

基于 Julia 分形的多涡卷忆阻混沌系统

肖利全 段书凯 王丽丹

Julia fractal based multi-scroll memristive chaotic system

Xiao Li-Quan Duan Shu-Kai Wang Li-Dan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 090502 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20172761

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172761>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I9>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[混沌信号自适应协同滤波去噪](#)

An adaptive denoising algorithm for chaotic signals based on collaborative filtering

物理学报.2018, 67(6): 060501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172470>

[磁控二氧化钛忆阻混沌系统及现场可编程逻辑门阵列硬件实现](#)

A memristor-based chaotic system and its field programmable gate array implementation

物理学报.2016, 65(12): 120503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.120503>

[二维 Hénon-Heiles 势及其变形势体系逃逸率与分形维数的研究](#)

Fractal dimensions and escape rates in the two-dimensional Hénon-Heiles potential and its deformation form

物理学报.2015, 64(23): 230501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.230501>

[离子迁移忆阻混沌电路及其在语音保密通信中的应用](#)

Chaotic circuit of ion migration memristor and its application in the voice secure communication

物理学报.2015, 64(21): 210507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210507>

[一种参数优化的混沌信号自适应去噪算法](#)

A parameter optimization nonlinear adaptive denoising algorithm for chaotic signals

物理学报.2015, 64(4): 040503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.040503>

基于 Julia 分形的多涡卷忆阻混沌系统*

肖利全¹⁾²⁾ 段书凯^{1)2)†} 王丽丹¹⁾²⁾

1) (西南大学电子信息工程学院, 重庆 400715)

2) (非线性电路与智能信息处理重庆市重点实验室, 重庆 400715)

(2017 年 12 月 28 日收到; 2018 年 2 月 5 日收到修改稿)

忆阻器作为一种非线性电子元件, 能用作混沌系统中的非线性项, 从而提高系统的复杂度. 分形与混沌是密切相连的, 分别对两者的研究都已成熟, 却鲜有将分形过程应用到混沌系统中, 以产生丰富的混沌吸引子. 为了探索将分形与混沌系统相结合的可能性, 本文首先提出了一个新的忆阻混沌系统, 并从对称性、耗散性、平衡点稳定性、功率谱、Lyapunov 指数和分数维等方面探讨了系统的动力学特性; 紧接着, 把经典的 Julia 分形过程应用到该忆阻混沌系统中, 产生了新的混沌吸引子, 并将几种由 Julia 分形衍生的变形 Julia 分形过程应用于文中提出的忆阻混沌系统, 获得了丰富的混沌吸引子; 最后, 讨论了分形过程中的复常数对系统的影响. 从仿真结果可以看出, 分形过程与混沌系统的结合能产生丰富的多涡卷混沌吸引子. 这不仅为产生多涡卷混沌吸引子提供了一种新方法, 还弥补了使用功能函数方法造成混沌系统不光滑的不足.

关键词: 混沌系统, 忆阻器, 动力学特性, Julia 分形过程

PACS: 05.45.Ac, 05.45.Df, 05.45.Pq, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.67.20172761

1 引言

1971 年, Chua 首次提出忆阻器^[1]; 2008 年, 惠普实验室率先研发出忆阻器实物模型^[2]. 自此, 忆阻器在非易失存储^[3]、联想记忆^[4]、非线性电路与系统^[5]等众多领域有了广泛的应用.

分形^[6-8]与混沌是紧密联系的, 虽然分形与混沌的起源不同, 发展过程也不相同, 但它们的研究内容在本质上有着很大的相似性, 混沌主要在于研究过程的行为特性, 分形更着重于研究吸引子自身的结构. 混沌吸引子也是分形集, 而分形集便是动力学系统中那些不稳定轨迹的初始点的集合. 对混沌和分形这两个领域的研究已硕果累累^[9-14], Boualleque^[15]通过复杂的分形网络及变换产生混沌吸引子, 作为联系如此紧密的两个学科, 将分形与混沌系统相结合的研究是有意义的.

基于此, 本文探索分形与混沌系统的结合, 将经典的 Julia 分形过程及其变形应用于忆阻混沌系

统中, 数值仿真结果表明, 它能产生多涡卷混沌吸引子, 而且它的涡卷数可通过参数很好地进行控制. 在已有的产生多涡卷混沌吸引子的方法中, 如分段线性函数^[16]、阶跃函数^[17]、正弦函数^[18]、开关流形^[19-21]、时滞饱和和序列^[22-25], 这些使用功能函数产生多涡卷混沌吸引子的方法, 使混沌系统变得不光滑, 而将分形过程应用于混沌系统产生多涡卷混沌吸引子的方法, 则弥补了这一不足.

本文第 2 部分构建了一个新的忆阻混沌系统, 并对它的动力学特性进行了分析, 验证了系统的混沌特性; 第 3 部分将 Julia 分形过程、带系数的 Julia 分形过程、高阶 Julia 分形过程和多项式 Julia 分形过程分别应用到本文提出的忆阻混沌系统中, 得到了复杂多变的混沌吸引子, 如环形多涡卷混沌吸引子, 还讨论了分形过程中一个复常数的影响, 通过改变复常数的取值, 能够得到多种形状的混沌吸引子, 如趋于分离状的多涡卷混沌吸引子; 第 4 部分是本文的总结.

* 国家自然科学基金 (批准号: 61372139, 61571372, 61672436)、中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: XDJK2016A001, XDJK2014A009) 和重庆市基础科学与前沿技术研究 (批准号: cstc2017jcyjBX0050) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: duansk@swu.edu.cn

2 新忆阻混沌系统及其动力学性质

2.1 新忆阻混沌系统的提出

本文构建了一个新的忆阻混沌系统, 可由以下方程描述:

$$\begin{cases} \dot{u} = a(2v - u) + evw, \\ \dot{v} = cu - uw + v, \\ \dot{w} = -dh(-|u|) - bw, \end{cases} \quad (1)$$

其中, a, b, c, d, e 为系统参数; u, v, w 为状态变量. $h(\cdot)$ 满足二氧化钛忆阻器的磁通与电荷之间的关系, 可表示为^[12]

$$h(x) = \begin{cases} (x - c_1)/R_{\text{OFF}}, & x < c_3, \\ \frac{\sqrt{2kx + M^2(0)} - M(0)}{k}, & c_3 \leq x \leq c_4, \\ (x - c_2)/R_{\text{ON}}, & x > c_4, \end{cases} \quad (2)$$

式中, $c_1 = [R_{\text{OFF}} - M(0)]^2/(2k)$, $c_2 = [R_{\text{ON}} - M(0)]^2/(2k)$, $c_3 = [R_{\text{OFF}}^2 - M^2(0)]/(2k)$, $c_4 = [R_{\text{ON}}^2 - M^2(0)]/(2k)$; x 表示该忆阻器的输入磁通; R_{ON} 和 R_{OFF} 分别代表忆阻器的两个极限值;

$M(0)$ 是忆阻器的初始值; $k = [(R_{\text{ON}} - R_{\text{OFF}}) \times \mu_v R_{\text{ON}}]/D^2$, 其中 D 为薄膜的厚度, μ_v 为所用忆阻器模型中的氧空位平均迁移率. 所用忆阻器模型的参数设置如下: $D = 10 \text{ nm}$, $R_{\text{ON}} = 100 \Omega$, $R_{\text{OFF}} = 20 \text{ k}\Omega$, $M(0) = 16 \text{ k}\Omega$, $\mu_v = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$. 当初始状态为 $(u, v, w) = (1, 1, 5)$, 且 $a = 8$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 100000$, $e = 12$ 时, 系统(1)表现出混沌状态, 相图如图1所示.

2.2 动力学特性

2.2.1 对称性和不变性

观察系统方程(1)不难发现, 在坐标变换 $(u, v, w) \rightarrow (-u, -v, w)$ 下, 系统(1)的微分方程保持不变. 也就是系统(1)关于 w 轴对称.

2.2.2 耗散性

将系统(1)改写成下面的矢量形式:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = [f_1(x), f_2(x), f_3(x)]^T, \quad (3)$$

向量场 $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ 在 \mathbb{R}^3 上的散度为

$$\nabla \mathbf{F} = \frac{\partial f_1(X)}{\partial u} + \frac{\partial f_2(X)}{\partial v} + \frac{\partial f_3(X)}{\partial w}. \quad (4)$$

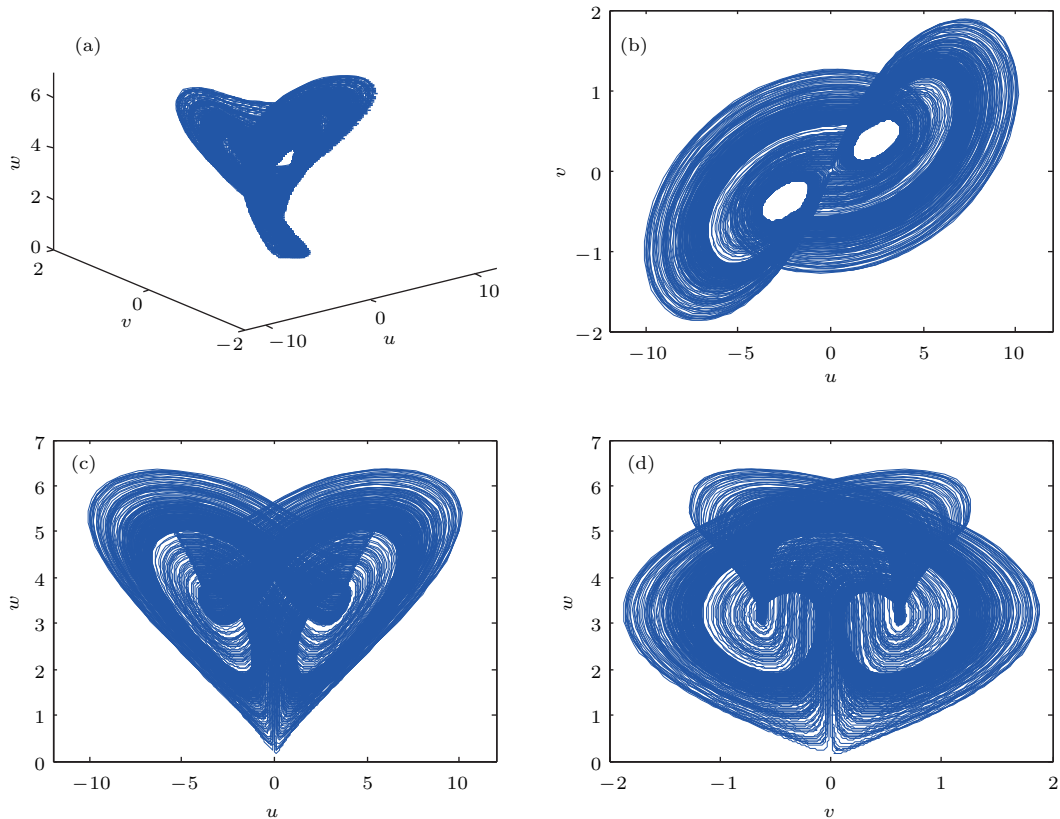


图1 系统(1)的混沌吸引子 (a) 三维图; (b) $u-v$ 平面; (c) $u-w$ 平面; (d) $v-w$ 平面
Fig. 1. Attractor of system (1): (a) Three-dimensional view; (b) $u-v$ plane; (c) $u-w$ plane; (d) $v-w$ plane.

对于系统(1), 它的散度可以计算为 $\nabla F = 1 - a - b$. 当 $1 - a - b < 0$ 时, $\nabla F \leq 0$. 体积 (V) 的收缩速率为

$$\frac{dV(t)}{dt} = e^{-(a+b-1)t}, \quad (5)$$

求解可得

$$V(t) = V(0)e^{-(a+b-1)t}, \quad (6)$$

系统的体积元以指数形式快速缩减到0. 本文所选取的参数 $a = 8, b = 5$, 则 $\nabla F = 1 - a - b = -12 < 0$, 故系统(1)是耗散的. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 每个体积元组成的系统轨道以指数 $(1 - a - b)$ 缩小到0. 因此, 系统的所有轨迹被限制在一个包含零体积的有限集内, 且收敛到一个零体积的吸引子上.

2.2.3 系统平衡点

为了得到系统(1)的平衡点, 令方程(1)中的 $\dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = 0$, 可得

$$\begin{cases} a(2v - u) + evw = 0, \\ cu - uw + v = 0, \\ -dh(-|u|) - bw = 0, \end{cases} \quad (7)$$

求得系统(1)在参数 $a = 8, b = 5, c = 3, d = 100000, e = 12$ 时, 有三个平衡点 $S_1(0, 0, 0)$, $S_2(3.9129, 0.4053, 5.1036)$ 和 $S_3(-3.9129, -0.4053, 5.1036)$.

系统(1)线性化的 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a & 2a + ew & ev \\ c - w & 1 & -u \\ -d \frac{dh(-|u|)}{du} & 0 & -b \end{bmatrix}. \quad (8)$$

将平衡点 S_1 代入(8)式, 得到系统(1)在平衡点 S_1 处的特征值 $\lambda_1 = -13.5125, \lambda_2 = 6.5152, \lambda_3 = -3$. λ_1 和 λ_3 为负实根, λ_2 为正实根, 故平衡点 S_1 是不稳定的鞍点.

在平衡点 $S_2(3.9129, 0.4053, 5.1036)$ 处, 求得其特征值为 $\lambda_1 = -10.4769 + 10.1340i, \lambda_2 = -10.4769 - 10.1340i, \lambda_3 = 10.9537$. λ_1 和 λ_2 为一对共轭复根, λ_3 为正实数, 故平衡点 S_1 是不稳定的鞍焦点.

同理, 可求出在 $S_3(-3.9129, -0.4053, 5.1036)$ 处的特征值为 $\lambda_1 = -10.4769 + 10.1340i, \lambda_2 = 10.4769 - 10.1340i, \lambda_3 = 10.9537$. 平衡点 S_3 和 S_2 具有相同的特征值, 故 S_3 也是不稳定的鞍焦点.

2.2.4 Lyapunov 指数和分数维

众所周知, Lyapunov 指数是分析动力系统非线性行为的一种方法, 实际上它测量了相空间中运动轨迹的收敛或发散的指数率. 如果系统至少有一个 Lyapunov 指数是正的, 那么该系统可以被视为混沌系统. 当初始状态为 $(u, v, w) = (1, 1, 1)$, 且系统参数 $a = 8, b = 5, c = 3, d = 100000, e = 12$ 时, 得到如图2所示的系统(1)的 Lyapunov 指数谱, 相应的 Lyapunov 指数值分别是 $LE_1 = 1.3078, LE_2 = -0.0011028, LE_3 = -11.3067$.

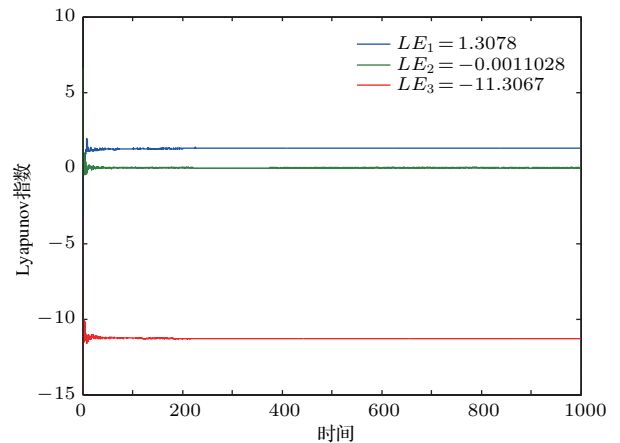


图2 系统(1)的 Lyapunov 指数谱

Fig. 2. Lyapunov exponent spectrum of system (1).

此外, 在 Lyapunov 指数谱的基础上, 可以得到 Lyapunov 维数. Lyapunov 维数的定义为

$$D_L = j + \frac{1}{|LE_{j+1}|} \sum_{i=1}^j LE_i, \quad (9)$$

其中 j 是满足 $\sum_{i=1}^j LE_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{j+1} LE_i < 0$ 的最大整数. Lyapunov 维数用来衡量混沌吸引子的几何标度性质或复杂性. 在系统(1)中, 在误差允许的范围内, $LE_1 > 0, LE_2 \approx 0, LE_3 < 0$ 且 $|LE_1| < |LE_3|$, 所以有 $j = 2$ 且 $\frac{1}{|LE_{j+1}|} \sum_{i=1}^j LE_i = \frac{LE_1 + LE_2}{|LE_3|}$. 代入(9)式, 可得 $D_L = 2.1156$, 混沌吸引子的 Lyapunov 维数大于2且小于3. 吸引子的分数维性质, 不仅意味着该系统具有非周期轨道, 而且说明了不同条件下的轨迹处于分离状态.

2.2.5 功率谱

图3为系统(1)的功率谱图, 从图中可以看出, 功率谱是连续的, 且伴随有尖峰出现, 可判定运动处于混沌状态.

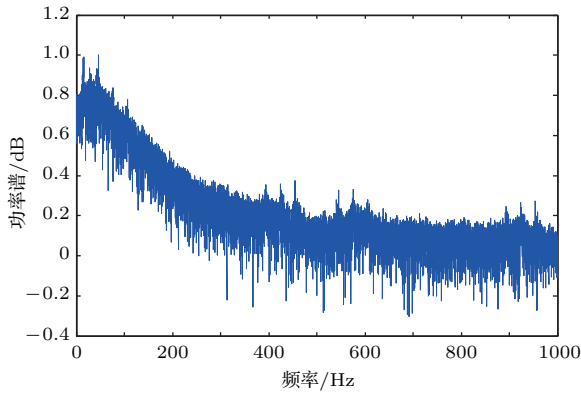


图3 系统 (1) 的频谱图

Fig. 3. Power spectrum of system (1).

3 新忆阻混沌系统在分形中的应用

本节将忆阻混沌系统与分形相结合, 得到能产生多涡卷的忆阻混沌系统. 数值仿真结果表明, 该

方法是可行的和有效的. 与其他产生多涡卷混沌吸引子的方法相比, 通过分形过程产生的多涡卷混沌吸引子的方法, 能较好地调整混沌系统的涡卷数.

3.1 通过 Julia 分形产生的多涡卷混沌系统

在 Julia 分形式 $Z_{n+1} = Z_n^2 + Z_0$ 中, $Z_n = x_n + iy_n$, $Z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$ 和 $Z_0 = x_0 + iy_0$ 都是复数, Z_0 是复常数. 这里先不讨论 Z_0 , 本文将在 3.5 节统一讨论复常数 Z_0 . 则有

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 + y_n^2, \\ y_{n+1} = 2x_n y_n. \end{cases} \quad (10)$$

在三维坐标系 (u, v, w) 的 u 和 v 之间加入分形过程, 即在映射 $(x, y, z) \rightarrow (x^2 - y^2, 2xy, z)$ 中, 令 $u = x^2 - y^2, v = 2xy, w = z$, 则有

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 2y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

得到关于 x, y, z 的系统方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 2y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ -y & x & 0 \\ 0 & 0 & 2(x^2 + y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

将方程 (1) 代入 (12) 式中, 有

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2(x^2 + y^2)} & \frac{y}{2(x^2 + y^2)} & 0 \\ \frac{-y}{2(x^2 + y^2)} & \frac{x}{2(x^2 + y^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a[4xy - (x^2 - y^2)] + 2exyz \\ c(x^2 - y^2) - (x^2 - y^2)z + 2xy \\ -dh(-|x^2 - y^2|) - bz \end{bmatrix}. \quad (13)$$

得到产生多涡卷混沌系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{2(x^2 + y^2)} \{a[4xy - (x^2 - y^2)] + 2exyz\} + \frac{y}{2(x^2 + y^2)} [c(x^2 - y^2) - (x^2 - y^2)z + 2xy], \\ \dot{y} = \frac{-y}{2(x^2 + y^2)} \{a[4xy - (x^2 - y^2)] + 2exyz\} + \frac{x}{2(x^2 + y^2)} [c(x^2 - y^2) - (x^2 - y^2)z + 2xy], \\ \dot{z} = -dh(-|x^2 - y^2|) - bz. \end{cases} \quad (14)$$

图 4 为系统参数 $a = 8, b = 5, c = 3, d = 100000$ 和 $e = 12$ 时系统 (14) 的相图.

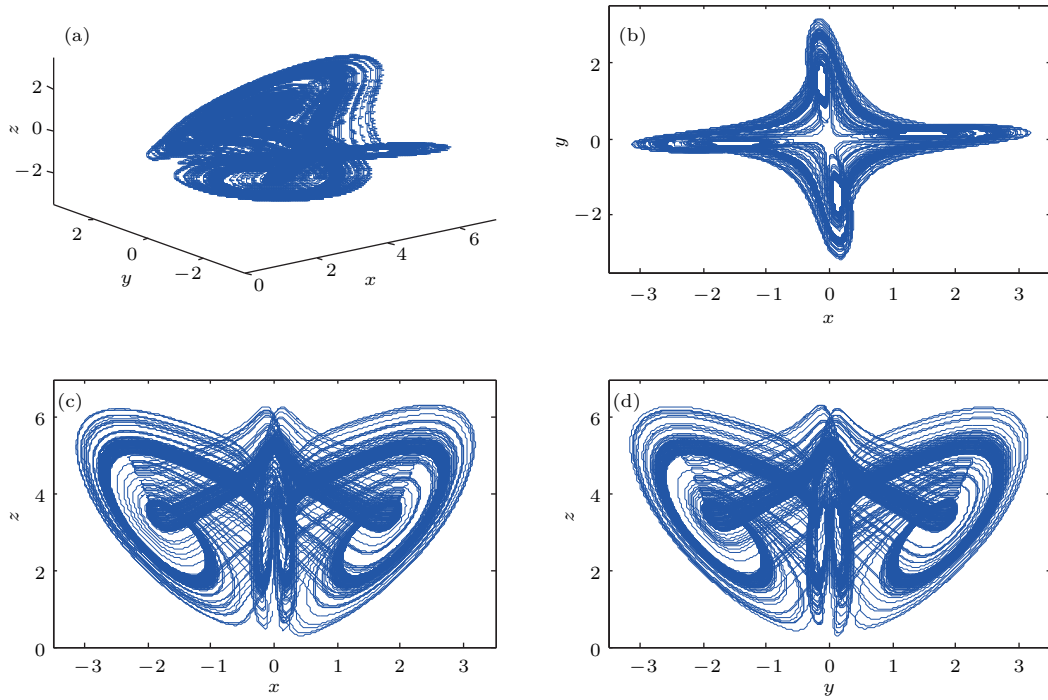


图4 系统(14)的混沌吸引子 (a) 三维图; (b) x - y 平面; (c) x - z 平面; (d) y - z 平面
Fig. 4. Attractor of system (14): (a) Three-dimensional view; (b) x - y plane; (c) x - z plane; (d) y - z plane.

3.2 带系数的变形 Julia 分形产生的多涡卷混沌系统

现在, 考虑给 Julia 分形表达式 $Z_{n+1} = Z_n^2 + Z_0$ 的 Z_n^2 项乘以一个系数 k , 得到一个变形的 Julia 分形:

$$Z_{n+1} = kZ_n^2 + Z_0. \quad (15)$$

此时, 映射矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2kx & -2ky & 0 \\ 2ky & 2kx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

采用与 3.1 节相同的方法, 得到新的混沌系统方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2k(x^2+y^2)} & \frac{y}{2k(x^2+y^2)} & 0 \\ \frac{-y}{2k(x^2+y^2)} & \frac{x}{2k(x^2+y^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a[4kxy - k(x^2 - y^2)] + 2ekxyz \\ ck(x^2 - y^2) - k(x^2 - y^2)z + 2kxy \\ -dh(-|k(x^2 - y^2)|) - bz \end{bmatrix}. \quad (17)$$

图5为系统参数 $a = 8, b = 5, c = 3, d = 100000$ 和 $e = 12, k$ 取不同值时, 系统(17)在 x - y 平面的相图.

此时, k 均取正实数. 从图5可以看出, k 的不同取值只会改变混沌吸引子的尺寸大小, 不会改变吸引子的形状, 且 k 越大时, 系统(17)相图的尺寸越小, 吸引子越聚合.

3.3 高阶 Julia 分形产生的多涡卷混沌系统

在 Julia 分形 $Z_{n+1} = Z_n^2 + Z_0$ 中, 把 Z_n^2 修改为 Z_n^m , 得到广义高阶 Julia 分形

$$Z_{n+1} = Z_n^m + Z_0, m \in N^+. \quad (18)$$

考虑 $m \geq 3$, 则 3.1 节中的映射变为 $(x, y, z) \rightarrow (\text{Re}[(x+iy)^m], \text{Im}[(x+iy)^m], z)$, 且有 $u = \text{Re}[(x+iy)^m], v = \text{Im}[(x+iy)^m], w = z$, 故产生多涡卷混沌吸引子的系统方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{S}_{m-1}}{m|x-iy|^{2m-2}} & \frac{-\bar{T}_{m-1}}{m|x-iy|^{2m-2}} & 0 \\ \frac{\bar{T}_{m-1}}{m|x-iy|^{2m-2}} & \frac{\bar{S}_{m-1}}{m|x-iy|^{2m-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a(2v-u) + evz \\ cu - uz + v \\ -dh(-|u|) - bz \end{bmatrix}. \quad (19)$$

这里 \bar{S}_{m-1} 和 \bar{T}_{m-1} 分别为

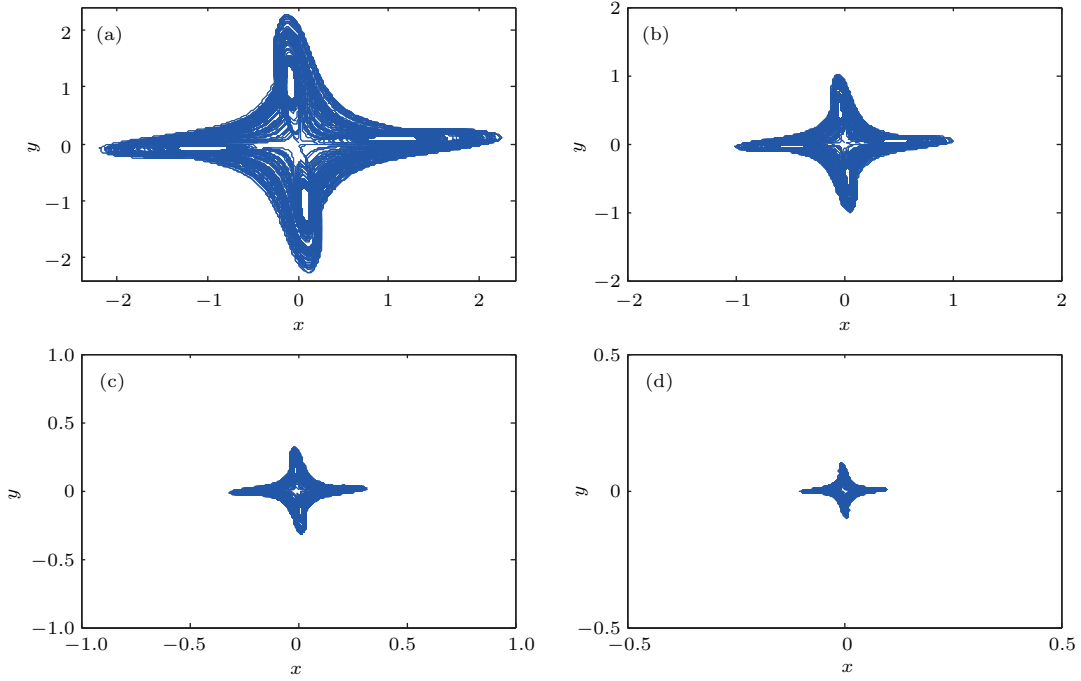


图5 k 取不同值时系统 (17) 在 x - y 平面的相图 (a) $k = 2$; (b) $k = 10$; (c) $k = 100$; (d) $k = 1000$

Fig. 5. Chaotic attractors at x - y plane of system (17) at the different parameter k : (a) $k = 2$; (b) $k = 10$; (c) $k = 100$; (d) $k = 1000$.

$$\bar{S}_{m-1} = \text{Re}[(y - iz)^{m-1}] = \begin{cases} y^{m-1} + \sum_{l=1}^{(m-2)/2} (-1)^l \frac{\prod_{j=0}^{2l-1} (m-j-1)}{(2l)!} y^{m-2l-1} z^{2l}, & m \text{ 为偶数,} \\ y^{m-1} + \sum_{l=1}^{(m-1)/2} (-1)^l \frac{\prod_{j=0}^{2l-1} (m-j-1)}{(2l)!} y^{m-2l-1} z^{2l}, & m \text{ 为奇数,} \end{cases} \quad (20)$$

$$\bar{T}_{m-1} = \text{Im}[(y - iz)^{m-1}] = \begin{cases} \sum_{l=1}^{m/2} (-1)^l \frac{\prod_{j=0}^{2l-2} (m-j-1)}{(2l-1)!} y^{m-2l} z^{2l-1}, & m \text{ 为偶数,} \\ \sum_{l=1}^{(m-1)/2} (-1)^l \frac{\prod_{j=0}^{2l-2} (m-j-1)}{(2l-1)!} y^{m-2l} z^{2l-1}, & m \text{ 为奇数;} \end{cases} \quad (21)$$

u 和 v 的完整表达式为

$$u = \text{Re}[(y + iz)^m] = \begin{cases} y^m + \sum_{l=1}^{m/2} (-1)^l \frac{\prod_{j=0}^{2l-1} (m-j)}{(2l)!} y^{m-2l} z^{2l}, & m \text{ 为偶数,} \\ y^m + \sum_{l=1}^{(m-1)/2} (-1)^l \frac{\prod_{j=0}^{2l-1} (m-j)}{(2l)!} y^{m-2l} z^{2l}, & m \text{ 为奇数,} \end{cases} \quad (22)$$

$$v = \text{Im}[(y + iz)^m] = \begin{cases} \sum_{l=1}^{m/2} (-1)^{l+1} \frac{\prod_{j=0}^{2l-2} (m-j)}{(2l-1)!} y^{m-2l+1} z^{2l-1}, & m \text{ 为偶数,} \\ \sum_{l=1}^{(m+1)/2} (-1)^{l+1} \frac{\prod_{j=0}^{2l-1} (m-j)}{(2l-1)!} y^{m-2l+1} z^{2l-1}, & m \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad (23)$$

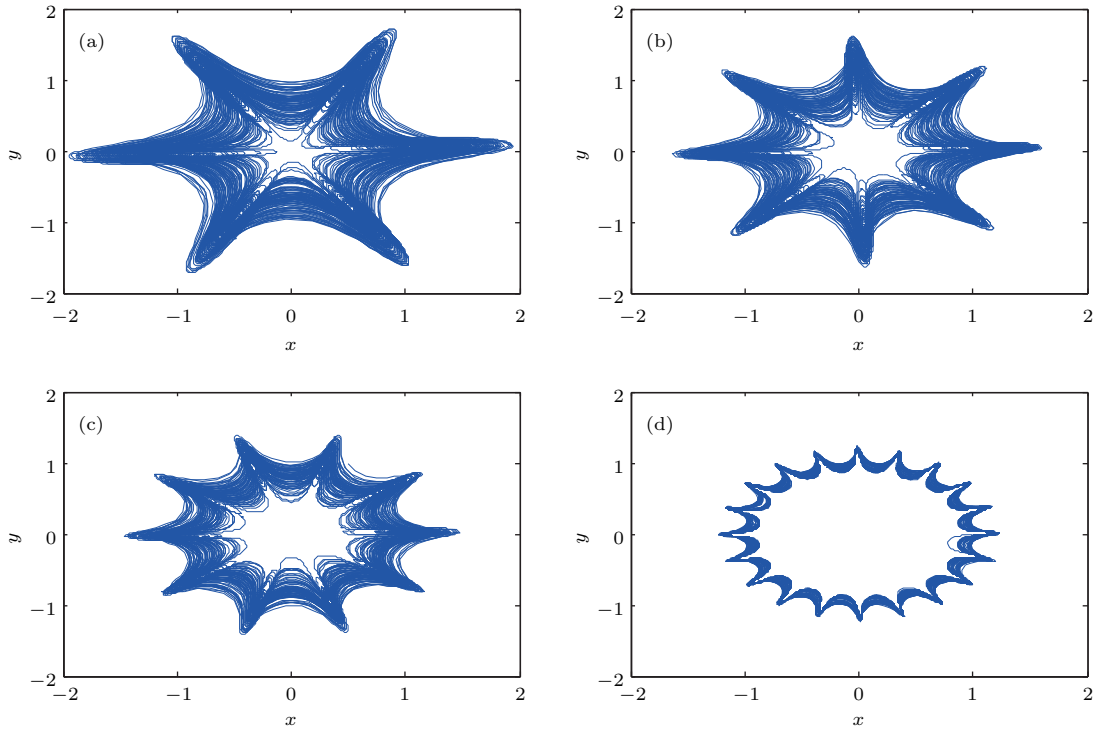


图6 多涡卷混沌系统的吸引子 (a) $m = 3$ 时, 6 涡卷混沌系统; (b) $m = 4$ 时, 8 涡卷混沌系统; (c) $m = 5$ 时, 10 涡卷混沌系统; (d) $m = 10$ 时, 20 涡卷混沌系统

Fig. 6. Attractors of multi-scroll chaotic system: (a) $m = 3$, a 6-scroll chaotic system; (b) $m = 4$, a 8-scroll chaotic system; (c) $m = 5$, a 10-scroll chaotic system; (d) $m = 10$, a 20-scroll chaotic system.

大量的仿真结果表明, 当 m 取大于 1 的正整数时, 都能得到多涡卷混沌系统. 图 6 为系统参数 $a = 8, b = 5, c = 3, d = 100000$ 和 $e = 12$ 时, m 分别取 3, 4, 5, 10 时, (19) 式所表示的混沌系统在 $x-y$ 平面的吸引子图.

3.4 多项式 Julia 分形产生的多涡卷混沌系统

在 Julia 分形的基础上, 把分形迭代式更改为多项式形式:

$$Z_{n+1} = p_1 Z_n + p_2 Z_n^2 + p_3 Z_n^3 + \dots + p_L Z_n^L + Z_0$$

$$= \sum_{j=1}^L p_j Z_n^j + Z_0, \quad L \in N^+, \quad (24)$$

其中 $0 \leq p_j \leq 1, \sum_{j=1}^L p_j = 1, 1 \leq j \leq L$. 运用相同的方法, 将此迭代关系式应用于系统 (1) 中. 为了更好地研究 Z_n^j 项在迭代式中的作用, 进而影响通过 (24) 式所产生的多涡卷混沌系统, 简单起见, 取 $p_j = 1/L$, 即 $p_1 = p_2 = \dots = p_L = 1/L$. 与前面 3.1 节、3.2 节和 3.3 节的讨论类似, 先不考虑 Z_0 对系统的影响, 即令 $Z_0 = 0$. 关于 Z_0 对系统的影响, 统一

在 3.5 节中讨论. 下面对 L 取不同值时的新混沌系统进行仿真, 图 7 为 L 取不同值时的多涡卷混沌吸引子在 $x-y$ 平面的相图.

仔细观察上面的迭代 (24) 式, 不难发现, p_j 的取值也对产生的多涡卷混沌系统有较大影响. 当 $p_1 = 1$ 时, 对于 $2 \leq j \leq L$, 都有 $p_j = 0$, 通过分形产生的混沌系统即为原始系统 (1). 当 $p_2 = 1$ 时, 对于 $1 \leq j \leq L$ 且 $j \neq 2$ 都有 $p_j = 0$, 通过分形产生的系统就是 3.1 节中的系统 (14). 当 $3 \leq k \leq L, k \in N^+$, $p_k = 1$ 时, 对于 $1 \leq j \leq L$ 且 $j \neq k$, 都有 $p_j = 0$, 这就和 3.3 节系统 (19) 相同 (此时, 3.3 节中的参数 m 就相当于这里的参数 k).

3.5 复常数 Z_0 对系统的影响

前文主要讨论了 Julia 分形中指数项的作用, 让 $Z_0 = 0$. 本节着重讨论复常数 Z_0 取不同值时, 对混沌系统的影响. 考虑 $Z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$, 将它代入 u 和 v 的表达式中, 更新 u 和 v 的值.

对于 3.1 节的 u 和 v , 有

$$u = x^2 - y^2 + x_0, \quad v = 2xy + y_0; \quad (25)$$

对于 3.2 节的 u 和 v , 有

$$u = k(x^2 - y^2) + x_0, \quad v = 2kxy + y_0; \quad (26)$$

在 3.3 节中, 就有

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re}[(x + iy)^m] + x_0, \\ v &= \operatorname{Im}[(x + iy)^m] + y_0; \end{aligned} \quad (27)$$

同理, 对于 3.4 节中的 u 和 v , 有

$$u = \sum_{j=1}^L \operatorname{Re}[p_j(x + iy)^j] + x_0,$$

$$v = \sum_{j=1}^L \operatorname{Im}[p_j(x + iy)^j] + y_0. \quad (28)$$

这里, 同样取 $p_j = 1/L, j = 1, 2, \dots, L$. 图 8 反映了 Z_0 取不同值时, 对混沌系统的影响.

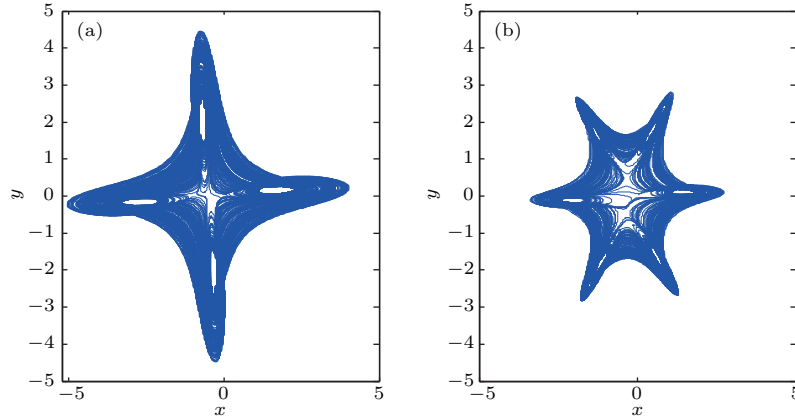


图 7 L 取不同值时的混沌吸引子 (a) $L = 2$; (b) $L = 3$

Fig. 7. The chaotic attractors at x - y plane with different L : (a) $L = 2$; (b) $L = 3$.

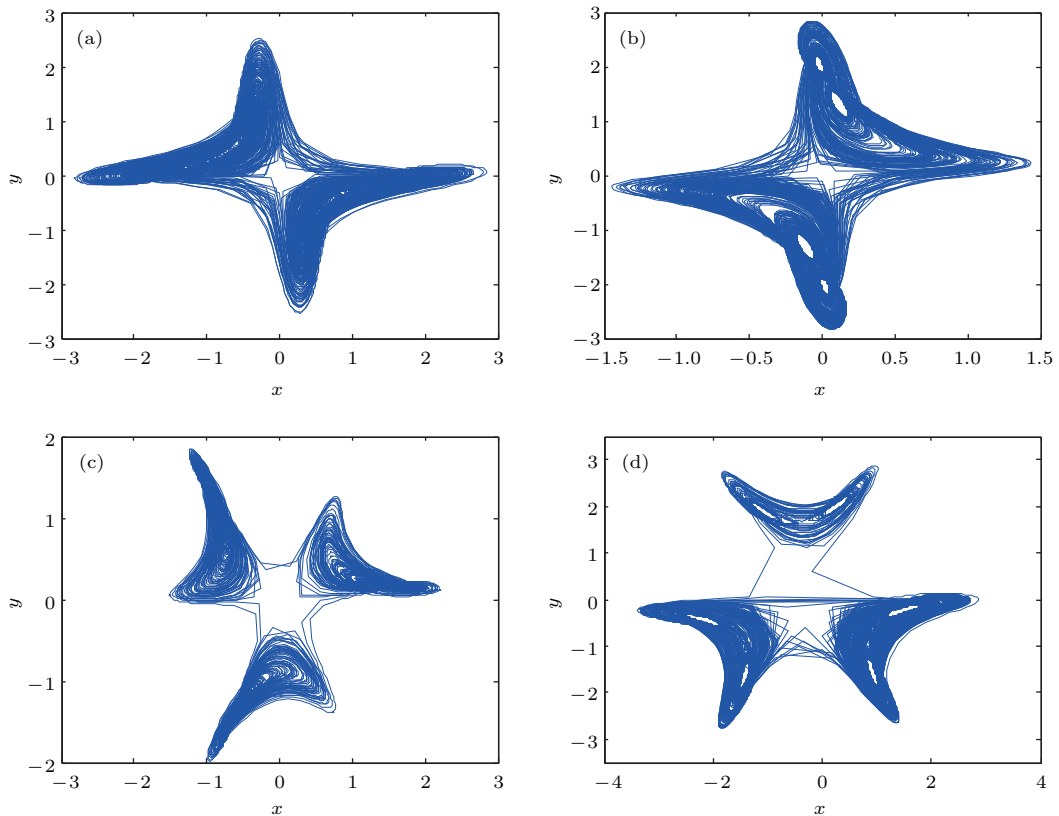


图 8 Z_0 取不同值时, 系统在 x - y 平面的相图 (a) (25) 式, $Z_0 = 1 + 0.5i$; (b) (26) 式, $k = 2, Z_0 = 3 - 0.1i$; (c) (27) 式, $m = 3, Z_0 = -3.5 - 1.2i$; (d) (28) 式, $L = 3, p = 1/3, Z_0 = -1 + 0.5i$

Fig. 8. Chaotic attractors at x - y plane with different Z_0 : (a) Eq. (25), $Z_0 = -1 + 0.5i$; (b) Eq. (26), $k = 2$ and $Z_0 = 3 - 0.1i$; (c) Eq. (27), $m = 3$ and $Z_0 = -3.5 - 1.2i$; (d) Eq. (28), $L = 3, p = 1/3, Z_0 = -1 + 0.5i$.

4 结 论

忆阻器作为一种体积小、功耗低的新型元件,在混沌电路中有着较高的应用价值. 本文新构建了一个基于磁控二氧化钛忆阻器的三维忆阻混沌系统,通过分析系统的对称性、耗散性、平衡点稳定性、功率谱、Lyapunov 指数和分数维,对系统动力学特性进行了分析,从而验证了系统的混沌特性. 此外,本文还尝试着将经典的 Julia 分形过程及其变形应用于混沌系统中,产生了丰富的多涡卷混沌吸引子,不仅弥补了通过功能函数产生多涡卷混沌吸引子的不足,而且其涡卷数能随着某些参数的变化而变化. 改变 Julia 分形及其变形中复常数的值,能得到不同形状的混沌吸引子. 这也为进一步研究分形与混沌系统的结合提供了参考.

参考文献

- [1] Chua L O 1971 *IEEE Trans. Circ. Theor.* **18** 507
- [2] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, Williams R S 2008 *Nature* **453** 80
- [3] Zhou J, Huang D 2012 *Chin. Phys. B* **21** 048401
- [4] Wang L D, Li H F, Duan S K, Huang T W, Wang H M 2016 *Neurcomputing* **171** 23
- [5] Min G Q, Wang L D, Duan S K 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 210507 (in Chinese) [闵国旗, 王丽丹, 段书凯 2015 物理学报 **64** 210507]
- [6] Mandelbrot B B 1967 *Science* **156** 636
- [7] Mandelbrot B B 1975 *Fractals: Form, Chance and Dimension* (San Francisco: WH Freeman and Company) pp35-37
- [8] Li H Q, Wang F Q 1999 *Fractal Theory and Its Application in Molecular Science* (Beijing: Science Press) p33 (in Chinese) [李后强, 汪富泉 1999 分形理论及其在分子科学中的应用 (北京: 科学出版社) 第 33 页]
- [9] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [10] Chua L O, Komuro M, Matsumoto T 1986 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **33** 1072
- [11] Chen G R 1999 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **9** 1465
- [12] Wang L D, Drakakis E, Duan S K, He P F, Liao X F 2012 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **22** 1250205
- [13] Muthuswamy B, Kokate P P 2009 *IETE Tech. Rev.* **26** 417
- [14] Zhou Z W, Su Y L, Wang W D, Yan Y 2017 *J. Petrol. Explor. Prod. Technol.* **7** 487
- [15] Bouallegue K 2015 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **25** 1530002
- [16] Chua L O, Roska T 1993 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **40** 147
- [17] Yalcin M, Suykens J, Vandewalle J, Ozoguz S 2002 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 23
- [18] Tang W K S, Zhong G Q, Chen G, Man K F 2001 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **48** 1369
- [19] Zarei A 2015 *Nonlinear Dyn.* **81** 585
- [20] More C, Vlad R, Chauveau E 2010 *Nonlinear Dyn.* **59** 45
- [21] Huan S M, Li Q D, Yang X S 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1915
- [22] Lü J H, Yu X H, Chen G R 2003 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **50** 198
- [23] Yalcin M, Suykens J, van de Walle J 2005 *Chaos Modeling and Control Systems Design* (Singapore: World Scientific) p59
- [24] Lü J H, Chen G R, Yu X H, Leung H 2004 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **51** 2476
- [25] Lü J H, Yu S M, Leung H, Chen G R 2006 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **53** 149

Julia fractal based multi-scroll memristive chaotic system*

Xiao Li-Quan¹⁾²⁾ Duan Shu-Kai^{1)2)†} Wang Li-Dan¹⁾²⁾

1) (School of Electronic and Information Engineering, Southwest University, Chongqing 400715, China)

2) (Chongqing Key Laboratory of Nonlinear Circuits and Intelligent Information Processing, Chongqing 400715, China)

(Received 28 December 2017; revised manuscript received 5 February 2018)

Abstract

A memristor can be used in chaotic system as a nonlinear term, and thus enhancing the complexity of the chaotic system. Fractal theory is a leading and important branch of nonlinear science, and has been widely studied in many fields in the past few decades. The fractal and chaos are bound tightly and their relevant researches are well-established, but few of them focus on the research of the possibility of combining the fractal and the chaotic system. In order to obtain a multi scroll chaotic attractor, the fractal process is novelty introduced into the memristive chaotic system. In this paper, at first, a new memristive chaotic system is proposed. Then, the dynamic characteristics of the system are discussed from the aspects of symmetry, dissipation, stabilization of equilibrium points, power spectrum, Lyapunov exponent and fractional dimension. A mapping relationship based on classical Julia fractal is established. Through this mapping relationship, a multi-scroll memristive chaotic system based on the Julia fractal is obtained. Moreover, several deformed Julia fractal processes are applied to the memristive chaotic system, and abundant chaotic attractors are obtained. For example, the square term of the Julia fractal expression is multiplied by a coefficient, and according to the difference in coefficient, the resulting chaotic attractors have the same shape but different sizes. The exponent of the square term in the Julia fractal is changed into a variable, and the chaotic attractor of different scroll numbers is obtained according to the difference in power exponent. In addition, a rich multi-scroll chaotic attractor is obtained by using the fractal expression in the form of weighted sum polynomial. Finally, the influence of a complex constant in the fractal process on the system is discussed. The simulation results show that the combination of fractal process and chaotic system can obtain rich chaotic attractors, such as multi-scroll chaotic attractors. In general, compared with the single-scroll chaotic attractor, the multi-scroll chaotic attractor has a higher complexity and more adjustability. In addition, compared with other multi-scroll chaotic system, the proposed multi-scroll chaotic system is easy to adjust the number of the scrolls. To summarize, this work not only provides a new method of generating multi-scroll chaotic attractors, but also makes up for the lack of smoothness of the chaotic system caused by using functional methods.

Keywords: chaotic system, memristor, dynamic characteristics, Julia fractal process

PACS: 05.45.Ac, 05.45.Df, 05.45.Pq, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.67.20172761

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61372139, 61571372, 61672436), the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Ministry of Education of China (Grant Nos. XDJK2016A001, XDJK2014A009), and the Chongqing Basic Science and Frontier Technology Research, China (Grant No. cstc2017jcyjBX0050).

† Corresponding author. E-mail: duansk@swu.edu.cn