varphi B_k \left(x, d + \frac{l_A}{2} + \frac{l_B}{2} + q, \frac{w_A}{2} \right) - S_2 M_A \cos \varphi B_k \left(x, d + \frac{l_A}{2} + \frac{l_B}{2} + q, -\frac{w_A}{2} \right) \right] \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $S_1 = l_A w_A$ 为磁铁A上、下表面面积, $S_2 = l_A h_A$ 为磁铁A前、后表面面积.

4 数值模拟

取磁铁间距 $d = 3 \text{ mm}$, 其余参数见表1, 对(24)式进行数值模拟, 分别得到(竖直)纵向磁力 F_i 和(水平)轴向磁力 F_j 与悬臂梁末端磁铁竖直纵向位移(即不同位置)的关系, 如图8所示. 当悬臂梁末端磁铁A离开水平 y 轴在 $x-y$ 平面内沿图3轨迹移动时, 其所受到的轴向磁斥力会从最大值急剧减小而出现负值, 表明悬臂梁末端磁铁受到的轴向磁力由磁斥力变为磁引力, 之后随着纵向位移的增大逐渐趋近于零; 对于磁铁A受到的纵向磁力, 随着磁铁纵向位移的增大, 纵向磁力表现为磁斥力先增大然后减小, 并且随着纵向位移的继续增大也变为负值, 表明纵向磁力由磁斥力最终也变为磁引力.

受排斥力的末端磁铁A随竖直纵向位移的增大出现磁力变为吸引的现象, 可用图9磁感线走向变化加以解释. 两磁铁处于水平位置时, 如图9(a), 其磁感线相互背离排斥. 当末端磁铁A偏离水平 y 轴较大位置时, 由于悬臂梁的弯曲和磁铁偏转角度

的存在, 使得末端磁铁A与外部磁铁B的磁极指向及其磁感线走向变化成为如图9(b)的形式, 形成了表面磁感线相互接受吸引状态, 因此末端磁铁A所受磁力会发生由磁斥力到磁吸引力的转变. 之前的研究中, 对悬臂梁系统磁力的分析大都只局限在末端磁铁的小范围位移, 很少考虑其磁力方向的改变. 而实际应用中, 当双稳压电悬臂梁振动达到较大位移时, 磁引力的存在会减小系统势函数的势阱间宽度(即系统两个平衡点的距离), 进而使系统输出位移响应变小并降低能量采集效果.

表1 双稳能量采集系统参数

Table 1. Parameters of bi-stable energy harvesting system.

几何参数	数值
l_b/m	44×10^{-3}
$l_A, l_B/\text{m}$	3.3×10^{-3}
$w_A, w_B/\text{m}$	13×10^{-3}
$h_A, h_B/\text{m}$	6.5×10^{-3}
$\mu/\text{N} \cdot \text{A}^{-2}$	$4\pi \times 10^7$
$M_A \cdot \text{m}^{-1}$	1.02×10^6

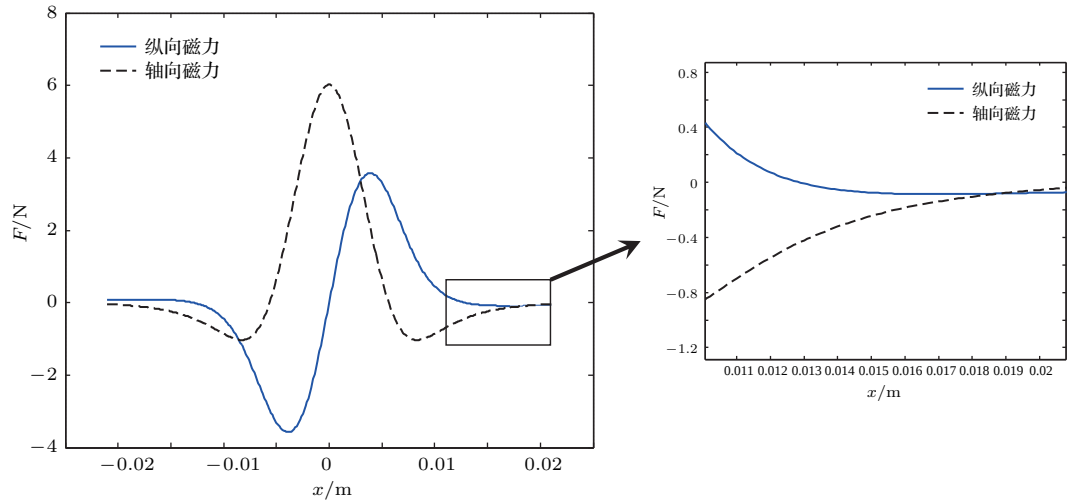

 图8 悬臂梁末端磁铁受到的纵向磁力和轴向磁力随磁铁位置的变化关系 ($d = 3 \text{ mm}$)

Fig. 8. The lateral and axial magnetic force acted on the magnet at the end of cantilever beam varying with positions ($d = 3 \text{ mm}$).

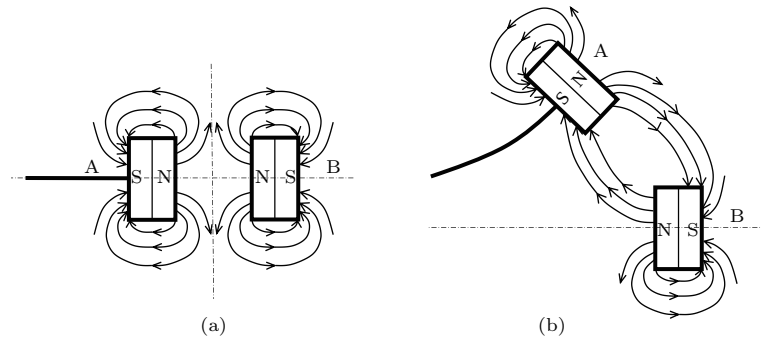


图9 系统磁感线走向 (a) 磁铁 A 处于水平位置; (b) 磁铁 A 处于大位移位置

Fig. 9. Schematic diagram of magnetic induction lines: (a) Magnet A at horizontal; (b) magnet A at a large displacement.

由 (24) 式可得末端磁铁 A 受到的磁力合力大小为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (25)$$

其随悬臂梁末端磁铁纵向位移的变化如图 10 所示, 参数取值同上, 其中 F_x , F_y 分别表示纵向磁力与轴向磁力的大小. 磁力合力的方向与水平轴夹角为

$$\gamma = \begin{cases} \left(\frac{180}{\pi} \arccos \frac{F_y}{F} \right)^\circ & x \geq 0, \\ -\left(\frac{180}{\pi} \arccos \frac{F_y}{F} \right)^\circ & x \leq 0. \end{cases} \quad (26)$$

为了进一步理解磁力合力的变化规律, 以末端磁铁 A 为中心建立极坐标系, 其合力矢量 $\mathbf{F}$ 随磁铁位置变化如图 11 所示, 其中红色曲线表示合力大小随末端磁铁纵向位移的变化, 指向红色曲线的黑色箭头是任取若干位置合力的方向. 可以看出, 当

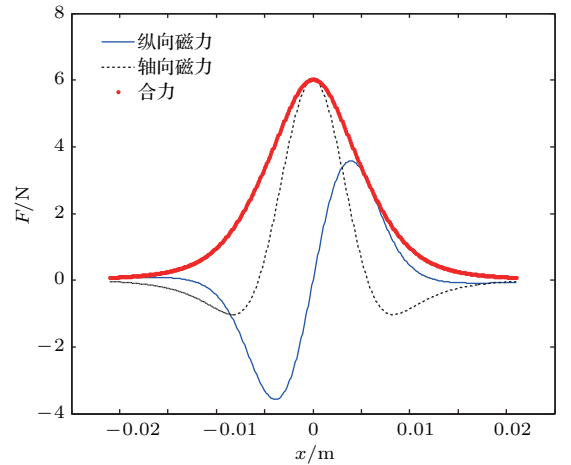

 图10 (网刊彩色) 悬臂梁末端磁铁受到的纵向、轴向分力与合力大小随位置的变化 ($d = 3 \text{ mm}$)

Fig. 10. (color online) The lateral, axial and resultant magnetic force acted on the magnet at the end of cantilever beam varying with positions ($d = 3 \text{ mm}$).

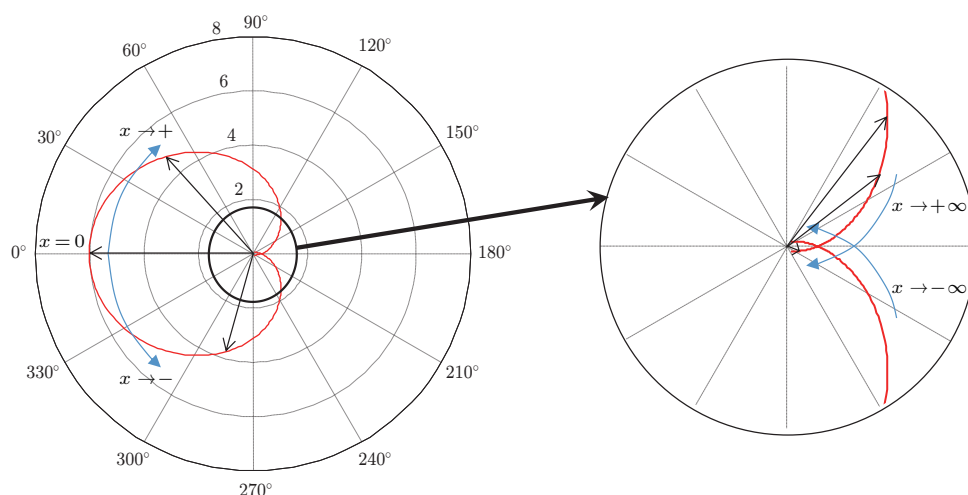


图 11 (网刊彩色) 末端磁铁的磁力合力随竖直位移变化规律示意图

Fig. 11. (color online) Schematic diagram of the resultant magnetic force acted on the magnet at the end of cantilever beam varying with vertical displacement in a polar coordinate system.

悬臂梁末端磁铁的位置由水平中心轴 y 逐渐向 x 轴正向远离时, 由于磁铁间距变大, 磁力的大小随之变小. 而磁力的方向也经历从第一象限到第二象限再到第三象限的变化 (此处“象限”按角度划分, 与传统直角坐标系定义不同, 0° — 90° 为第一象限, 依次类推). 当水平轴向磁力与竖直纵向磁力都为磁斥力时, 合力位于第一象限; 当轴向磁力为吸引力, 而纵向磁力为斥力时, 合力在第二象限; 随着悬臂梁挠度和磁铁偏转角度增大, 当纵向磁力和轴向磁力都为吸引力时, 合力位于第三象限; 随后, 随着磁铁位移继续增大, 合力于第三象限趋于零点. 悬臂梁末端磁铁向 x 轴负向远离情况容易理解, 这里不再赘述.

5 实验分析

本文根据表 1 的参数制作了双稳压电悬臂梁能量采集系统, 利用激光位移传感器、测力计等测量设备搭建了磁力测量实验系统, 如图 12 所示. 悬臂梁采用锡钢基体, 在靠近根部位置贴有压电片 (PZT-5 A), 悬臂梁自由端磁铁 A 型号为 N38 M, 与之相同的另一块磁铁固定在推拉式测力计 (HF-5) 上, 两磁铁同极相对摆放. 改变外部磁铁在测力计上的固定方式和装配位置, 可实现不同方向 (轴向、纵向) 力的大小的测量. 调节末端磁铁竖直方向的不同位置, 其相应的位移和磁力大小可分别由激光位移传感器 (LK-G5001 V) 和测力计测量读出.

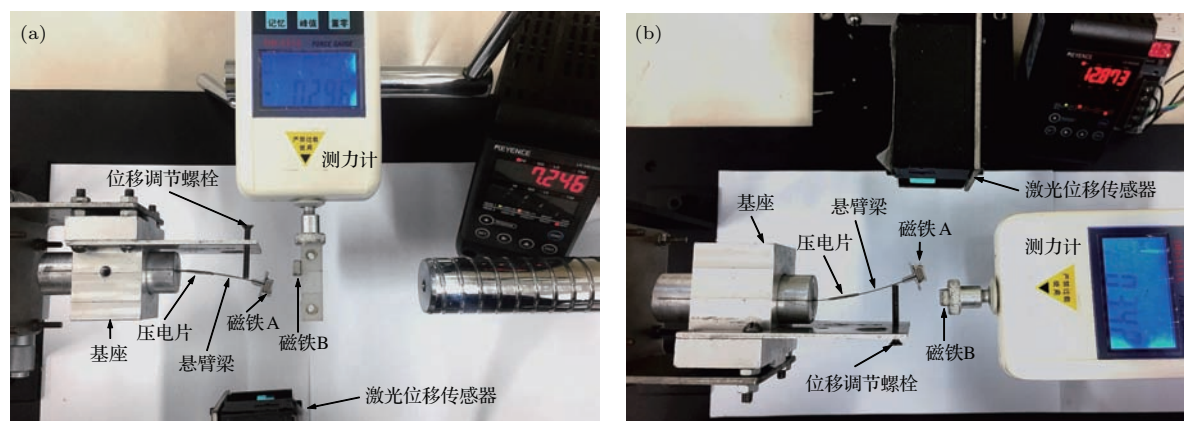


图 12 (网刊彩色) 双稳压电悬臂梁磁力测量系统 (a) 纵向磁力测量; (b) 轴向磁力测量

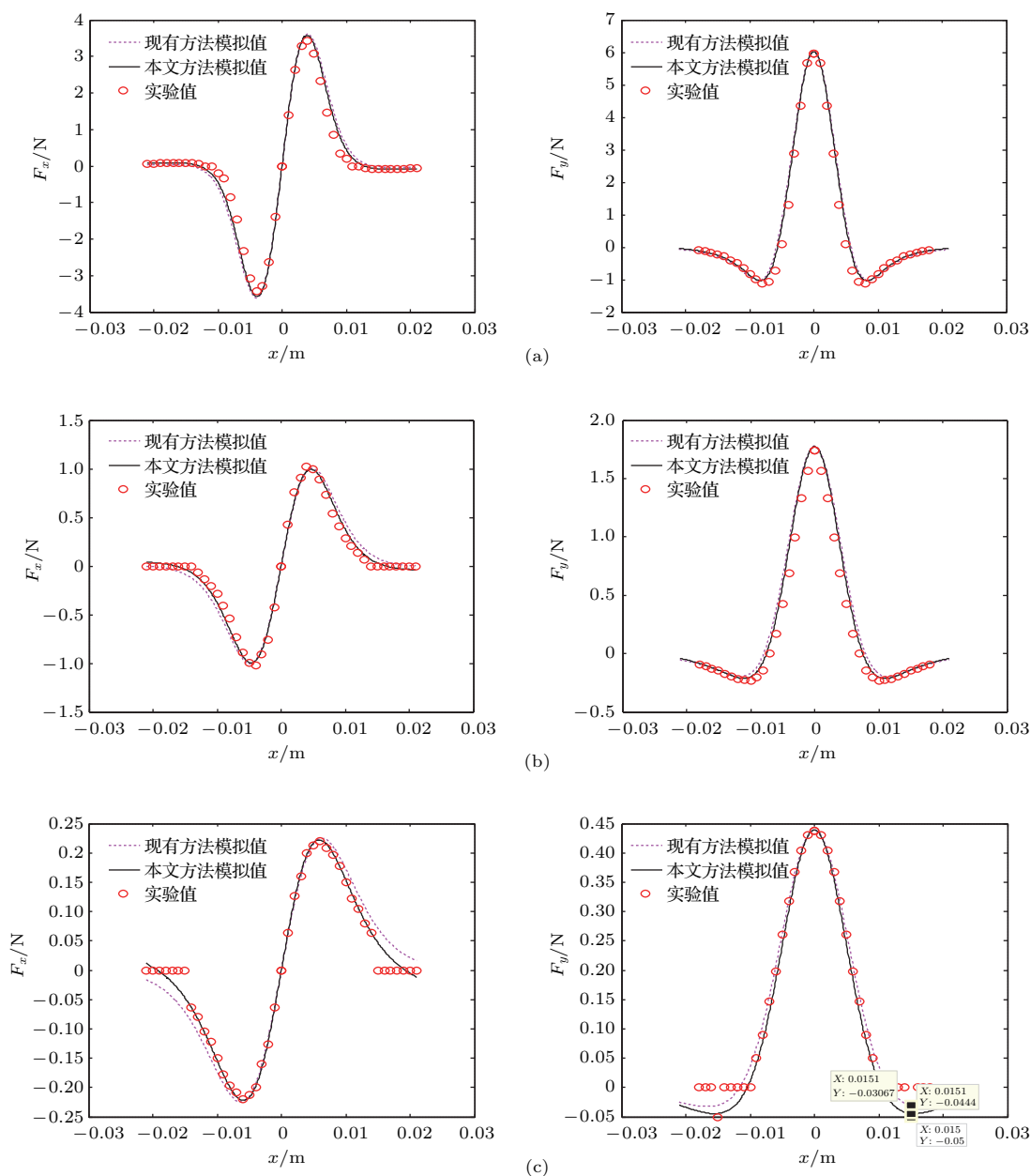
Fig. 12. (color online) Bi-stable piezoelectric cantilever beam magnetic force measurement system: (a) Lateral magnetic force measurement system; (b) axial magnetic force measurement system.

5.1 实验与模拟对比

依次由小到大任意选取几个不等的磁铁间距 d : 3, 7, 13, 16, 20 mm, 实验测量悬臂梁末端磁铁不同竖直位移的磁铁受力, 并与模拟结果对比分析, 如图 13 所示, 左图为纵向磁力, 右图为轴向磁力, 图中圆圈点为实验结果, 实线为本文方法模拟结果, 虚线为现有方法模拟结果. 由于实验中选用测力计零点漂移误差为 0.05 N, 无法测量读数小于 0.05 N 的磁力, 因此图中小于 0.05 N 的磁力只能用

零值点表示. 当磁铁间距超过 20 mm 后, 由于磁力均小于 0.05 N, 因此 $d = 20$ mm 为“本实验中”末端磁铁能否受到磁力影响的临界间距值, 也是本实验系统能够测量到磁力的最大磁铁间距.

从图 13 磁力的实验测量与模拟结果比较可以看出, 除了小于 0.05 N 的磁力模拟曲线无法与实验数据点匹配外, 其余不同磁铁间距和大于等于 0.05 N 的磁力模拟曲线几乎都与实验数据点匹配重合.



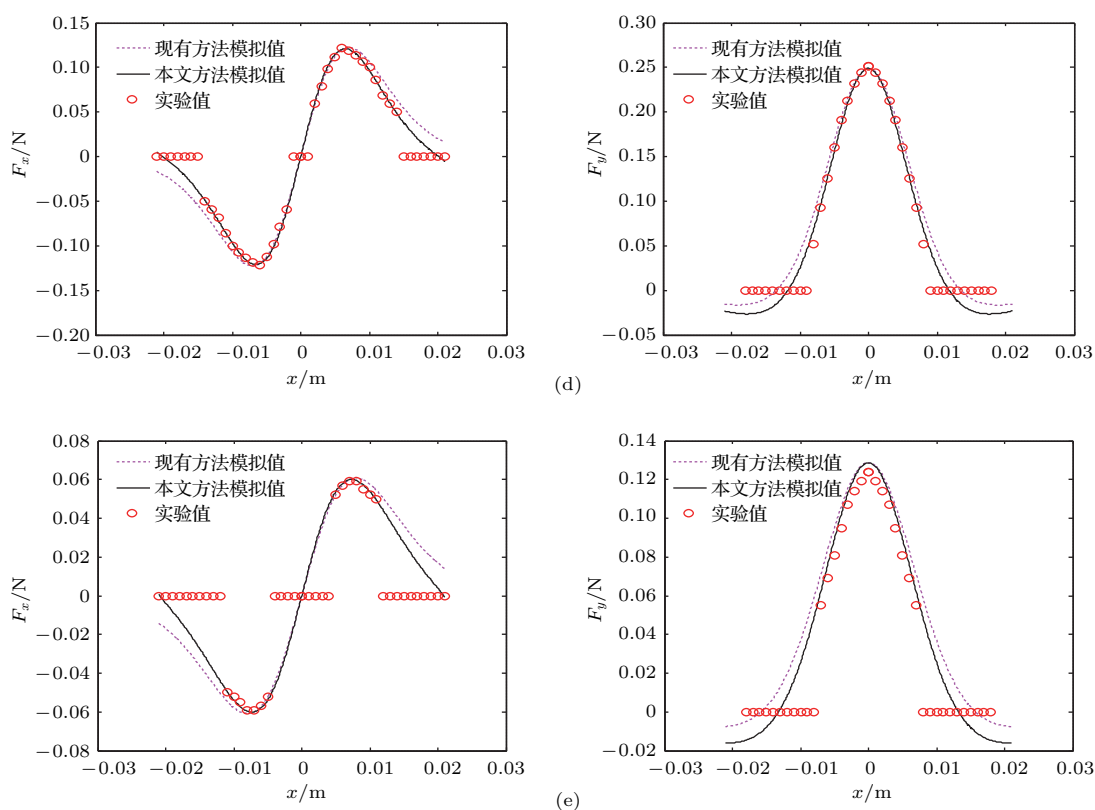


图 13 (网刊彩色) 不同磁铁间距时磁力实验值与本文方法、现有方法模拟值的对比 (a) $d = 3$ mm; (b) $d = 7$ mm; (c) $d = 13$ mm; (d) $d = 16$ mm; (e) $d = 20$ mm

Fig. 13. (color online) Comparison between experimental and simulation results from new and former calculation methods as different distances between two magnets: (a) $d = 3$ mm; (b) $d = 7$ mm; (c) $d = 13$ mm; (d) $d = 16$ mm; (e) $d = 20$ mm.

5.2 与现有方法的比较

在现有文献[13]的磁化电流法磁力分析研究中, 3.1节中的悬臂梁末端偏角被近似为 $\sin \phi \approx x/l_b$, 悬臂梁水平位移被简化为 $l_b - x \approx l_b(1 - \cos \phi)$ [13], 与本文(10)和(11)式的计算结果比较可知, 其近似计算的偏角与实际中真实的偏角误差较大, 进而影响到水平位移计算的准确度, 其模拟结果如图13中虚线所示. 而本文从悬臂梁形状函数整体曲率考虑, 通过积分累积可以更为精确地计算悬臂梁末端磁铁的位置与姿态. 为了定量分析本文方法的精度以及与现有方法比较, 取实验能够测量到的且模拟值与实验值误差最大的点, 如图13(c)右图轴向磁力最大偏离点, 分别计算得到本文方法和现有方法的磁力的最大相对误差为

$$\frac{0.05 - 0.0444}{0.05} \times 100\% = 11.2\%$$

和

$$\frac{0.05 - 0.03067}{0.05} \times 100\% = 38.66\%,$$

显然在最大误差点处, 本文方法与现有方法相比, 最大相对误差从38.66%减小到11.2%, 表明本文

磁力分析与计算方法的精确性和准确性有很大的提升.

从图13还可以看出, 现有方法对于悬臂梁在水平位置附近小幅度振动时, 其磁力计算可以保持较高的精度, 但是当振动激励强度增大引起悬臂梁末端磁铁产生较大位移以及较大磁铁偏转角度时, 现有文献中的磁力计算存在一定的误差. 因此磁铁偏转角度及其水平轴向位移的精确计算, 对于悬臂梁振动过程磁力的准确预测估计有着重要的意义.

6 结 论

本文以双稳压电悬臂梁能量采集系统为研究对象, 采用形状函数分析方法, 精确地给出了悬臂梁振动过程中其自由末端位置的轨迹及其末端磁铁精确的位置与姿态, 由此根据磁化电流理论揭示了竖直纵向磁力和水平轴向磁力以及磁力合力随悬臂梁末端位置的变化规律. 数值模拟发现, 当悬臂梁自由末端磁铁达到一定位移时, 由于磁铁存在较大的偏转角度和水平轴向位移, 导致磁力的正负性(排斥、吸引)会发生逆转, 从而末端磁铁的磁力

合力的方向会发生跨越两个象限的大幅度变化, 因此双稳压电悬臂梁能量采集系统的势函数及其动力学特性会发生变化. 磁力测量的实验结果表明, 磁力模拟曲线与实验数据点高度匹配重合, 证明本文给出的磁力分析与计算方法比已有的改进磁力计算方法具有更高的精度, 可以有效预测估计双稳压电悬臂梁振动过程的磁力变化.

附录 A

正文中已提到毕奥-萨伐尔定律, 简称“毕-萨定律”, 其描述电流元在空间任意点 P 处所激发的磁场. 用方程表示为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (\text{A1})$$

建立如图 A1 中坐标系, 如图所示为一条沿 z 轴负向电流在任意点 P 处所产生的磁场, 其中 $\mathbf{r}$ 为电流元 $d\mathbf{L}$ 到 P 点的向量, $\mathbf{L}$ 为坐标原点到电流元 $d\mathbf{L}$ 的向量, I 为电流大小, μ_0 为真空磁导率, $\mathbf{B}$ 为 P 点的磁感应强度. 图中 $\mathbf{R}$ 表示坐标原点到 P 点的向量.

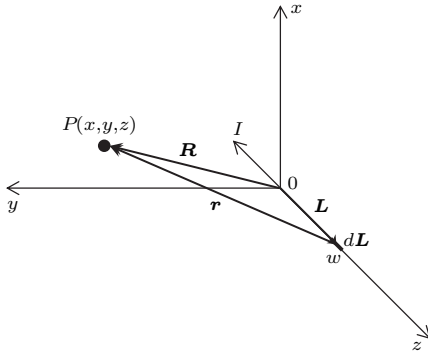


图 A1 电流产生磁场坐标系

Fig. A1. Coordinate system of magnetic field produced by a current.

由图 A1 可知:

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{L} = w\mathbf{k}, \quad d\mathbf{L} = -dw\mathbf{k}, \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{L} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-w)\mathbf{k}, \quad (\text{A4})$$

$$d\mathbf{L} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -dw \\ x & y & z-w \end{vmatrix} = ydw\mathbf{i} - xdw\mathbf{j}, \quad (\text{A5})$$

$$r^3 = [x^2 + y^2 + (z-w)^2]^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{A6})$$

且正文中已知表面电流面密度 $|\mathbf{K}_{\text{mB}}| = M_{\text{B}}$, 因此得

$$I = l_{\text{B}} \int_{\text{L}} K_{\text{mB}}. \quad (\text{A7})$$

将 (A5)–(A7) 式代入 (A1) 式得:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 M_{\text{B}} l_{\text{B}}}{4\pi} \int_{-\frac{w_{\text{B}}}{2}}^{\frac{w_{\text{B}}}{2}} \left(\frac{ydw\mathbf{i} - xdw\mathbf{j}}{[x^2 + y^2 + (z-w)^2]^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (\text{A8})$$

正文图 5 中, 对于磁铁 B 上、下、前、后表面电流激发的磁场, 其分别表示为磁感应强度 $\mathbf{B}_{\text{u}}$, $\mathbf{B}_{\text{d}}$, $\mathbf{B}_{\text{f}}$ 和 $\mathbf{B}_{\text{b}}$, 上下移动坐标系, 通过坐标变换可得上、下表面电流产生的磁感应强度:

$$\mathbf{B}_{\text{u}} = \frac{\mu_0 M_{\text{B}} l_{\text{B}}}{4\pi} \times \int_{-\frac{w_{\text{B}}}{2}}^{\frac{w_{\text{B}}}{2}} \left(\frac{ydw\mathbf{i} - \left(x - \frac{h_{\text{B}}}{2}\right)dw\mathbf{j}}{\left[\left(x - \frac{h_{\text{B}}}{2}\right)^2 + y^2 + (z-w)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (\text{A9})$$

$$\mathbf{B}_{\text{d}} = \frac{\mu_0 M_{\text{B}} l_{\text{B}}}{4\pi} \times \int_{-\frac{w_{\text{B}}}{2}}^{\frac{w_{\text{B}}}{2}} \left(\frac{-ydw\mathbf{i} + \left(x + \frac{h_{\text{B}}}{2}\right)dw\mathbf{j}}{\left[\left(x + \frac{h_{\text{B}}}{2}\right)^2 + y^2 + (z-w)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (\text{A10})$$

同理, 可得前、后表面磁化电流产生的磁感应强度, 其电流方向沿 x 轴, 令 $\mathbf{L} = h\mathbf{i}$, 通过坐标变换得:

$$\mathbf{B}_{\text{f}} = \frac{\mu_0 M_{\text{B}} l_{\text{B}}}{4\pi} \times \int_{-\frac{h_{\text{B}}}{2}}^{\frac{h_{\text{B}}}{2}} \left(\frac{-\left(z - \frac{w_{\text{B}}}{2}\right)dh\mathbf{j} + ydh\mathbf{k}}{\left[\left(x-h\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{w_{\text{B}}}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (\text{A11})$$

$$\mathbf{B}_{\text{b}} = \frac{\mu_0 M_{\text{B}} l_{\text{B}}}{4\pi} \times \int_{-\frac{h_{\text{B}}}{2}}^{\frac{h_{\text{B}}}{2}} \left(\frac{\left(z + \frac{w_{\text{B}}}{2}\right)dh\mathbf{j} - ydh\mathbf{k}}{\left[\left(x-h\right)^2 + y^2 + \left(z + \frac{w_{\text{B}}}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (\text{A12})$$

根据 (A9)–(A12) 式得 $B_i(x, y, z), B_j(x, y, z), B_k(x, y, z)$.

参考文献

- [1] Roundy S J 2003 *Ph. D. Dissertation* (Berkeley: University of California, Berkeley)
- [2] Sun J, Li Y G, Liu J Q, Yang C S, He D N 2009 *Micro-nanoelectr. Technol.* **46** 673 (in Chinese) [孙健, 李以贵, 刘景全, 杨春生, 何丹农 2009 微纳电子技术 **46** 673]
- [3] Gao Y J, Leng Y G, Fan S B, Lai Z H 2014 *Smart Mater. Struct.* **23** 095003
- [4] Wang Q, Luo Y, Gu J Z 2008 *Electr. Compon. Mater.* **27** 47 (in Chinese) [王强, 骆英, 顾建祖 2008 电子元件与材料 **27** 47]
- [5] Cottone F, Vocca H, Gammaitoni L 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 080601
- [6] Andò B, Baglio S, Trigona C, Dumas N, Latorre L, Nouet P 2010 *J. Micromech. Microeng.* **20** 125020
- [7] Stanton S C, McGehee C C, Mann B P 2010 *Physica D* **239** 640

- [8] Fan K Q, Xu C H, Wang W D, Fang Y 2014 *Chin. Phys. B* **23** 084501
- [9] Yung K W, Landecker P B, Villani D D 1998 *Magn. Electric. Separat.* **9** 39
- [10] Neubauer M, Twiefel J, Westermann H, Wallaschek J 2012 *Small-Scale Energy Harvesting* (Rijeka: InTech) p303
- [11] Tang L H, Yang Y W 2012 *Appl. Phys. Lett.* **101** 094102
- [12] Akoun G, Yonnet J P 1984 *IEEE Trans. Magn.* **20** 1962
- [13] Tan D, Leng Y G, Fan S B, Gao Y J 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 060502 (in Chinese) [谭丹, 冷永刚, 范胜波, 高毓璣 2015 物理学报 **64** 060502]
- [14] Lin J T, Lee B, Alphenaar B 2010 *Smart Mater. Struct.* **19** 126
- [15] Chen Z S, Yang Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 074301 (in Chinese) [陈仲生, 杨拥民 2011 物理学报 **60** 074301]
- [16] Ferrari M, Baù M, Guizzetti M, Ferrari V 2011 *Sens. Actuators A* **172** 287
- [17] Zhou S, Cao J, Erturk A, J Lin 2013 *Appl. Phys. Lett.* **102** 101301
- [18] Friswell M I, Ali S F, Adhikari S, Lees A W, Bilgen O, Adhikari S, Litak G 2012 *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* **23** 1505
- [19] Esmailzadeh E, Nakhaie-Jazar G 1998 *Int. J. Non-Linear Mech.* **33** 567
- [20] Ali S F, Padhi R 2009 *P. I. Mech. Eng. I-J. Sys. Contr. Eng.* **223** 657
- [21] Nayfeh A H, Pai P F 2007 *Linear and Nonlinear Structural Mechanics* (Hoboken: Wiley) pp65–110
- [22] Agashe J S, Arnold D P 2008 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **41** 1586
- [23] Bobbio S, Delfino F, Girdinio P, Molino P 2000 *IEEE Trans. Magn.* **36** 663
- [24] Furlani E P, Reznik S, Kroll A 1995 *IEEE Trans. Magn.* **31** 844

Accurate analysis of magnetic force of bi-stable cantilever vibration energy harvesting system with the theory of magnetizing current^{*}

Zhang Yu-Yang Leng Yong-Gang[†] Tan Dan Liu Jin-Jun Fan Sheng-Bo

(School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

(Received 22 March 2017; revised manuscript received 21 August 2017)

Abstract

In the study of piezoelectric cantilever energy harvesting system, a bi-stable nonlinear cantilever with magnets added to the structure has a wider frequency band response and a higher energy output efficiency. Hence, the calculation accuracy of the magnetic force on which the potential function and dynamics of the system depend is essential to predicting the output response and energy harvesting effect. In this work, we use a shape function to describe the relation between the deflections of an arbitrary point and the free-end point on the beam, and then calculate the trace and deflection angle of the beam's free-end by integrating the entire slope of the cantilever beam. The magnetic force is consequently derived from the magnets' real-time relative positions and postures by using the magnetizing current method. With comprehensively considering the axial magnetic force and the lateral magnetic force, the simulation results demonstrate that when the displacement of the magnet at the end of the beam is large enough, the directions of axial and lateral magnetic force change from repulsive to attractive, which leads to a large veer of the resultant magnetic force across two quadrants. So, it means that a smaller interval between magnets may not cause a larger deflection of the beam, and the magnetic force existing as attractive force could diminish the well space of potential function (that is, the distance between two equilibrium positions of the system). The experimental data in this work are nicely consistent with the simulation results. And in this work, we also make a comparison of the simulation results with those from our method and existing method, showing that the accuracy of the proposed method is much higher than that from the existing calculation method, especially in the scenario where the magnet at the end of the beam is far from the horizontal axis.

Keywords: vibration energy harvesting, bi-stable cantilever system, calculation of magnetic force, magnetizing current

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.66.220502

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51675370) and Tianjin Research Program of Application Foundation and Advanced Technology, China (Grant No. 15JCZDJC32200).

[†] Corresponding author. E-mail: leng_yg@tju.edu.cn