

耦合含时滞的相互依存网络的局部自适应异质同步

王宇娟 涂俐兰 宋帅 李宽洋

Local adaptive heterogeneous synchronization for interdependent networks with delayed coupling

Wang Yu-Juan Tu Li-Lan Song Shuai Li Kuan-Yang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 050504 (2018) DOI: 10.7498/aps.20171927

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.20171927>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I5>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于状态观测器的分数阶时滞混沌系统同步研究](#)

Chaotic system synchronization of state-observer-based fractional-order time-delay

物理学报.2017, 66(16): 160501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.160501>

[一类分数阶混沌系统的自适应同步](#)

Adaptive synchronization of a class of fractional-order chaotic systems

物理学报.2012, 61(16): 160506 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.160506>

[一类不确定复杂网络的滑模追踪同步](#)

Sliding mode tracking synchronization of an uncertain complex network

物理学报.2012, 61(16): 160507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.160507>

[一种异结构分数阶混沌系统投影同步的新方法](#)

A new method for projective synchronization of different fractional order chaotic systems

物理学报.2012, 61(16): 160510 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.160510>

[时空混沌系统参量辨识律的设计与投影同步研究](#)

Design of parameter identification law and studies on projective synchronization of spatiotemporal chaotic system

物理学报.2012, 61(15): 150507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.150507>

耦合含时滞的相互依存网络的局部自适应异质同步*

王宇娟 涂俐兰[†] 宋帅 李宽洋

(武汉科技大学理学院, 武汉 430065)

(2017年8月30日收到; 2017年11月4日收到修改稿)

针对由两个子网络构成的耦合含时滞的相互依存网络, 研究其局部自适应异质同步问题. 时滞同时存在于两个子网络的内部耦合项和子网络间的一对一相互依赖耦合项中, 且网络的耦合关系满足非线性特性和光滑性. 基于李雅普诺夫稳定性理论、线性矩阵不等式方法和自适应控制技术, 通过对子网络设置合适的控制器, 提出了使得相互依存网络的子网络分别同步到异质孤立系统的充分条件. 针对小世界网络和无标度网络构成的相互依存网络进行数值模拟, 验证了提出理论的正确性和有效性.

关键词: 时滞相互依存网络, 线性矩阵不等式, 李雅普诺夫稳定性理论, 自适应异质同步

PACS: 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.67.20171927

1 引言

自20世纪末起, 复杂网络一直是科学界的热点研究领域, 取得了一系列研究成果, 但是, 很多成果仅仅适用于被视为孤立系统的单个网络^[1]. 随着科技和社会的发展, 不同系统或网络之间的相互联系越来越紧密, 即网络间的耦合越来越强^[2]. 这使得某个网络中节点的故障可能引起其他网络中节点的崩溃, 反之亦然^[3]. 譬如: 交通系统中航空与铁路运输网络的复合; 计算机网络中物联网与无线传感器系统的相互支撑; 电力基础设施中变电供电系统与计算机网络的安全牵制; 现实生活中社会关系网和流行病传播网之间的互相影响; 投资与实业的合作演化等^[4-8]. 近年来, 国内外学者提出的相互依存网络能更好地刻画这种存在相互影响、相互依赖耦合作用的“网络的网络”, 已经成为当今复杂网络领域最前沿的重要研究方向之一^[9,10].

同步问题是复杂动力网络研究中一个有趣且有意义的问题. 最主要的原因是网络同步在各个科技领域都有许多应用, 譬如网络通信中的信息交换一致, 数值信号、模拟信号的同步转换等^[11-14]. 过去的20年里, 复杂网络的各种同步问题已经进行了深入探讨^[15-21], 并提出了各种同步方法, 如

聚类同步、相位同步、投影同步、广义同步、滞后同步等^[22-26]. 在复杂动力网络的行为分析中, 时滞扮演着非常重要的角色, 对时滞的研究不可避免. 研究表明, 时滞对复杂动力网络的行为有显著影响^[17-19,27,28]. 文献^[17-19]分别探讨了时滞对复杂网络同步的影响, 并提出了使网络达到同步的刻画指标; 对于时滞递归神经网络, 文献^[27]分析了一种新的基于加权时滞的稳定性判据; 文献^[28]通过引入新的时间变量使得网络的时滞变小, 从而提高网络的同步能力.

迄今为止, 科学界对复杂网络同步的研究主要限于单个复杂网络, 对“网络的网络”的研究还处于初级阶段, 特别是相互依存网络^[29-33]. 文献^[29]提出了一种基于脉冲相互作用的具有时滞的多重递归神经网络全局同步的新结果, 其中的脉冲相互作用是指一定的神经网络只在脉冲时刻相互通信, 而在剩余时间独立; 文献^[30]探讨了多层网络中多智能体系统的同步, 提出了加性耦合和马尔可夫开关耦合俘获两种数学模型的分层链接; 文献^[31]研究了自适应多层网络中的同步问题; 文献^[32]发现连接方式对两层网络的同步能力具有很大的影响, 为了获得良好的同步能力, 最有效的方法是连接度大的节点; 文献^[33]研究了相互依存网络的广义互

* 国家自然科学基金(批准号: 61473338, 61473213)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: tulilan@wust.edu.cn

同步.

单个网络上的动力学研究存在一定局限性,为了更好地反映实际网络的演化行为机理,将这些动力学行为放在相互依存网络中进行研究就显得尤为重要.基于此,本文深入地研究耦合含时滞的相互依存网络的局部自适应异质同步问题,并提出了新的局部自适应异质同步控制器和充分条件,创新点如下:1)考虑的网络不仅含有非线性、光滑的耦合函数,而且时滞同时出现在子网内和子网间的耦合项中,因此研究的相互依存网络较其他文献更具一般性;2)利用自适应控制和线性矩阵不等式(LMI)方法,从理论上提出了耦合时滞相互依存网络的局部自适应异质同步充分条件,这些条件简单易行.

2 预备知识

考虑由两个子网络构成的具有时滞的相互依存动力网络,节点数为 $N_1 = N_2 = N$,网络中每个节点都是一个 n 维系统,且子网络间是一对一相互依赖的关系,网络的状态方程可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i^k(t) = & \mathbf{f}^k[\mathbf{x}_i^k(t)] + d^k \sum_{j=1}^N a_{ij}^k \mathbf{H}[\mathbf{x}_j^k(t-\tau)] \\ & + \sum_{l=1}^2 c^{kl} \{ \mathbf{H}[\mathbf{x}_i^l(t-\tau)] - \mathbf{H}[\mathbf{x}_i^k(t-\tau)] \}, \\ & i = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{x}_i^k \in \mathbb{R}^n$ 是节点 i 的状态方程,下标 i 表示节点,上标 k 表示节点所在的子网络; $\mathbf{f}^k[\mathbf{x}_i^k(t)]: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是光滑的非线性向量函数; d^k 表示第 k 个网络的内部耦合强度; $\mathbf{H}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个光滑的连续非线性函数,代表子网内部和子网间的耦合函数; τ 是时滞. $\mathbf{A}^k = (a_{ij}^k) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是第 k 个子网络的耦合矩阵.如果节点 j 和节点 i 有一条连边,则 $a_{ij}^k = 1$, 否则 $a_{ij}^k = 0$.若 \mathbf{A}^k 满足

$$a_{ii}^k = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^k, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

则 $\mathbf{L}^k = -d^k \mathbf{A}^k$ 是一个拉普拉斯矩阵. c^{kl} 是子网络 k 对子网络 l 的耦合强度,代表了两个子网络对应节点间的相互依存关系.

假设 1 在本文中,总假设 $c^{12} = c^{21} = c$.

假设 2 设 $\mathbf{F}(t) = \mathbf{D}\mathbf{f}^1[\mathbf{s}^1(t)] = [\mathbf{f}_{ij}^1(t)]_{n \times n}$ 是函数 $\mathbf{f}^1[\mathbf{x}_i^1(t)]$ 在 $\mathbf{s}^1(t)$ 处的雅可比矩阵; 设 $\mathbf{F} = (f_{ij}^1)_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 其中 f_{ij}^1 是 $\mathbf{f}_{ij}^1(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) 的

最大值.再设 $\mathbf{G}(t) = \mathbf{D}\mathbf{f}^2[\mathbf{s}^2(t)] = [\mathbf{f}_{ij}^2(t)]_{n \times n}$ 是函数 $\mathbf{f}^2[\mathbf{x}_i^2(t)]$ 在 $\mathbf{s}^2(t)$ 处的雅可比矩阵; 设 $\mathbf{G} = (f_{ij}^2)_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 其中 f_{ij}^2 是 $\mathbf{f}_{ij}^2(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) 的最大值.

假设 3 设 $\mathbf{B}(t-\tau) = \mathbf{D}\mathbf{H}[\mathbf{s}^1(t-\tau)] = [\mathbf{b}_{ij}(t-\tau)]_{n \times n}$ 是函数 $\mathbf{H}[\mathbf{x}_i^1(t-\tau)]$ 在 $\mathbf{s}^1(t-\tau)$ 处的雅可比矩阵; 设 $\mathbf{D}(t-\tau) = \mathbf{D}\mathbf{H}[\mathbf{s}^2(t-\tau)] = [\mathbf{d}_{ij}(t-\tau)]_{n \times n}$ 是函数 $\mathbf{H}[\mathbf{x}_i^2(t-\tau)]$ 在 $\mathbf{s}^2(t-\tau)$ 处的雅可比矩阵; 再设 $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times n}$, $\mathbf{D} = (d_{ij})_{n \times n}$, 且 b_{ij} 和 d_{ij} 分别是 $\mathbf{b}_{ij}(t-\tau)$ 和 $\mathbf{d}_{ij}(t-\tau)$ ($t \in \mathbb{R}$) 的最大值.

注 1 在本文中, \mathbf{E} 代表适当维数的单位矩阵.

注 2 本文主要讨论(1)式网络在控制器 \mathbf{u}_i^k ($i = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2$) 的作用下达到局部自适应渐近异质同步问题,所以,若对(1)式网络施加控制器,可得其状态方程如下.

当 $k = 1$ 时,子网 1 可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i^1(t) = & \mathbf{f}^1[\mathbf{x}_i^1(t)] + d^1 \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{H}[\mathbf{x}_j^1(t-\tau)] \\ & + \sum_{l=1}^2 c^{1l} \{ \mathbf{H}[\mathbf{x}_i^l(t-\tau)] \\ & - \mathbf{H}[\mathbf{x}_i^1(t-\tau)] \} + \mathbf{u}_i^1. \end{aligned} \quad (3)$$

当 $k = 2$ 时,子网 2 可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i^2(t) = & \mathbf{f}^2[\mathbf{x}_i^2(t)] + d^2 \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \mathbf{H}[\mathbf{x}_j^2(t-\tau)] \\ & + \sum_{l=1}^2 c^{2l} \{ \mathbf{H}[\mathbf{x}_i^l(t-\tau)] \\ & - \mathbf{H}[\mathbf{x}_i^2(t-\tau)] \} + \mathbf{u}_i^2. \end{aligned} \quad (4)$$

定义 1 (渐近异质同步) 一般地,对于相互依存网络((1)式),若

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i^1(t) - \mathbf{s}^1(t)\| = 0 \text{ 且} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i^2(t) - \mathbf{s}^2(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (5)$$

则称(1)式网络达到渐近异质同步,其中 $\mathbf{s}^1(t) \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{s}^2(t) \in \mathbb{R}^n$ 分别为

$$\dot{\mathbf{s}}^1(t) = \mathbf{f}^1[\mathbf{x}_i^1(t)] \quad (6)$$

和

$$\dot{\mathbf{s}}^2(t) = \mathbf{f}^2[\mathbf{x}_i^2(t)] \quad (7)$$

这两个孤立节点系统的解.

同时,(6)式和(7)式系统分别可表示为

$$\dot{s}^1(t) = f^1[s^1(t)] + d^1 \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 H[s^1(t-\tau)] + \sum_{l=1}^2 c^{1l} \{H[s^l(t-\tau)] - H[s^1(t-\tau)]\}, \quad (8)$$

$$\dot{s}^2(t) = f^2[s^2(t)] + d^2 \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 H[s^2(t-\tau)] + \sum_{l=1}^2 c^{2l} \{H[s^l(t-\tau)] - H[s^2(t-\tau)]\}. \quad (9)$$

设 $e_i^1(t) = x_i^1(t) - s^1(t)$, $e_i^2(t) = x_i^2(t) - s^2(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, 根据 (3), (4), (8), (9) 式系统, 再利用线性化方法, 可得局部化后的误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_i^1(t) = F(t)e_i^1(t) + d^1 \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 B(t-\tau)e_j^1(t-\tau) + \sum_{l=1}^2 c^{1l} B(t-\tau)e_i^l(t-\tau) \\ \quad - \{c^{11} B(t-\tau)e_i^1(t-\tau) + c^{12} \{H[x_i^1(t-\tau)] - H[s^2(t-\tau)]\}\} + u_i^1, \\ \dot{e}_i^2(t) = G(t)e_i^2(t) + d^2 \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 D(t-\tau)e_j^2(t-\tau) + \sum_{l=1}^2 c^{2l} D(t-\tau)e_i^l(t-\tau) \\ \quad - \{c^{22} D(t-\tau)e_i^2(t-\tau) + c^{21} \{H[x_i^2(t-\tau)] - H[s^1(t-\tau)]\}\} + u_i^2. \end{cases} \quad (10)$$

引理 1 (Schur complement [34]) 假设 $Q(x) = Q^T(x)$, $R(x) = R^T(x)$ 和 $S(x)$ 都是 x 的矩阵函数, 则线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} < 0$$

等价于下列条件中的任何一个:

- 1) $R(x) < 0$, $Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) < 0$,
- 2) $Q(x) < 0$, $R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) < 0$.

引理 2 [35] 对于任意矩阵 $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 矩

阵不等式 $X^T Y + Y^T X \leq X^T A X + Y^T A^{-1} Y$ 成立, 其中 $A^T = A > 0$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

3 主要结果

根据上述假设, 提出相互依存网络 ((1) 式) 的局部自适应渐近异质同步的充分条件.

定理 1 当假设 2 和假设 3 成立时, 若存在两个对称正定矩阵 $P > 0$ 和 $Q > 0$, 两个正实数矩阵 $d_i^{1*} > 0$ 和 $d_i^{2*} > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} F^T P + P F & 0 & 0 & c P B & P B & 0 & 0 & 0 \\ +Q - 2d_i^{1*} P & & & & & & & \\ 0 & G^T P + P G & c P D & 0 & 0 & P D & 0 & 0 \\ +Q - 2d_i^{2*} P & & & & & & & \\ 0 & c D^T P & -Q & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ c B^T P & 0 & 0 & -Q & 0 & 0 & 0 & E \\ B^T P & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sum_{j=1}^N |a_{ij}^1|} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^T P & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sum_{j=1}^N |a_{ij}^2|} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sum_{j=1}^N |a_{ji}^1|} E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sum_{j=1}^N |a_{ji}^2|} E \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

成立, 则 (1) 式网络在控制器

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i^1 = c \{ \mathbf{H} [\mathbf{x}_i^1(t - \tau)] - \mathbf{H} [\mathbf{s}^2(t - \tau)] \} - \mathbf{d}_i^1 \mathbf{e}_i^1(t), \\ \mathbf{u}_i^2 = c \{ \mathbf{H} [\mathbf{x}_i^2(t - \tau)] - \mathbf{H} [\mathbf{s}^1(t - \tau)] \} - \mathbf{d}_i^2 \mathbf{e}_i^2(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

和自适应律

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{d}}_i^1 = \mathbf{k}_i^1 \mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^1(t), \\ \dot{\mathbf{d}}_i^2 = \mathbf{k}_i^2 \mathbf{e}_i^{2T}(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^2(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

的作用下达到自适应渐近异质同步, 其中 $\mathbf{k}_i^1 > 0$, $\mathbf{k}_i^2 > 0$ 为反馈增益.

证明 构造一个李雅普诺夫函数为

$$\begin{aligned} V(t) = & \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^1(t) + \mathbf{e}_i^{2T}(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^2(t) + \int_{t-\tau}^t \mathbf{e}_i^{1T}(\theta) \mathbf{Q} \mathbf{e}_i^1(\theta) d\theta + \int_{t-\tau}^t \mathbf{e}_i^{2T}(\theta) \mathbf{Q} \mathbf{e}_i^2(\theta) d\theta \right] \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{(\mathbf{d}_i^1 - \mathbf{d}_i^{1*})^2}{\mathbf{k}_i^1} + \sum_{i=1}^N \frac{(\mathbf{d}_i^2 - \mathbf{d}_i^{2*})^2}{\mathbf{k}_i^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中 \mathbf{d}_i^{k*} 是 \mathbf{d}_i^k 的近似值, 则 $V(t)$ 在控制器 ((12) 式) 和自适应律 ((13) 式) 的作用下, 关于误差系统 ((10) 式) 的导数有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^N \left[\dot{\mathbf{e}}_i^{1T}(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^1(t) + \mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}}_i^1(t) + \dot{\mathbf{e}}_i^{2T}(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^2(t) + \mathbf{e}_i^{2T}(t) \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}}_i^2(t) + \mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{Q} \mathbf{e}_i^1(t) \right. \\ & - \mathbf{e}_i^{1T}(t - \tau) \mathbf{Q} \mathbf{e}_i^1(t - \tau) + \mathbf{e}_i^{2T}(t) \mathbf{Q} \mathbf{e}_i^2(t) - \mathbf{e}_i^{2T}(t - \tau) \mathbf{Q} \mathbf{e}_i^2(t - \tau) + 2(\mathbf{d}_i^1 - \mathbf{d}_i^{1*}) \mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^1(t) \\ & \left. + 2(\mathbf{d}_i^2 - \mathbf{d}_i^{2*}) \mathbf{e}_i^{2T}(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^2(t) \right] \\ = & \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{F}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^1(t) + d^1 \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{e}_j^{1T}(t - \tau) \mathbf{B}^T(t - \tau) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^1(t) + c \mathbf{e}_i^{2T}(t - \tau) \mathbf{B}^T(t - \tau) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^1(t) \right. \\ & + \mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{P} \mathbf{F}(t) \mathbf{e}_i^1(t) + d^1 \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{P} \mathbf{B}(t - \tau) \mathbf{e}_j^1(t - \tau) + c \mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{P} \mathbf{B}(t - \tau) \mathbf{e}_i^2(t - \tau) \\ & + \mathbf{e}_i^{2T}(t) \mathbf{G}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^2(t) + d^2 \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \mathbf{e}_j^{2T}(t - \tau) \mathbf{D}^T(t - \tau) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^2(t) + c \mathbf{e}_i^{1T}(t - \tau) \mathbf{D}^T(t - \tau) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^2(t) \\ & + \mathbf{e}_i^{2T}(t) \mathbf{P} \mathbf{G}(t) \mathbf{e}_i^2(t) + d^2 \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \mathbf{e}_i^{2T}(t) \mathbf{P} \mathbf{D}(t - \tau) \mathbf{e}_j^2(t - \tau) + c \mathbf{e}_i^{2T}(t) \mathbf{P} \mathbf{D}(t - \tau) \mathbf{e}_i^1(t - \tau) \\ & + \mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{Q} \mathbf{e}_i^1(t) - \mathbf{e}_i^{1T}(t - \tau) \mathbf{Q} \mathbf{e}_i^1(t - \tau) + \mathbf{e}_i^{2T}(t) \mathbf{Q} \mathbf{e}_i^2(t) - \mathbf{e}_i^{2T}(t - \tau) \mathbf{Q} \mathbf{e}_i^2(t - \tau) \\ & \left. - 2\mathbf{d}_i^{1*} \mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^1(t) - 2\mathbf{d}_i^{2*} \mathbf{e}_i^{2T}(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^2(t) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

由引理 2, 有

$$\begin{aligned} & d^1 \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{e}_j^{1T}(t - \tau) \mathbf{B}^T(t - \tau) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^1(t) + d^1 \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{P} \mathbf{B}(t - \tau) \mathbf{e}_j^1(t - \tau) \\ = & d^1 \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 [\mathbf{e}_j^{1T}(t - \tau) \mathbf{B}^T(t - \tau) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^1(t) + \mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{P} \mathbf{B}(t - \tau) \mathbf{e}_j^1(t - \tau)] \\ \leq & d^1 \sum_{j=1}^N |a_{ij}^1| [\mathbf{e}_j^{1T}(t - \tau) \mathbf{E} \mathbf{e}_j^1(t - \tau) + \mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{P} \mathbf{B}(t - \tau) \mathbf{B}^T(t - \tau) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^1(t)] \\ = & d^1 \sum_{j=1}^N |a_{ij}^1| \mathbf{e}_i^{1T}(t - \tau) \mathbf{E} \mathbf{e}_i^1(t - \tau) + d^1 \sum_{j=1}^N |a_{ij}^1| \mathbf{e}_i^{1T}(t) \mathbf{P} \mathbf{B}(t - \tau) \mathbf{B}^T(t - \tau) \mathbf{P} \mathbf{e}_i^1(t), \end{aligned} \quad (16)$$

而且

$$\begin{aligned}
 & d^2 \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 e_j^{2T}(t-\tau) D^T(t-\tau) P e_i^2(t) + d^2 \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 e_i^{2T}(t) P D(t-\tau) e_j^2(t-\tau) \\
 &= d^2 \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 [e_j^{2T}(t-\tau) D^T(t-\tau) P e_i^2(t) + e_i^{2T}(t) P D(t-\tau) e_j^2(t-\tau)] \\
 &\leq d^2 \sum_{j=1}^N |a_{ij}^2| [e_j^{2T}(t-\tau) E e_i^2(t-\tau) + e_i^{2T}(t) P D(t-\tau) D^T(t-\tau) P e_i^2(t)] \\
 &= d^2 \sum_{j=1}^N |a_{ji}^2| e_i^{2T}(t-\tau) E e_i^2(t-\tau) + d^2 \sum_{j=1}^N |a_{ij}^2| e_i^{2T}(t) P D(t-\tau) D^T(t-\tau) P e_i^2(t), \tag{17}
 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ e_i^{1T}(t) \left[F^T(t) P + P F(t) + Q + d^1 \sum_{j=1}^N |a_{ij}^1| P B(t-\tau) B^T(t-\tau) P - 2d_i^{1*} P \right] e_i^1(t) \right. \\
 &+ e_i^{2T}(t) \left[G^T(t) P + P G(t) + Q + d^2 \sum_{j=1}^N |a_{ij}^2| P D(t-\tau) D^T(t-\tau) P - 2d_i^{2*} P \right] e_i^2(t) \\
 &+ e_i^{1T}(t-\tau) \left(-Q + d^1 \sum_{j=1}^N |a_{ji}^1| \right) e_i^1(t-\tau) + e_i^{2T}(t-\tau) \left(-Q + d^2 \sum_{j=1}^N |a_{ji}^2| \right) e_i^2(t-\tau) \\
 &+ c e_i^{2T}(t-\tau) B^T(t-\tau) P e_i^1(t) + c e_i^{1T}(t) P B(t-\tau) e_i^2(t-\tau) + c e_i^{1T}(t-\tau) D^T(t-\tau) P e_i^2(t) \\
 &\left. + c e_i^{2T}(t) P D(t-\tau) e_i^1(t-\tau) \right\}. \tag{18}
 \end{aligned}$$

由假设2和假设3, 有

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^N \left[e_i^{1T}(t) \left(F^T P + P F + Q + d^1 \sum_{j=1}^N |a_{ij}^1| P B B^T P - 2d_i^{1*} P \right) e_i^1(t) + e_i^{2T}(t) \left(G^T P + P G + Q \right. \right. \\
 &+ d^2 \sum_{j=1}^N |a_{ij}^2| P D D^T P - 2d_i^{2*} P \left. \right) e_i^2(t) + e_i^{1T}(t-\tau) \left(-Q + d^1 \sum_{j=1}^N |a_{ji}^1| \right) e_i^1(t-\tau) \\
 &+ e_i^{2T}(t-\tau) \left(-Q + d^2 \sum_{j=1}^N |a_{ji}^2| \right) e_i^2(t-\tau) + c e_i^{2T}(t-\tau) B^T P e_i^1(t) \\
 &\left. + c e_i^{1T}(t) P B e_i^2(t-\tau) + c e_i^{1T}(t-\tau) D^T P e_i^2(t) + c e_i^{2T}(t) P D e_i^1(t-\tau) \right]. \tag{19}
 \end{aligned}$$

假设

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & cPB \\ 0 & M_2 & cPD & 0 \\ 0 & cD^T P - Q + d^1 \sum_{j=1}^N |a_{ji}^1| E & 0 & 0 \\ cB^T P & 0 & 0 & -Q + d^2 \sum_{j=1}^N |a_{ji}^2| E \end{bmatrix} < 0, \tag{20}$$

其中

$$M_1 = F^T P + P F + Q - 2d_i^{1*} P + d^1 \sum_{j=1}^N |a_{ij}^1| P B B^T P,$$

$$M_2 = G^T P + PG + Q - 2d_i^{2*} P + d^2 \sum_{j=1}^N |a_{ij}^2| P D D^T P,$$

且设

$$e = [e_1^1(t), \dots, e_N^1(t), e_1^2(t), \dots, e_N^2(t), e_1^1(t - \tau), \dots, e_N^1(t - \tau), e_1^2(t - \tau), \dots, e_N^2(t - \tau)]^T,$$

则

$$\dot{V}(t) \leq e^T M e < 0. \quad (21)$$

(21) 式表明在各种假设下, 时滞耦合的相互依存网络((1)式)达到了局部自适应渐近异质同步. 因为不等式(20)式不是标准的LMI形式, 利用引理1, 可以将其改写为不等式(11)式. 至此, 定理1得证.

4 数值模拟

为了验证上述理论分析的主要结果, 对NW小世界子网络和BA无标度子网络构成的相互依存网络进行数值模拟, 其中子网络间是一对一的相互依赖关系. 考虑具有100个节点的NW小世界子网络((3)式), 其平均路径长度为1.616, 聚类系数为0.37934, 节点平均度为38.02. 网络的每个节点动力系统都是Lorenz系统,

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1}^1 = a_1(x_{i2}^1 - x_{i1}^1), \\ \dot{x}_{i2}^1 = b_1 x_{i1}^1 - x_{i1}^1 x_{i3}^1 - x_{i2}^1, \\ \dot{x}_{i3}^1 = x_{i1}^1 x_{i2}^1 - c_1 x_{i3}^1, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 100, \quad (22)$$

式中 a_1, b_1, c_1 是实数. 当 $a_1 = 10, b_1 = 28, c_1 = 8/3$ 时, 系统是混沌的.

另外一个子网络为含100个节点的BA无标度子网络((4)式), 其平均路径长度为2.1376, 聚类系数为0.21285, 节点平均度为10.74. 网络的节点动力系统是Rössler系统,

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1}^2 = -(x_{i2}^2 + x_{i3}^2), \\ \dot{x}_{i2}^2 = x_{i1}^2 + a_2 x_{i2}^2, \\ \dot{x}_{i3}^2 = b_2 + x_{i3}^2(x_{i1}^2 - c_2), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 100, \quad (23)$$

式中 a_2, b_2, c_2 是实数. 当 $a_2 = b_2 = 0.2, c_2 = 5.7$ 时, 系统是混沌的.

同时, 设网络((3)式和(4)式)的内部耦合函数为

$$H[x_i^k(t - \tau)]$$

$$= [\sin[x_{i1}^k(t - \tau)], x_{i2}^k(t - \tau), -x_{i3}^k(t - \tau)], \quad i = 1, 2, \dots, 100; k = 1, 2. \quad (24)$$

在所有的数值模拟中, 为了简单起见, 设网络中的参数分别为 $\tau = 1, c = 0.03, d^1 = 0.02, d^2 = 0.02$. 并设孤立节点系统的初始值分别为 $s^1 = (3, -10, 8), s^2 = (2, 8, -10)$; 子网络(3)式和(4)式的初始值分别为 $x_i^1 = (-0.5i, 0.5i, -1.1i), x_i^2 = (0.1i, -0.1i, 0.2i), i = 1, 2, \dots, 100$; 自适应律的初始值和反馈增益分别为 $d_i^1 = k_i^1 = 0.95i$ 和 $d_i^2 = k_i^2 = 0.3i, i = 1, 2, \dots, 100$.

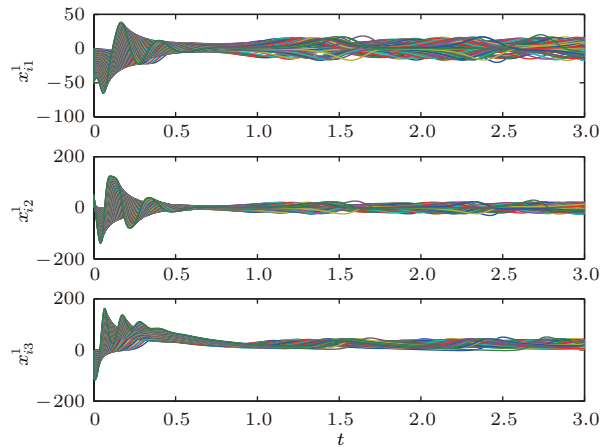


图1 子网络(3)式的运动轨迹图

Fig. 1. Trajectory of the sub-network (Eq. (3)).

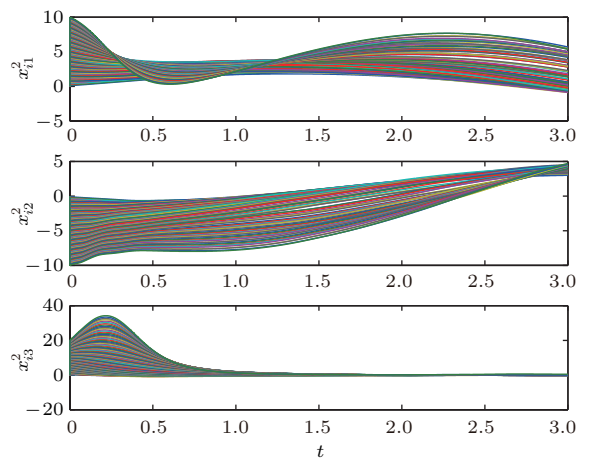


图2 子网络(4)式的运动轨迹图

Fig. 2. Trajectory of the sub-network (Eq. (4)).

在上述条件下, 相互依存网络的子网络 ((3) 式和 (4) 式) 的各个节点的动力轨迹图分别如图 1 和图 2 所示. 图 1 和图 2 说明随着时间的改变, 网络中的每个节点的运行轨迹处于杂乱的状态.

根据定理 1, 利用 MATLAB 的 LMI 工具箱, 可求得存在正定矩阵 P 和 Q ,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 38.0823 & -15.3684 & -19.6009 \\ -15.3684 & 25.5147 & -9.0565 \\ -19.6009 & -9.0565 & 38.4422 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

使得满足定理 1 的条件 ((11) 式). 对网络 ((3) 式和 (4) 式) 施加控制器 ((12) 式), 在自适应律 ((13) 式) 的作用下, 获得误差系统的轨迹图, 如图 3 和图 4 所示. 图 3 和图 4 表明, 在自适应控制器的作用下, 在 1 s 之内第二个、第三个子图的误差分量 $e_{i2}^1, e_{i3}^1, e_{i2}^2$ 和 e_{i3}^2 ($i = 1, 2, \dots, N$) 很快都趋于零, 而第一个子图 e_{i1}^1 和 e_{i1}^2 ($i = 1, 2, \dots, N$) 的轨迹则在零的附近有非常微小的摆动, 这说明在控制器的作用下此时的误差运动轨迹是有界的, 也是渐近稳定的. 图 5 和图 6 则说明随着时间的增加 (如增大到 5 s), e_{i1}^1 和 e_{i1}^2 ($i = 1, 2, \dots, N$) 最终完全趋于零. 此时, 两个子网络各自完全自适应同步到各自孤立系统的运动轨迹.

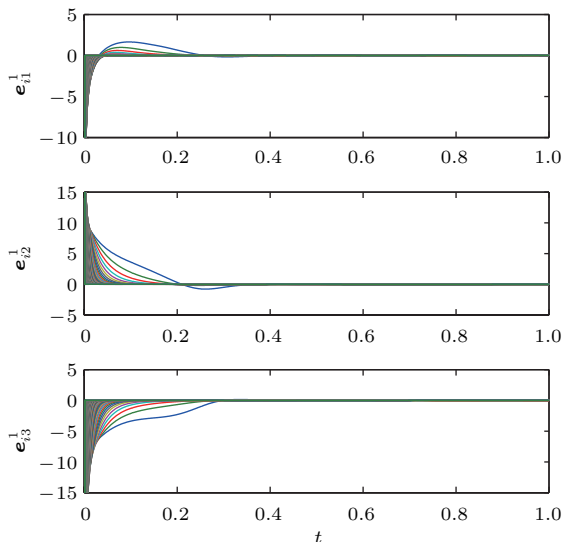


图 3 子网络 ((3) 式) 节点误差系统的轨迹图
Fig. 3. Trajectory of the error system of the sub-network (Eq.(3)).

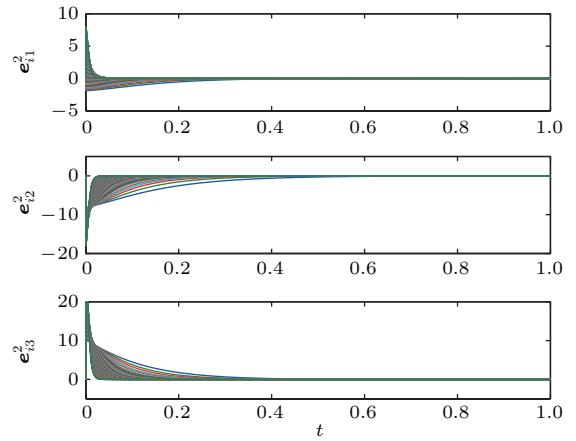


图 4 子网络 ((4) 式) 节点误差系统的轨迹图
Fig. 4. Trajectory of the error system of the sub-network (Eq.(4)).

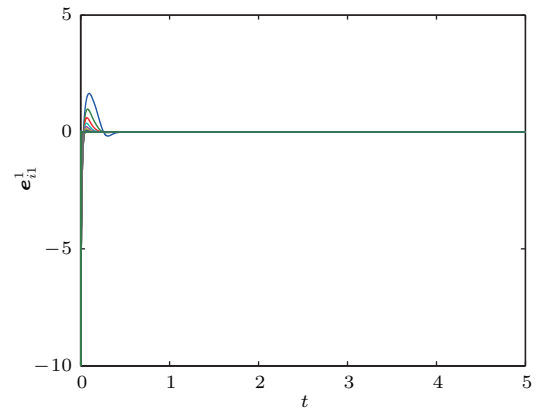


图 5 误差分量 e_{i1}^1 的轨迹图
Fig. 5. Trajectory of e_{i1}^1 .

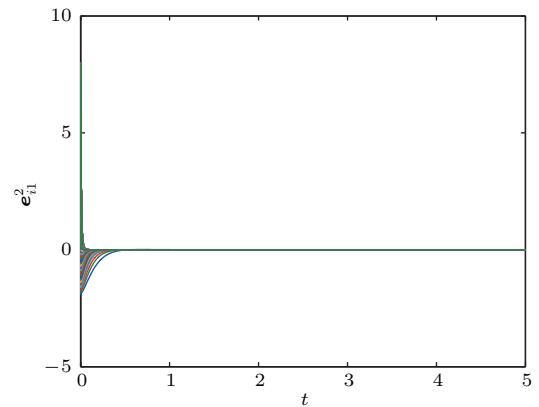


图 6 误差分量 e_{i1}^2 的轨迹图
Fig. 6. Trajectory of e_{i1}^2 .

在相互依存网络的两个子网络 ((3) 式和 (4) 式) 达到自适应渐近异质同步的同时, 图 7 和图 8 说明自适应律 ((13) 式) 的轨迹也很快趋于稳定值, 从而验证了本文提出理论的正确性和有效性.

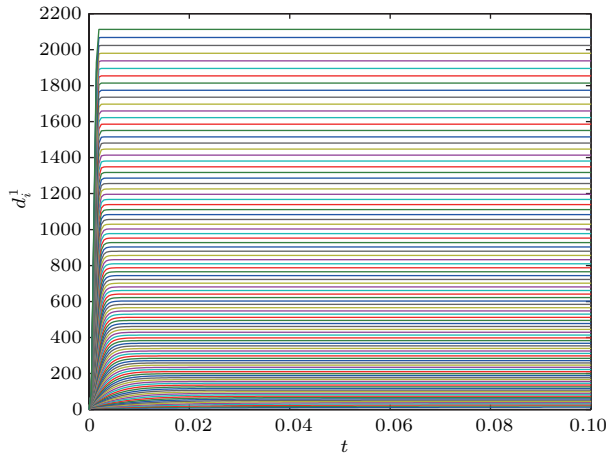


图7 子网络((3)式)自适应律轨迹图

Fig. 7. Adaptive laws of the sub-network (Eq.(3)).

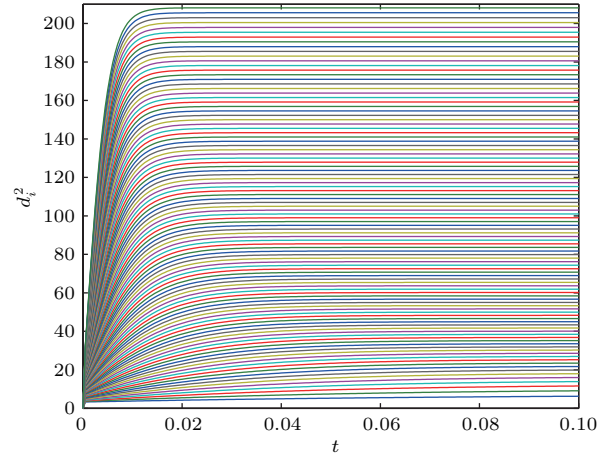


图8 子网络((4)式)自适应律轨迹图

Fig. 8. Adaptive laws of the sub-network (Eq.(4)).

5 结 论

在复杂网络间相互作用关系日益增强的今天,需要将研究目光由单个网络转向更一般的由多个子网络所组成的相互依存网络,进而对实际系统或网络的运作有更深入、全面的了解.研究了由两个子网络构成的相互依存网络的局部自适应异质同步问题,其中两个子网内和子网间耦合都具有时滞,网络中耦合关系是满足光滑性的非线性函数.首先对网络进行局部线性化,再利用李雅普诺夫稳定性理论,结合自适应控制技术和线性矩阵不等式方法,对网络施加合适的控制器,提出了时滞相互依存网络达到自适应渐近异质同步的充分条件.值得注意的是,本文所提出的控制器简单且易操作.最后,利用NW小世界子网络和BA无标度子网络构成的相互依存网络进行了数值模拟,结果表明提出理论的正确性和有效性.该研究为揭示网络行为规律提供了新的思路,也为实际网络建设(如基础设施系统)^[3-8]提供了理论基础.由于提出的理论结果与时滞无关,因此下一步工作是探讨相互依存网络时滞相关的同步问题.

参考文献

- [1] Havlin S, Kenett D Y, Ben-Jacob E, et al. 2012 *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **214** 273
- [2] Feng A, Gao X Y, Guan J H, Huang S P, Liu Q 2017 *Physica A* **483** 57
- [3] Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, Stanley H E, Havlin S 2010 *Nature* **464** 1025
- [4] Cardillo A, Zanin M, Gómez-Gardeñes J, et al. 2013 *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **215** 23

- [5] Ang L M, Seng K P, Zungeru A M 2016 *IJSIR* **7** 52
- [6] Stasiuk A I, Hryshchuk R V, Goncharova L L 2017 *Cybernet. Syst. Analysis* **53** 476
- [7] Bauch C T, Galvani A P 2013 *Science* **342** 47
- [8] Chen W, Wu T, Li Z W, Wang L 2017 *Physica A* **479** 542
- [9] Um J, Minnhagen P, Kim B J 2011 *Chaos* **21** 025106
- [10] Lee K, Kim J, Lee S, et al. 2014 *Multiplex networks//D'Agostino G, Scala A Networks of Networks: The Last Frontier of Complexity.* (1st Ed.) (Berlin: Springer) pp3-36
- [11] Albert R, Barabási A L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47
- [12] Wang X F, Chen G 2002 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **49** 54
- [13] Wang X F, Li X, Chen G R 2006 *Theory and Application of Complex Networks* (Beijing: Tsinghua University Press) p7 (in Chinese) [汪小帆, 李翔, 陈关荣 2006 复杂网络理论及其应用(北京:清华大学出版社)第7页]
- [14] Doyle J C, Alderson D L, Li L 2005 *PNAS* **102** 14497
- [15] Wang X F, Chen G R 2002 *Physica A* **310** 521
- [16] Kocarev L, Amato P 2005 *Chaos* **15** 024101
- [17] Zhou J, Chen T 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **53** 733
- [18] Tu L L, Lu J A 2009 *Comput. Math. Appl.* **57** 28
- [19] Zhang Q J, Lu J A, Lv J H 2008 *IEEE Trans. Circuits Syst. II* **55** 183
- [20] Liu J L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 040503 (in Chinese) [刘金良 2013 物理学报 **62** 040503]
- [21] Liang Y, Wang X Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 018901 (in Chinese) [梁义, 王兴元 2013 物理学报 **62** 018901]
- [22] Wu W, Zhou W, Chen T 2009 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **56** 829
- [23] Ma J, Mi L, Zhou P, et al. 2017 *Appl. Math. Comput.* **307** 321
- [24] Liu J, Chen S H, Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1595 (in Chinese) [刘杰, 陈士华, 陆君安 2003 物理学报 **52** 1595]
- [25] Wong W K, Zhen B, Xu J, Wang Z 2012 *Chaos* **22** 033146
- [26] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurth J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4193

- [27] Zhang H G, Liu Z W, Huang G B, Wang Z S 2010 *IEEE Trans. Neural. Netw.* **21** 91
- [28] Zheng Y G, Bao L J 2017 *Chaos. Soliton Fract.* **98** 145
- [29] Yang S F, Guo Z Y, Wang J 2017 *IEEE Trans. Neur. Net. Lear.* **28** 1657
- [30] He W L, Chen G R, Han Q L, et al. 2017 *IEEE Trans. Syst. Man. Cy-S.* **47** 1655
- [31] Zhang X Y, Boccaletti S, Guan S G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 038701
- [32] Li Y, Wu X Q, Lu J A, Lü J H 2016 *IEEE Trans. Circuits Syst. II* **63** 206
- [33] Xu Q, Zhuang S X, Hu D, Zeng Y F, Xiao J 2014 *Abst. Appl. Anal.* **10.1155** 453149
- [34] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balakrishnan V 1994 *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* (Philadelphia: SIAM) pp7–14
- [35] Tu L L, Liu H F, Yu L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 140506 (in Chinese) [涂俐兰, 刘红芳, 余乐 2013 物理学报 **62** 140506]

Local adaptive heterogeneous synchronization for interdependent networks with delayed coupling*

Wang Yu-Juan Tu Li-Lan[†] Song Shuai Li Kuan-Yang

(College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China)

(Received 30 August 2017; revised manuscript received 4 November 2017)

Abstract

With the development of the networks, the coupling between networks has become increasingly significant. Here, the networks can be described as interdependent networks. An interdependent network can have two different kinds of links, a connectivity link and a dependency link, which are fundamental properties of interdependent networks. During the past several years, interdependent complex network science has attracted a great deal of attention. This is mainly because the rapid increase in computing power has led to an information and communication revolution. Investigating and improving our understanding of interdependent networks will enable us to make the networks (such as infrastructures) we use in daily life more efficient and robust. As a significant collective behavior, synchronization phenomena and processes are common in nature and play a vital role in the interaction between dynamic units. At the same time, the time delay problem is an important issue to be investigated, especially in biological and physical networks. As a matter of fact, time delays exist commonly in the real networks. A signal or influence traveling through a network is often associated with time delay. In this paper, the local adaptive heterogeneous synchronization is investigated for interdependent networks with delayed coupling consisting of two sub-networks, which are one-by-one inter-coupled. The delays exist both in the intra-coupling and in the inter-coupling between two sub-networks, the intra-coupling and inter-coupling relations of the networks satisfy the requirements for nonlinearity and smoothness, and the nodes between two sub-networks have different dynamical systems, namely heterogeneous systems. Based on the Lyapunov stability theory, linear matrix inequality, and adaptive control technique, with proper controllers and adaptive laws for the networks, the sufficient conditions are proposed to synchronize the sub-networks of the interdependent networks into heterogeneous isolated systems, respectively. In order to illustrate the main results of the theoretical analysis clearly, some numerical simulations for an interdependent network with NW small world sub-network and BA sub-network are presented, in which each sub-network has 100 nodes and the heterogeneous systems are Lorenz and Rössler systems. The numerical simulations show that using the controllers and adaptive laws proposed, the network obtains the local heterogeneous synchronization quickly, that is, the nodes of two sub-networks are synchronized into Lorenz and Rössler systems separately. Thus, they verify the feasibility and correctness of the proposed techniques. It is worth noting that the presented results are delay-independent. In the future, our research will be directed to the further investigation of the delay-dependent synchronization of interdependent networks by using the current results as a basis.

Keywords: delayed interdependent networks, linear matrix inequality, Lyapunov stability theory, adaptive heterogeneous synchronization

PACS: 05.45.Xt

DOI: [10.7498/aps.67.20171927](https://doi.org/10.7498/aps.67.20171927)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61473338, 61473213).

[†] Corresponding author. E-mail: tulilan@wust.edu.cn