物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

基于标架场理论的完整系统Boltzmann-Hamel方程简化方法研究

张素侠　陈纬庭

Method of simplifying Boltzmann-Hamel equation in holonomic system with frame field theory

Zhang Su-Xia　Chen Wei-Ting

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 67, 060201 (2018)　DOI: 10.7498/aps.67.20172235
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172235
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I6

基于标架场理论的完整系统Boltzmann-Hamel方程简化方法研究*

张素侠 1)† 陈纬庭 2)

1) (天津大学机械工程学院力学系, 天津市非线性动力学与混沌控制重点实验室, 天津 300354)

2) (天津大学建筑工程学院土木工程系, 天津 300354)

(2017 年 10 月 15 日收到; 2017 年 12 月 17 日收到修改稿)

研究选取合适的准坐标简化完整系统Boltzmann-Hamel方程的问题. 基于流形上的标架场理论, 指出了定常构形空间中的准速度与标架场的联系, 并从几何不变性的角度上导出了完整系统的Boltzmann-Hamel方程. 证明了对于任意广义力为零的均匀构形空间、广义力不为零的零曲率构形空间, Boltzmann-Hamel方程均可以化简为可积分的形式, 同时给出具体的简化方法并举例说明本方法的适用性. 本文方法为寻找运动方程的解析解提供了一条新途径.

关键词: Boltzmann-Hamel方程, 标架场理论, 准坐标

PACS: 02.40.Yy, 45.20.–d, 45.10.Na, 02.40.Ky **DOI:** 10.7498/aps.67.20172235

1 引 言

Boltzmann-Hamel方程(以下简称为B-H方程)是由Boltzmann于1902年提出的一种完整系统运动方程[1], 后经Hamel推广到非完整系统[2,3]. 20世纪80年代到90年代, B-H方程的研究主要集中于几何化[4]、变质量系统[5−7]、非惯性系[8]、单面非完整约束系统[9]和高阶非完整系统[10,11]. 21世纪初, 完整和非完整系统B-H方程的对称性解法取得了很大进展, 通过将Lie对称性、Noether对称性和形式不变性引入B-H方程中以构造相应的守恒量, 简化了B-H方程的求解, 其中典型的工作如文献[12—15]. 与此同时, 在应用方面 B-H方程又出现在弹性力学[16]、非完整控制[17]和辛算法[18]的研究中. 这些研究关注的焦点均是准速度与非完整约束相似的结构, 却鲜有文献关注准坐标的选取对B-H方程形式的影响.

文献[19]首次提出了准坐标在选取上的自由性. 本文研究证明: 准坐标自由性的推广, 可以使完整系统的B-H方程得到尽可能的简化. 利用标架场理论, 从几何不变性的角度直接导出了完整系统中的B-H方程, 并从流形均匀性的角度出发, 证明了对于任意广义力为零的均匀构形空间, 以及任意广义力不为零的零曲率构形空间, 一定可以找到某个准速度或准坐标, 使其中的B-H方程化简为可积分的形式. 同时给出具体的简化方法并举例说明本方法的适用性.

2 构形空间中的标架场与B-H方程

设本文研究的构形空间是M, 其中的广义坐标是$q^1, \cdots, q^n$. 将M建模为n维Riemann流形[20], 则Riemann度量可利用广义坐标q^i表示为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ik}(q)\,\mathrm{d}q^i\,\mathrm{d}q^k. \tag{1}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 51479136, 51009107) 和天津市自然科学基金 (批准号: 17JCYBJC18700) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhangsux@tju.edu.cn

即广义坐标基矢场 $\{\partial/\partial q^k\}$ 下的Lagrange方程是

$$\frac{\partial T(q,\dot q)}{\partial q^\ell}-\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial T(q,\dot q)}{\partial \dot q^\ell}=-F^k(q)g_{k\ell}(q),\tag{2}$$

其中 T 是动能, 而 $F^k(q)$ 是外力. 将方程(2)展开为如下分量表述的形式:

$$\ddot q^m+\frac12 g^{m\ell}(q)\left(\frac{\partial g_{i\ell}(q)}{\partial q^k}+\frac{\partial g_{k\ell}(q)}{\partial q^i}-\frac{\partial g_{ik}(q)}{\partial q^\ell}\right)\dot q^i\dot q^k \\ =F^m(q),\tag{3}$$

其中等号左侧第二项中有Christoffel符号 $\varGamma^m_{ik}(q)$:

$$\varGamma^m_{ik}(q)=\frac12 g^{m\ell}(q)\left(\frac{\partial g_{i\ell}(q)}{\partial q^k}+\frac{\partial g_{k\ell}(q)}{\partial q^i}-\frac{\partial g_{ik}(q)}{\partial q^\ell}\right).\tag{4}$$

利用Christoffel符号可将Lagrange方程简写为

$$\ddot q^k+\varGamma^k_{ij}(q)\dot q^i\dot q^j=F^k(q).\tag{5}$$

下面引入构形空间中的标架场, 即构形空间中 n 个处处线性无关的矢量场. 从标架场的定义可以发现, 其与坐标基底的区别在于它可能不是由某组广义坐标生成的. 因为标架场本质上也是矢量场, 则可以将标架场在广义坐标基底场下展开为

$$e_k=A^i_k(q)\frac{\partial}{\partial q^i},\tag{6}$$

其中 $A^i_k(q)$ 称为标架系数, 完全决定了标架场的性质. 如果 $A^i_k(q)=\delta^i_k$ (δ^i_k 表示Kronecker符号), 则此时标架场 e_k 就是广义坐标 q^k 的坐标基底场 $\{\partial/\partial q^k\}$.

对于完整标架场, 可以表示为某组广义坐标的坐标基底场. 现在通过标架系数定义Frobenius符号 $\varTheta^k_{\ell m}(q)$:

$$\varTheta^k_{\ell m}(q)=\frac12\left(\frac{\partial A^k_m(q)}{\partial \pi^\ell}-\frac{\partial A^k_\ell(q)}{\partial \pi^m}\right),\tag{7}$$

这里引入了关于准坐标形式上的Pfaff导数 $\dfrac{\partial}{\partial \pi^m}=A^\ell_m(q)\dfrac{\partial}{\partial q^\ell}$. 利用Frobenius条件[21]得到: 如果Frobenius符号恒为零, 即 $\varTheta^k_{\ell m}=0$ 时, 标架场 $\{e_k\}$ 是完整的, 此时可以找到新的广义坐标 Q^k 使得 $e_k=\partial/\partial Q^k$; 如果Frobenius符号不恒为零, 则标架场 $\{e_k\}$ 是非完整的. 标架系数是可逆的, 即存在逆关系

$$\frac{\partial}{\partial q^k}=B^i_k(q)e_i,\tag{8}$$

其中 $B^k_i(q)$ 称为逆标架系数, 它与标架系数满足互逆关系: $A^k_i(q)B^\ell_k(q)=B^k_i(q)A^\ell_k(q)=\delta^\ell_i$. 利用 $B^k_i(q)$ 可以将Frobenius条件表述为: 若标架场 $\{e_k\}$ 是完整的, 则Pfaff方程组

$$B^k_i(q)\,\mathrm dq^i=0,\tag{9}$$

可积分, 反之则不是完整的. 从几何的观点来看, 标架场是坐标基底场的线性推广.

现在使用标架场作为基底来展开构形空间中的速度矢量

$$v=\frac{\partial}{\partial t}=\dot q^k\frac{\partial}{\partial q^k}=\dot q^kB^i_k(q)e_i.\tag{10}$$

将构形速度矢量在标架场下的分量记为 $\dot\pi^i$, 即有

$$\dot\pi^i=B^i_k(q)\dot q^k,\tag{11}$$

这就是准速度. 即准速度的几何本质就是速度矢量在标架场下的分量. 如果说广义速度对应着广义坐标基底场, 那么准速度就对应着标架场. 在(11)式两边同时乘上 $\mathrm dt$, 得到

$$\mathrm d\pi^i=B^i_k(q)\,\mathrm dq^k,\tag{12}$$

当标架场 $\{e_k\}$ 是完整标架场时, (12)式中的 $\mathrm d\pi^i$ 是全微分, 解出 $\pi^i=\pi^i(q)$ 就等于进行了一个广义坐标变换 $q\to\pi$, 此时准坐标 π 称为完整准坐标, 本质上就是广义坐标; 而当标架场 $\{e_k\}$ 是非完整标架场时, 准坐标 π 没有具体的意义, 只是形式上写成 π, 即对于非完整标架场, 并不严格区分准速度与准坐标, 两者本质上是相同的.

利用(12)式的逆关系 $\dot q^k=A^k_i(q)\dot\pi^i$, 可得到利用准速度表示的动能

$$T(q,\dot\pi)=\frac12 g_{ik}(q)A^i_r(q)A^k_j(q)\dot\pi^r\dot\pi^j.$$

因为Lagrange方程是构形空间中的张量方程, 它对于构形空间中的广义坐标变换保持不变, 现在视准坐标为新的坐标, 标架系数为广义坐标变换的Jacobi矩阵分量, 即可得到利用准速度表述的B-H方程

$$\ddot\pi^k+\varGamma^{*k}_{rs}(q)\dot\pi^r\dot\pi^s=F^i(q)B^k_i(q),\tag{13}$$

其中的 $\varGamma^{*k}_{rs}(q)$ 是标架场下的Christoffel符号

$$\varGamma^{*k}_{rs}(q)=\varGamma^i_{\ell m}(q)A^\ell_r(q)A^m_s(q)B^k_i(q) \\ +\frac{\partial A^m_r(q)}{\partial q^j}A^j_s(q)B^k_m(q).\tag{14}$$

(14)式是将Christoffel符号在广义坐标变换下的变换式(Q 是新广义坐标)

$$\varGamma^{*c}_{ab}(q)=\varGamma^k_{\ell m}(q)\frac{\partial q^\ell}{\partial Q^a}\frac{\partial q^m}{\partial Q^b}\frac{\partial Q^c}{\partial q^k}$$

$$+\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{\partial q^s}{\partial Q^a}\right)\frac{\partial q^j}{\partial Q^b}\frac{\partial Q^c}{\partial q^s}$$

中的$\partial q^m/\partial Q^b$替换为$A_b^m(q)$而得到的.

3 化简B-H方程的方法

求解完整系统的B-H方程的通用做法是将(11)式代入到(13)式中构造关于广义坐标q的微分方程组. 但是对比方程(5)和(13), 发现方程(13)中加入了标架系数$A_k^i(q)$和逆标架系数$B_k^i(q)$, 而这些系数的选取是完全任意的, 那么通过系数的选取可以使B-H方程得到简化: 在方程(13)中就能解出准速度$\dot{\pi}^k=\dot{\pi}^k(t)$, 接下来只用去处理简单的线性方程$\dot{q}^k=A_i^k(q)\dot{\pi}^i(t)$. 这就要求B-H方程应为如下形式:

$$\begin{cases}\ddot{\pi}^k=c^k-C_{rs}^k\dot{\pi}^r\dot{\pi}^s,\\ \dot{\pi}^i=B_k^i(q)\dot{q}^k,\end{cases}\tag{15}$$

其中$C_{rs}^k=\varGamma_{rs}^{*k}(q)$和$c^k=F^i(q)B_i^k(q)$均是常数. 方程(15)成立的前提是构形空间$M$具有一定的特性, 即定理1.

定理1 对于任意广义力为零的均匀构形空间, 总可以找到某个准坐标π, 使得方程(15)成立($c^k=0$).

证明 设初始的广义坐标就是均匀空间中的容许坐标. 在任意均匀空间中一定存在某个标架场$\{e_k\}$, 满足下式[22]:

$$\varTheta_{\ell m}^s(q)=\tilde{C}_{\ell m}^iA_i^s(q),\tag{16}$$

其中常数$\tilde{C}_{\ell m}^i$称为结构常数, 表征了该均匀空间的特征. 在该标架场下的度量张量分量是

$$g_{ik}^*(q)=g_{\ell m}(q)A_i^\ell(q)A_k^m(q)=C_{ik},\tag{17}$$

其中常张量C_{ik}是由结构常数决定的. 将(17)式代入到(14)式中可以得到

$$\varGamma_{\ell m}^{*k}(q)=\varPsi_{\ell m}^k(q)-\varTheta_{\ell m}^s(q)B_s^k(q),\tag{18}$$

其中对称化符号$\varPsi_{\ell m}^k(q)$表示为

$$\begin{aligned}\varPsi_{\ell m}^k(q)=&\ \varUpsilon_{\ell m}^k(q)+g^{*kj}(q)[g_{\ell i}^*(q)\varTheta_{mj}^r(q)\\&+g_{mi}^*(q)\varTheta_{\ell j}^r(q)]B_r^i(q),\end{aligned}$$

$$\varUpsilon_{\ell m}^k(q)=\frac{1}{2}g^{*ki}(q)\left(\frac{\partial g_{i\ell}^*(q)}{\partial\pi^m}+\frac{\partial g_{im}^*(q)}{\partial\pi^\ell}-\frac{\partial g_{\ell m}^*(q)}{\partial\pi^i}\right).$$

即$\varUpsilon_{\ell m}^k(q)$符号在标架场$\{e_k\}$下归零, 注意到(16)式可以表示为$\varTheta_{\ell m}^s(q)B_s^i=\tilde{C}_{\ell m}^i$, 则最终成立

$$\varGamma_{\ell m}^{*k}(q)=C^{kj}[C_{\ell i}\tilde{C}_{mj}^i+C_{mi}\tilde{C}_{\ell j}^i]-\tilde{C}_{\ell m}^k=C_{\ell m}^k.$$

即在标架场$\{e_k\}$下$\varGamma_{\ell m}^{*k}(q)$全是常数, 也即方程(15)成立. 而定理1中所求的准速度就是速度矢量在标架场$\{e_k\}$下的分量. 证毕.

通过定理1, 只要判定了所研究的构形空间是均匀空间, 就可以根据该均匀空间的结构常数来导出简化B-H方程的准坐标和常数C_{rs}^k. 在实用中最常见的是常曲率构形空间(均匀空间的特例), 这时可通过计算构形空间的内禀曲率来判定其是否为均匀空间. 其中一种特别重要的情况是方程(15)中常数C_{rs}^k全为零, 这时可以考虑广义力存在的情况. 给出定理2.

定理2 对于任意零曲率的构形空间, 都可以在其中找到一个完整的准坐标π, 使方程(15)在该坐标下表示为

$$\ddot{\pi}^k=F^{*k}(\pi).$$

证明 标架场$\{e_k\}$下的曲率张量有分量

$$S_{i\ell m}^k(q)=R_{i\ell m}^{*k}(q)+2B_s^h(q)\varGamma_{ih}^{*k}(q)\varTheta_{\ell m}^s(q),\tag{19}$$

其中$R_{i\ell m}^{*k}(q)$是$\varGamma_{\ell m}^{*k}(q)$的函数,

$$\begin{aligned}R_{i\ell m}^{*k}(q)=&\ \frac{\partial\varGamma_{im}^{*k}(q)}{\partial\pi^\ell}-\frac{\partial\varGamma_{i\ell}^{*k}(q)}{\partial\pi^m}\\&+\varGamma_{im}^{*h}(q)\varGamma_{h\ell}^{*k}(q)-\varGamma_{i\ell}^{*h}(q)\varGamma_{hm}^{*k}(q).\end{aligned}$$

将$\varGamma_{\ell m}^{*k}(q)=0$代入(19)式, 立刻得到$S_{i\ell m}^k(q)=0$, 即此时构形空间的内禀曲率为零. 再将$\varGamma_{\ell m}^{*k}(q)=0$代入到(18)式中, 并对等式两边同时取关于指标$\ell$和$m$的对称化, 得到$\varPsi_{\ell m}^k(q)=0$. 即此时对称化符号全是零, 回到(18)式有$\varTheta_{\ell m}^s(q)B_s^k(q)=0$, 则由$B_s^k(q)$的可逆性立刻推出$\varTheta_{\ell m}^s(q)=0$. 即标架场是$\{e_k\}$完整的.

另一方面, 在零曲率空间中总是可以在局部上引入完整的幺正标架场$\{e_m=\partial/\partial\pi^m\}$, 在该标架场中有下述形式的度量张量分量:

$$g_{ik}^*(q)=g_{\ell m}(q)A_i^\ell(q)A_k^m(q)=\delta_{ik},$$

其中δ_{ik}是单位张量分量. 这样有$\partial g_{i\ell}^*(q)/\partial\pi^m=0$,即将$\varUpsilon_{\ell m}^k(q)$归零了. 此时在$\varGamma_{\ell m}^{*k}(q)$中仅剩下一项

$$\delta^{kj}[\delta_{\ell i}\varTheta_{mj}^r(q)+\delta_{mi}\varTheta_{\ell j}^r(q)]B_r^i(q)-\varTheta_{\ell m}^s(q)B_s^k(q),$$

因为$\varTheta_{\ell m}^s(q)=0$, 则的确有$\varGamma_{\ell m}^{*k}(q)=0$成立.

完整的标架系数$A_i^k(q)$退化为坐标变换的Jacobi矩阵的分量$\partial q^k/\partial\pi^i$, 这时只要求解以下方程:

$$\delta_{ik}\frac{\partial\pi^i}{\partial q^\ell}\frac{\partial\pi^k}{\partial q^m}=g_{\ell m}(q),$$

便可以得到广义坐标变换关系: $\pi^k = \pi^k(q)$; 再构造 $F^{*k}(\pi) = F^i(q)\partial\pi^k/\partial q^i$, 这样可以将运动方程化成下述可积形式:

$$\ddot{\pi}^k = F^{*k}(\pi),$$

这即为定理2中要求的形式, 证毕.

4 算 例

例1 考虑某两个自由度的力学系统, 该系统的广义坐标取 q_1 和 q_2. 给出这个力学系统的 Lagrange 函数

$$L = \frac{1}{2}q_1^{-2}(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2).$$

该系统没有广义力, 对应的构形空间的度量张量在广义坐标 q 下表示为

$$\{g_{ik}\} = \begin{pmatrix} q_1^{-2} & 0 \\ 0 & q_1^{-2} \end{pmatrix}.$$

代入 Lagrange 方程 (2), 得到下述方程组:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 - q_1^{-1}\dot{q}_1{}^2 + q_1^{-1}\dot{q}_2{}^2 = 0, \\ \ddot{q}_2 - 2q_1^{-1}\dot{q}_1\dot{q}_2 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

将 g_{ik} 代入到 (4) 式中计算 Christoffel 符号, 再利用这些 Christoffel 符号计算此时的曲率张量, 发现该构形空间是负常曲率空间 (曲率为 -1), 所以根据定理1, 方程 (20) 可积分. 引入以下准速度:

$$\begin{cases} \dot{\pi}_1 = q_1^{-1}\dot{q}_1, \\ \dot{\pi}_2 = q_1^{-1}\dot{q}_2, \end{cases}$$

进行变量替换就得到了用准速度 $\dot{\pi}$ 坐标表示的 B-H 方程:

$$\begin{cases} \ddot{\pi}_1 + \dot{\pi}_2^2 = 0, \\ \ddot{\pi}_2 - \dot{\pi}_1\dot{\pi}_2 = 0. \end{cases} \tag{21}$$

准速度解为 (其中 a, b 是积分常数):

$$\begin{cases} \dot{\pi}_1 = a\dfrac{1 - be^{2at}}{1 + be^{2at}}, \\ \dot{\pi}_2 = \dfrac{2a\sqrt{be^{2at}}}{1 + be^{2at}}. \end{cases}$$

接下来只需求解下述一阶线性方程:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = aq_1\dfrac{1 - be^{2at}}{1 + be^{2at}}, \\ \dot{q}_2 = 2aq_1\dfrac{\sqrt{be^{2at}}}{1 + be^{2at}}. \end{cases}$$

很明显该线性方程存在积分解.

例2 考虑某三个自由度的力学系统, 该系统的广义坐标取 q_1, q_2 和 q_3; 惯量用 m 表示, 相互作用常数用 k 表示. 给出这个力学系统的 Lagrange 函数

$$L = \frac{m}{2}[(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2) + \dot{q}_3{}^2] - mgq_3 \\ - \frac{k}{2}q_1^2q_2^2,$$

即该力学系统对应的构形空间的度量张量在广义坐标 q 下表示为

$$\{g_{ik}\} = \begin{pmatrix} m(q_1^2 + q_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & m(q_1^2 + q_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix},$$

代入 Lagrange 方程 (2), 得到下述方程组:

$$\begin{cases} m(q_1^2 + q_2^2)\ddot{q}_1 + 2m(q_1\dot{q}_1{}^2 + q_2\dot{q}_1\dot{q}_2) \\ \quad - m(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2)q_1 = -kq_1q_2^2, \\ m(q_1^2 + q_2^2)\ddot{q}_2 + 2m(q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + q_2\dot{q}_2{}^2) \\ \quad - m(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2)q_2 = -kq_2q_1^2, \\ \ddot{q}_3 = -g. \end{cases} \tag{22}$$

计算得到此时的曲率张量分量全是0. 根据定理2, 引入以下完整准坐标:

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2), \\ \pi_2 = q_1q_2, \\ \pi_3 = q_3, \end{cases}$$

进行变量替换就得到了用完整准坐标 π 坐标表示的 B-H 方程:

$$\begin{cases} m\ddot{\pi}_1 = 0, \\ m\ddot{\pi}_2 = -\pi_2, \\ \ddot{\pi}_3 = -g. \end{cases} \tag{23}$$

该 B-H 方程有以下解析解 (其中的 a, b, c, d, e, f 均是积分常数):

$$\begin{cases} \pi_1(t) = b + at, \\ \pi_2(t) = c\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{m}}\right) + d\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{m}}\right), \\ \pi_3(t) = e + ft - \dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

对比方程 (20) 和 (21), (22) 和 (23) 可以发现, 采用本文提出的方法进行变换, 可以大大简化运动方程的形式, 以求得解析解.

5 讨 论

通过前面的理论推导和算例分析, 可以看到本文方法具有数学和物理两方面的意义.

从数学的角度来看, 原有的分离变量方法和对称性方法均是给出合适的广义坐标来分离变量或构造守恒量以简化运动方程. 而本文提出的方法则是将广义坐标推广为准坐标, 进而将Lagrange方程推广为B-H方程, 给出合适的准坐标来简化B-H方程, 此时得到的结果更具有普遍性.

从物理的角度来看, 力学系统的构形空间取决于所选择的参考系、系统内物质的分布情况和系统所受到的约束. 零曲率构形空间来源于惯性系中相互作用的无约束离散n质点系统, 其构形空间就是n个3维Euclid空间的直积. 因此零曲率构形空间的物理意义是该力学系统与惯性系中相互作用的无约束离散质点系统之间的结构相似性(比如惯性系中仅有平动的无约束刚体系统). 而根据定理2, 此时可以选择合适的广义坐标将系统的B-H方程变成最简单的形式. 一旦使用非惯性系来参考力学系统的运动, 或者是力学系统存在完整约束时, 系统内物质的分布情况和相互作用过程就与惯性系中相互作用的无约束离散质点系统产生了差异, 度量这种差异的工具是内禀曲率. 均匀的构形空间在数学中最"接近"零曲率构形空间, 因而在物理中均匀的构形空间在结构上也最"接近"惯性系中相互作用的无约束离散质点系统. 这样根据定理1, 均匀的构形空间虽无法引入最简单的广义坐标来描述系统的运动, 但却可以引入最简单的标架场, 使B-H方程得到尽可能的简化.

值得说明的是, 定理1和定理2中给出的最简标架场的构造方法, 需要利用均匀构形空间自身的结构常数, 即在标架场平移下度量张量分量的不变性; 而经典的广义动量积分讨论的则是力学系统的Lagrange函数在广义坐标平移下的不变性所导出守恒量, 在广义力为零时, 前者给出的标架场可作为后者寻找守恒量的有力工具. 而经典的广义能量积分是时间平移不变性所导出的守恒量, 与本文的结果无关.

6 结 论

本文从几何不变性的角度直接导出了完整系统中的B-H方程, 并说明了可以在任意广义力为零时的常曲率构形空间和广义力不为零时的任意零曲率构形空间中找到某个标架场, 使该标架场生成的准速度简化B-H方程到可积分的形式. 即对于复杂的运动方程, 要先尝试计算构形空间的内禀曲率. 若满足定理1和定理2中提出的条件, 可找到该运动方程的解析解. 本文的方法为寻找运动方程解析解提供了一条新途径.

参考文献

[1] Boltzmann L 1902 *Sitz. Math. Natur. Akad. Wiss. B* **11** 1603

[2] Hamel G 1904 *Math. Phys.* **50** 1

[3] Hamel G 1938 *Art. Sitz. Math. Ges.* **37** 4

[4] Tang C L, Shi R C 1989 *J. Beijing. Inst. Tech.* **9** 35 (in Chinese) [唐传龙, 史荣昌 1989 北京理工大学学报 **9** 35]

[5] Qiu R 1997 *Appl. Math. Mech.* **18** 1033 (in Chinese) [邱荣 1997 应用数学和力学 **18** 1033]

[6] Lü Z Q 1994 *Jiangxi Sci.* **12** 195 (in Chinese) [吕哲勤 1994 江西科学 **12** 195]

[7] Zhou R L, Chen L Q 1993 *J. Anshan. Ins. I. S. Tech.* **16** 46 (in Chinese) [周瑞礼, 陈立群 1993 鞍山钢铁学院学报 **16** 46]

[8] Zhang J F, Zhang H Z 1990 *J. Zhejiang Norm. Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **13** 61 (in Chinese) [张解放, 张洪忠 1990 浙江师范大学学报(自然科学版) **13** 61]

[9] Zhang Y, Wu R H, Mei F X 1999 *Shanghai J. Mech.* **20** 196 (in Chinese) [张毅, 吴润衡, 梅凤翔 1999 上海力学 **20** 196]

[10] Mei F X 1985 *The Foundations of Mechanics of Non-holonomic System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) pp87–89 (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础 (北京: 北京工业学院出版社) 第87—89页]

[11] Zhang J F 1990 *Huanghuai. J.* **6** 13 (in Chinese) [张解放 1990 黄淮学刊 **6** 13]

[12] Fu J L, Liu R W, Mei F X 1998 *J. Beijing Inst. Tech.* **7** 215

[13] Fu J L, Liu R W 2000 *Acta Math. Sci.* **20** 63 (in Chinese) [傅景礼, 刘荣万 2000 数学物理学报 **20** 63]

[14] Fu J L, Chen L Q 2004 *The Progress of Research for Mathematics Mechanics Physics and High New Technology* (Vol. 2004 (10)) (Chengdu: Southwest Jiaotong University Press) pp124–132 (in Chinese) [傅景礼, 陈立群 2004 数学•力学•物理学•高新技术研究进展 2004 (10)卷 (成都: 西南交通大学出版社) 第124—132页]

[15] Xu X J, Mei F X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5521 (in Chinese) [许学军, 梅凤翔 2005 物理学报 **54** 5521]

[16] Xue Y, Liu Y Z, Chen L Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3845 (in Chinese) [薛纭, 刘延柱, 陈立群 2006 物理学报 **55** 3845]

[17] Zhang Q, Liu Z B, Cai Y 2008 *Chin. J. Aeronaut.* **21** 471 (in Chinese) [战强, 刘增波, 蔡尧 2008 中国航空学报 **21** 471]

[18] Xie J F, Pang S, Zou J T, Li G F 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 230201 (in Chinese) [谢加芳, 庞硕, 邹杰涛, 李国富 2012 物理学报 **61** 230201]

[19] Jarzebowska E M 2015 *Selected Papers from CSNDD Agadir, Morocco, May 21–23, 2014* p167

[20] Arnold V I (translated by Qi M Y) 2006 *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (4th Ed.) (Beijing: Higher Education Press) pp59–69 (in Chinese) [阿诺尔德 著 (齐民友 译) 2006 经典力学的数学方法 (第四版) (北京: 高等教育出版社) 第 59—69 页]

[21] Chern S S, Chen W H 2001 *Lectures on Differential Geometry* (2nd Ed.) (Beijing: Peking University Press) pp30–38 (in Chinese) [陈省身, 陈维桓 2001 微分几何讲义 (第二版) (北京: 北京大学出版社) 第 30—38 页]

[22] Landau L D, Lifshitz E M (translated by Lu X, Ren L, Yuan B N) 2012 *The Classical Theory of Fields* (8th Ed.) (Beijing: Higher Education Press) p426 (in Chinese) [朗道, 栗弗席兹 (鲁欣, 任朗, 袁炳南 译) 2012 场论 (第八版) (北京: 高等教育出版社) 第 426 页]

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 67, No. 6 (2018) 060201

Method of simplifying Boltzmann-Hamel equation in holonomic system with frame field theory*

Zhang Su-Xia[1)†] Chen Wei-Ting [2)]

1) (*Tianjin Key Laboratory of Nonlinear Dynamics and Chaos Control, School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300354, China*)

2) (*School of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300354, China*)

(Received 15 October 2017; revised manuscript received 17 December 2017)

Abstract

Boltzmann-Hamel equation using quasi-velocities as variable quantities instead of generalized-velocities, is an extending form of the classical Lagrange equation. It is widely used for establishing the motion equations in constrained mechanical systems because of its unique structure. The classical method to solve Boltzmann-Hamel equation includes two steps. The first step is to substitute the relationship between the quasi-velocities and generalized-velocities into the equation to establish the second order equation relating to generalized-coordinates. The second step is to search for the analytical solutions using the method of separating variables or the method of Lie groups. However this method is not very effective in practice. In fact, the majority of studies only focus on the similarity between the quasi-coordinate form and the linear non-holonomic constraint form, without considering the effects of the selection of quasi-coordinates on the Boltzmann-Hamel equation. Because the quasi-coordinates in Boltzmann-Hamel equation can be selected freely, the problem of simplifying the Boltzmann-Hamel equation in holonomic system by choosing the appropriate quasi-coordinates is studied in this paper. Using the method of geometrodynamic analysis, the relationship between quasi-coordinates in the time-invariant configuration space and frame field is indicated based on the frame field theory of manifolds. The Boltzmann-Hamel equation in holonomic system is then derived from the tangle of geometric invariance. It differs from the ordinary methods, such as the action principle or d'Alembert's method. It is demonstrated that Boltzmann-Hamel equation can be simplified into an integrable form in homogenous configuration space with zero generalized-force or zero curvature configuration space with non-zero generalized-force. The process of simplifying the equation is provided in detail and the feasibility of this method is verified through two examples. The result in this paper reveals the close link between the intrinsic curvature of the time-invariant configuration space and the structure of Boltzmann-Hamel equation. The simplest form of Boltzmann-Hamel equation under the generalized-coordinate bases field (Lagrange equation) corresponds to the configuration space of zero curvature, and the simplest form of Boltzmann-Hamel equation under the frame field corresponds to the homogenous configuration space (more often, constant curvature space). For the complex motion equations, it should be transformed first into Boltzmann-Hamel equation, then the intrinsic curvature of the time-invariant configuration space will be calculated. If the conditions mentioned in this paper are satisfied, the Boltzmann-Hamel equation can be simplified into the simplest form by choosing appropriate quasi-coordinates, from which, the analytical solutions can be obtained, furthermore, this frame field derived by the appropriate quasi-coordinates can be used as a tool to study the symmetry and the conserved quantity of this holonomic mechanical system. The results in this paper provide a new way to search for the analytical solution of motion equations.

Keywords: Boltzmann-Hamel equation, frame field theory, quasi-coordinates

PACS: 02.40.Yy, 45.20.–d, 45.10.Na, 02.40.Ky **DOI:** 10.7498/aps.67.20172235

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51479136, 51009107) and the Natural Science Foundation of Tianjin, China (Grant No. 17JCYBJC18700).

† Corresponding author. E-mail: zhangsux@tju.edu.cn