

变声速弹性沉积层下压缩波与剪切波的耦合影响

刘亚琴 杨士莪 张海刚 王笑寒

Compressional-shear wave coupling induced by velocity gradient in elastic medium

Liu Ya-Qin Yang Shi-E Zhang Hai-Gang Wang Xiao-Han

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 234303 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20181600

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20181600>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I23>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[含磁电弹夹层的压电/压磁声子晶体带隙特性研究](#)

Band gaps of piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with magneto-electro-elastic interlayer

物理学报.2018, 67(19): 194303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20180925>

[内插扩张室声子晶极管路带隙特性研究](#)

Properties of band gaps in phononic crystal pipe consisting of expansion chambers with extended inlet/outlet

物理学报.2018, 67(7): 074301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172383>

[声场中空化气泡的耦合振动及形状不稳定性的研究](#)

Coupled oscillation and shape instability of bubbles in acoustic field

物理学报.2018, 67(3): 034301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20171573>

## 变声速弹性沉积层下压缩波与剪切波的耦合影响\*

刘亚琴<sup>3)</sup> 杨士莪<sup>1)2)3)</sup> 张海刚<sup>1)2)3)</sup>† 王笑寒<sup>3)</sup>

1) (哈尔滨工程大学, 水声技术重点实验室, 哈尔滨 150001)

2) (哈尔滨工程大学, 海洋信息获取与安全工业和信息化部重点实验室, 哈尔滨 150001)

3) (哈尔滨工程大学水声工程学院, 哈尔滨 150001)

(2018年8月27日收到; 2018年9月27日收到修改稿)

针对压缩波声速 $n^2$ 线性分布、剪切波声速平方线性分布的变参数弹性海底沉积层中声场建模问题, 建立了关于压缩波与剪切波本征函数的偏微分耦合方程组, 基于微扰法, 通过逐次微分给出了本征函数的近似解析解. 理论分析表明, 只有剪切波声速平方的梯度不为零的情况下, 沉积层中的压缩波才会与剪切波产生耦合. 压缩波与剪切波耦合的影响会带来本征值的变化, 其对近场声传播的影响较小, 但远距离声传播损失的预报在考虑耦合后与实测数据符合得更好. 此外, 耦合还会导致沉积层中本征函数及其导数的变化, 使得耦合与非耦合情况下沉积层中质点位移场不同. 通过与商用声场软件 COMSOL 计算结果的对比分析检验了本文方法的正确性, 且本文方法计算时间远小于 COMSOL 软件运行时间.

关键词: 弹性沉积层, 声速变化, 耦合, 近似解析式

PACS: 43.30.-k, 43.25.Ba, 43.30.Ma

DOI: 10.7498/aps.67.20181600

## 1 引言

海洋中的声传播是一个极其复杂的过程, 浅海中声传播相较深海来说更为复杂. 因为在浅海波导中, 声波的传播受到海底界面的影响更严重. 在实际的海洋环境中, 海底沉积层中的声速(压缩波声速和剪切波声速)一般是随深度变化的<sup>[1]</sup>. 多数的文献和实验结果表明, 疏松的海洋沉积层中剪切波声速一般随深度连续增加, 并且声速正比于 $z^{\nu}$  ( $z$ 以海水与沉积层交界面为基准)<sup>[2-7]</sup>. 压缩波与剪切波声速随深度变化的特征意味着声波与海底相互作用的性质在低频和高频时是截然不同的. 对于大入射角、远距离的传播问题, 海底的高频响应可以将海底当作流体来处理<sup>[8]</sup>. Liu等<sup>[9,10]</sup>在有液态沉积层(密度随深度为广义指数变化, 压缩波声速

为常数、 $n^2$ 线性或平方反比形式)的环境下, 研究了粗糙海底的平面波散射声场的空间功率谱密度以及平面波反射系数, 为海底声学的研究提供了典型的环境模型. 但是其研究没有考虑沉积层中的剪切特性. 如果能量穿透沉积层透射在沉积层-弹性基底界面上, 那么流体模型就不再适用了<sup>[8]</sup>. 弹性体中能量的向上折射导致压缩波与剪切波之间的相互耦合、转换. 由于声速的变化而导致的压缩波与剪切波之间的耦合将会对声场产生怎样的影响成为本文研究的内容.

Ewing等<sup>[11]</sup>给出了在各向同性的非均匀介质中的波动方程. 在接下来的有关研究中, 一些学者(如 Karal, Hook, Scholte)<sup>[12-14]</sup>在研究非均匀弹性介质中的波动方程时, 同时考虑了剪切波声速、压缩波声速以及密度的变化, 得到的结果极其复杂. 为了能够使问题简化且得到更加清晰的物理意义,

\* 国家自然科学基金重点项目(批准号: 11234002)、国家重点研发计划(批准号: 2016YFC1400100)和国家自然科学基金(批准号: 11474073)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhanghaigang@hrbeu.edu.cn

接下来的有关变参数弹性层的研究主要包括两个方向: 一是在某些特殊情况下给出非均匀弹性层中的解析解或近似解析解. Gupta<sup>[15]</sup>对密度为常数, 拉梅常数的变化形式为  $\lambda/\lambda_1 = \mu/\mu_1 = (1 + bz)^2$  (这里  $\lambda_1, \mu_1$  和  $b$  为常数) 的沉积层环境进行了分析, 得到了P波与S波的去耦合方程, 并且得到此种情况下的反射系数; Hall等<sup>[7]</sup>提出了半解析的反射模型, 考虑了由于剪切模量随着深度变化 ( $G(z) \propto z^p$ ) 引起的耦合效应, 导出了势函数  $P$  和势函数  $S$  的弱耦合方程、利用Born近似求解势函数  $P$  的方程; 另一个主要的研究方向是忽略剪切波及压缩波声速梯度引起的耦合. Vidmar和Foreman<sup>[16]</sup>提出了用传递矩阵的方法计算平面波反射系数的模型, 其中弹性沉积层的密度、剪切波声速、压缩波声速以及衰减可以任意变化. Westwood等<sup>[17]</sup>基于简正波理论提出了ORCA模型, 可以计算具有多层弹性环境下的声场, 且层中的剪切波速度和压缩波速度可以是常数也可以是  $n^2$  线性的, 但是在弹性层中, P波和S波的势函数满足的波动方程忽略了耦合.

上述研究在处理弹性沉积层声速变化的环境时, 一般选择忽略声速变化引起的耦合, 虽然Hall考虑了剪切模量随深度变化引起的耦合并给出了半解析的反射模型, 但是其并没有分析耦合对反射的影响. Fryer<sup>[8]</sup>用数值解法研究了由于压缩波、剪切波声速梯度引起的  $P$ - $SV$  耦合的反射率. 通过比较总反射率与忽略耦合得到的部分反射率, 得到了  $P$ - $SV$  耦合的反射率, 并研究了这种耦合对反射率的影响. 此外, 通过平面波响应函数清楚地揭示了耦合的主要结果是剪切向压缩运动的转换. 但是数值解法的计算时间会随着沉积层厚度的增加而增加. 考虑弹性沉积层声速引起的耦合效应, 本文求解弹性沉积层某种声速变化形式下声场势函数的近似解析解, 进而研究此种耦合对低频声场的影响以及声学参数对耦合效应的影响程度.

本文的内容主要包括: 第2部分是声场建模, 重点研究变参数弹性沉积层中压缩波与剪切波本征函数的近似解析解; 第3部分仿真验证本文方法的有效性, 研究剪切波、压缩波的耦合对低频声场(水中声压场以及沉积层中质点位移场)的影响; 第4部分研究弹性沉积层中声学参数对耦合的影响; 第5部分是实验数据处理; 最后一部分是结论.

## 2 声场建模

考虑流体层中单频点声源激发的声场问题, 在柱坐标系下建立如图1所示的环境模型. 时间因子为  $\exp(-j\omega t)$ , 为了方便, 在以下的推导过程中省略时间因子.

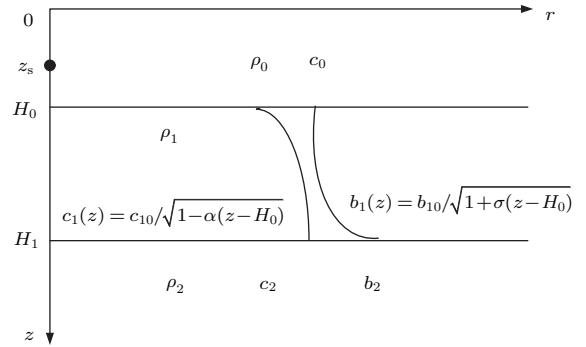


图1 环境模型

Fig. 1. Environment model.

模型中, 声源位于深度为  $H_0$ , 密度与声速分别为  $\rho_0$  和  $c_0$  的均匀流体层中, 点声源的坐标为  $(0, z_s)$ ; 弹性沉积层厚度为  $(H_1 - H_0)$ , 且沉积层中密度、压缩波、剪切波声速分别为  $\rho_1, c_1(z), b_1(z)$ ; 半无限弹性海底中密度、压缩波、剪切波声速分别为  $\rho_2, c_2, b_2$ . 各介质层中压缩波与剪切波势函数分别为  $\varphi_0; \varphi_1, \psi_1; \varphi_2, \psi_2$ .

文献<sup>[18]</sup>中已经证明, 在柱坐标系下,  $\psi_1$  和  $\psi_2$  只有沿  $\theta$  方向的分量, 记  $\theta$  方向上的分量分别为  $\psi_1$  和  $\psi_2$ , 这样, 矢量势函数就可以转化为标量势函数, 将这些标量势函数用 Fourier-Bessel 积分表示. 记:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \int_0^\infty Z_0(z, \xi) J_0(\xi r) \xi d\xi; \\ \varphi_1 &= \int_0^\infty Z_1(z, \xi) J_0(\xi r) \xi d\xi; \\ \psi_1 &= \int_0^\infty G_1(z, \xi) J_1(\xi r) \xi d\xi; \\ \varphi_2 &= \int_0^\infty Z_2(z, \xi) J_0(\xi r) \xi d\xi; \\ \psi_2 &= \int_0^\infty G_2(z, \xi) J_1(\xi r) \xi d\xi. \end{aligned}$$

参看文献<sup>[18, 19]</sup>,  $Z_0(z, \xi), Z_2(z, \xi)$  和  $G_2(z, \xi)$  的表达式为:

$$Z_0(z, \xi) = \begin{cases} A \sin \beta_0 z, & 0 \leq z < z_s, \\ B \sin \beta_0 z + C \cos \beta_0 z, & z_s \leq z < H_0, \end{cases} \quad (1)$$

$$Z_2(z, \xi) = F_1 e^{i\beta_2 z}, \quad z \geq H_1, \quad (2)$$

$$G_2(z, \xi) = F_2 e^{i\gamma_2 z}, \quad z \geq H_1, \quad (3)$$

其中  $\beta_0^2 = k_0^2 - \xi^2$ ,  $\beta_2^2 = k_2^2 - \xi^2$ ,  $\gamma_2^2 = \chi_2^2 - \xi^2$ ,  $k_0 = \omega/c_0$ ,  $k_2 = \omega/c_2$ ,  $\chi_2 = \omega/b_2$ .

在变参数弹性沉积层中, 压缩波与剪切波声速随深度变化将会引起二者之间的耦合, 具体表征为函数  $Z_1(z, \xi)$  和  $G_1(z, \xi)$  形成耦合方程组. 此前没有相关文献求解此种环境, 本文建立、求解耦合方程组过程如下.

在变参数弹性介质中,  $\varphi_1, \psi_1$  所满足的波动方程为 [20]:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \mathbf{u}_1 \\ & = \nabla(c_1^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_1) - b_1^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_1 \\ & + \frac{db_1^2}{dz} \left\{ \left[ \frac{\partial u_{1z}}{\partial r} + \frac{\partial u_{1r}}{\partial z} \right] \mathbf{i}_r \right. \\ & \left. - 2 \left[ \frac{\partial u_{1r}}{\partial r} + \frac{u_{1r}}{r} \right] \mathbf{i}_z \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 & = \nabla \varphi_1 + \nabla \times \psi_1 \\ & = \nabla \varphi_1 - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_1) \mathbf{i}_z. \end{aligned}$$

对波动方程 (4) 式分别取散度和旋度, 进行化简整理 (具体过程详见附录 A), 可得

$$\nabla^2 (c_1^2 \nabla^2 \varphi_1 + \omega^2 \varphi_1 + 2\sigma \xi b_{10}^2 \psi_1) = 0, \quad (5)$$

$$\nabla^2 (-b_1^2 \nabla^2 \psi_1 - \omega^2 \psi_1 - 2\sigma \xi b_{10}^2 \varphi_1) = 0. \quad (6)$$

在变参数弹性介质中  $Z_1(z, \xi)$  和  $G_1(z, \xi)$  所满足的方程为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 Z_1(z, \xi)}{\partial z^2} + \beta_1^2(z, \xi) Z_1(z, \xi) \\ & + 2\sigma \xi \frac{b_{10}^2}{c_1^2(z)} G_1(z, \xi) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 G_1(z, \xi)}{\partial z^2} + \gamma_1^2(z, \xi) G_1(z, \xi) \\ & + 2\sigma \xi \frac{b_{10}^2}{b_1^2(z)} Z_1(z, \xi) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \beta_1^2(z, \xi) & = [\omega/c_1(z)]^2 - \xi^2, \\ \gamma_1^2(z, \xi) & = [\omega/b_1(z)]^2 - \xi^2. \end{aligned}$$

观察 (7) 和 (8) 式组成的耦合方程组, 考虑特殊情况  $\sigma = 0$  时, 即横波声速不随深度变化, 此时方程组 (7) 和 (8) 式为:

$$\frac{\partial^2 Z_1(z, \xi)}{\partial z^2} + \beta_1^2(z, \xi) Z_1(z, \xi) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 G_1(z, \xi)}{\partial z^2} + \gamma_1^2 G_1(z, \xi) = 0. \quad (10)$$

此时, 无论纵波声速如何变化, 横纵波之间无耦合. 但在一般情况下,  $\sigma \neq 0$ , 横纵波之间发生耦合, 此前一般都是利用数值处理方法来处理 (7) 和 (8) 式, 随着沉积层厚度的增加, 数值处理方法计算时间增加. 本文提出一种近似解析方法求解耦合方程 (7) 和 (8). 考虑到实际情况中  $\alpha, \sigma$  均很小、其二阶小量要远小于  $\alpha, \sigma$  的值, 在求解过程中忽略有关二阶小量.

记  $P(z, \xi) = \frac{\partial^2 Z_1(z, \xi)}{\partial z^2} + \beta_1^2(z, \xi) Z_1(z, \xi)$ ,  $F(z, \xi) = \frac{\partial^2 G_1(z, \xi)}{\partial z^2} + \gamma_1^2(z, \xi) G_1(z, \xi)$ , 则方程 (7) 和 (8) 记为:

$$P(z, \xi) = -2\sigma \xi \frac{b_{10}^2}{c_1^2(z)} G_1(z, \xi), \quad (11)$$

$$F(z, \xi) = -2\sigma \xi \frac{b_{10}^2}{b_1^2(z)} Z_1(z, \xi). \quad (12)$$

对方程 (11) 和 (12) 分别进行逐次微分, 可得

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + 2\alpha \frac{c_1^2}{c_{10}^2} \frac{\partial P}{\partial z} + \gamma_1^2 P \approx 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2\sigma \frac{b_{10}^2}{b_1^2} \frac{\partial F}{\partial z} + \beta_1^2 F \approx 0. \quad (14)$$

至此, 耦合方程组转化成了非耦合方程 (13) 和 (14). 根据方程 (13) 和 (14) 可求得函数  $P(z, \xi)$  和  $F(z, \xi)$ , 进而可求得本征函数  $Z_1(z, \xi)$  和  $G_1(z, \xi)$  的表达式.

方程 (13) 和 (14) 均是齐次微分方程, 可通过变数代换的方法将其转化为可解情况 [21]. 具体求解过程在附录 B 中给出, 方程的解为:

$$\begin{aligned} & P(z, \xi) \\ & = [1 - \alpha(z - H_0)][D_1 y_3^*(z) + D_2 y_4^*(z)], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & F(z, \xi) \\ & = \frac{1}{1 + \sigma(z - H_0)} [C_1 y_1^*(z) + C_2 y_2^*(z)], \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$y_1^*(z) = u^{1/3} H_{1/3}^{(1)}(u); \quad y_2^*(z) = u^{1/3} H_{1/3}^{(2)}(u),$$

$$u = \frac{2}{3k_{10}^2 \alpha} \{k_{10}^2 [1 - \alpha(z - H_0)] - \xi^2\}^{\frac{3}{2}},$$

$$k_{10} = \omega/c_{10}; \quad y_3^* = S(z) V^{\frac{1}{3}} H_{1/3}^{(1)}(V),$$

$$y_4^* = S(z) V^{\frac{1}{3}} H_{1/3}^{(2)}(V), \quad S(z) = V^{\frac{1}{6}} / Q^{\frac{1}{2}},$$

$$Q(z) = \left[ \frac{k_{20}^2}{1 + \sigma(z - H_0)} - \xi^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$k_{20} = \omega/b_{10}, V(z) = \int_z^{z_t} Q(x)dx.$$

将  $P(z, \xi)$  和  $F(z, \xi)$  的表达式代入方程 (11) 和 (12), 可得  $Z_1(z, \xi)$  和  $G_1(z, \xi)$  的表达式为:

$$Z_1(z, \xi) = C_1 y_1(z) + C_2 y_2(z), \quad (17)$$

$$G_1(z, \xi) = D_1 y_3(z) + D_2 y_4(z), \quad (18)$$

其中

$$y_1(z, \xi) = -\frac{1}{2\sigma\xi} y_1^*(z, \xi),$$

$$y_2(z, \xi) = -\frac{1}{2\sigma\xi} y_2^*(z, \xi),$$

$$y_3(z) = -\frac{c_{10}^2}{2\sigma\xi b_{10}^2} y_3^*(z),$$

$$y_4(z) = -\frac{c_{10}^2}{2\sigma\xi b_{10}^2} y_4^*(z).$$

从  $Z_1$  和  $G_1$  的表达式可以看出, 剪切波声速的  $\sigma$  值将会影响  $Z_1$  的值, 而压缩波声速中  $\alpha$  对  $G_1$  的影响在  $G_1$  表达式中没有体现, 是由于在求解  $G_1$  表达式的过程中, 忽略了 (B1) 方程 (详见附录 B) 中  $\alpha$  的二阶小量. 这里反而是  $c_{10}$  的值影响  $G_1$  的表达式, 但是在考虑是否引起压缩波与剪切波之间的耦合, 究其原因是由于声速的变化, 所以  $c_{10}$  的值的改变不会对耦合产生影响.

根据点源条件、液/固边界条件和固/固边界条件, 可得诸待定系数所满足的方程组为

$$[a_{ij}]_{9 \times 9} \mathbf{X} = \mathbf{Y}, \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{X} = [A \ B \ C \ C_1 \ C_2 \ D_1 \ D_2 \ F_1 \ F_2]^T,$$

$$\mathbf{Y} = [0 \ 2/\beta_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$[a_{ij}]_{9 \times 9}$  的具体表达式见附录 C. 求解 (19) 式可得诸系数的值, 进而得到势函数的具体积分表达式.

进一步求势函数的值可以用快速傅里叶变换 (FFT) 方法. 以水中势函数  $\varphi_0(r, z)$  为例,  $\varphi_0(r, z)$

的积分表达式为 [22]

$$\varphi_0(r, z) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi r}} \int_0^\infty Z_0(z, \xi) \sqrt{\xi} e^{i\xi r} d\xi. \quad (20)$$

利用 FFT 变换就可得到势函数的近似表达式:

$$\begin{aligned} \varphi_0(r_j, z) &= \frac{\Delta\xi}{\sqrt{2\pi r}} e^{i(\xi_{\min} r_j - \frac{\pi}{4})} \\ &\times \sum_{l=0}^{N_S-1} [Z_0(z, \xi_l) e^{i r_{\min} l \Delta\xi} \sqrt{\xi_l}] e^{i \frac{2\pi l j}{N_S}}. \end{aligned} \quad (21)$$

同样的方法可以计算出沉积层和半无限弹性海底中势函数的表达式.

### 3 压缩波与剪切波的耦合影响

#### 3.1 耦合对水中声压场的影响

为验证本文方法 (考虑压缩波与剪切波之间的耦合) 的有效性, 以 COMSOL 软件仿真得到的声压传播损失作为参照. 此外, 为了分析耦合对水中声压场的影响, 仿真非耦合情况下的声压传播损失. 在仿真验证之前, 先简单介绍非耦合情况与耦合情况声场计算的不同.

1) 未考虑耦合的弹性沉积层中,  $Z_1(z, \xi)$  和  $G_1(z, \xi)$  所满足的方程 (7) 和 (8) 式退化为:

$$\frac{\partial^2 Z_1(z, \xi)}{\partial z^2} + \beta_1^2(z, \xi) Z_1(z, \xi) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 G_1(z, \xi)}{\partial z^2} + \gamma_1^2(z, \xi) G_1(z, \xi) = 0. \quad (23)$$

2) 非耦合弹性沉积层中的法向应力和切向应力的表达式相较于耦合情况分别缺失  $\rho_1 2\sigma\xi b_{10}^2 G_1(z)$  和  $\rho_1 2\sigma\xi b_{10}^2 Z_1(z)$  项.

在仿真过程中, 以具体的环境 (如表 1 所列) 为例, 取声源频率  $f = 25$  Hz, 声源深度  $Z_s = 100$  m, 接收深度  $Z_r = 150$  m.

图 2 (a) 和图 2 (b) 是仿真环境 I 下 COMSOL 软件和耦合以及非耦合情况下计算出来的声压传播损失.

表 1 环境 I 的声场参数

Table 1. Sound field parameters of the ocean environment I.

介质层	深度/m	密度/g·cm <sup>-3</sup>	压缩波声速/m·s <sup>-1</sup>	剪切波声速/m·s <sup>-1</sup>	压缩波衰减 /dB·λ <sup>-1</sup>	剪切波衰减 /dB·λ <sup>-1</sup>
流体	200	1.0	1500	—	—	—
沉积层	300	1.2	$\frac{1700}{\sqrt{1 - 0.007(z - 200)}}$	$800\sqrt{1 + 0.007(z - 200)}$	0.1	0.1
半无限海底	—	2.5	5000	2500	0.5	0.5

从图2(a)中可以看出, 本文方法计算出来的传播损失与COMSOL软件计算出来的传播损失基本一致, 只有在某几处距离上有些偏差, 产生这些偏差的原因是因为本文方法在推导过程中忽略了 $\alpha, \sigma$ 的二阶小量, 且快速场方法在计算的过程中距离是抽样间距(抽样间距 $\Delta r = 2\pi/(M\Delta k_r)$ , 其中 $\Delta k_r$ 是波数抽样间距,  $M$ 是计算的点数). 仿真结果表明了本文方法的有效性. 非耦合与COMSOL软件计算的传播损失曲线在近距离处基本符合, 但是随着距离的增加, 两条曲线有较大的偏差, 如图2(b)所示. 图3为耦合和非耦合算法中积分核函数 $Z_0(z, \xi)$ 的幅度沿实水平波数轴的分布图.

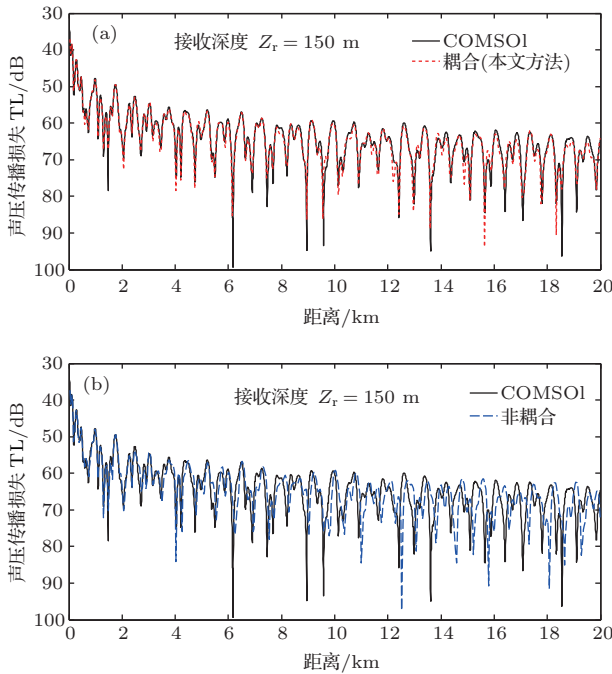


图2 声压传播损失对比图 (a) 耦合情况; (b) 非耦合情况  
Fig. 2. Comparison chart of TL curves for sound pressure propagation loss: (a) In coupled case; (b) in uncoupled case.

由于沉积层中压缩波、剪切波衰减均为 $0.1 \text{ dB}/\lambda$ , 故在实轴上不存在极点, 但是相应的极点明显地表现为极陡的峰(极陡的峰对应的水平波数可以理解为简正波理论中的本征值). 从图3中的局部放大图可以看出, 两种方法计算的陡峰对应的水平波数(即本征值)有些微变化, 具体值如表2所列. 从表2中可以看出, 考虑耦合分别导致3处陡峰处0.21%, 0.25%, 0.14%的本征值变化, 本征值的改变导致水中声场的变化.

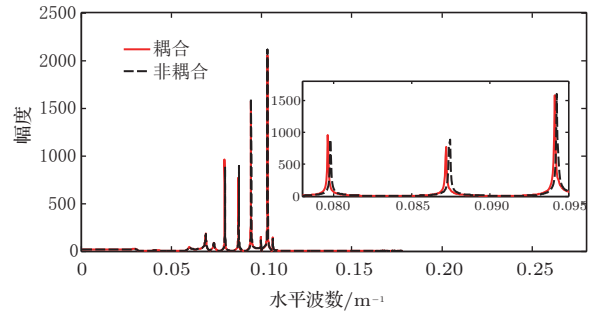


图3 积分核函数 $Z_0(z, \xi)$ 的幅度沿实水平波数的分布图  
Fig. 3. Distribution of amplitude of integration kernel  $Z_0(z, \xi)$  along real horizontal wavenumber axis.

表2 耦合与非耦合下陡峰对应的水平波数  
Table 2. Horizontal wave numbers corresponding to steep peaks under coupled and uncoupled conditions.

耦合/ $\text{m}^{-1}$	非耦合/ $\text{m}^{-1}$	二者之差/非耦合/%
0.07963	0.0798	0.21
0.08721	0.08743	0.25
0.09415	0.09428	0.14

图4(a)为耦合与非耦合情况下计算出来的传播损失与COMSOL软件仿真的传播损失之差, 图4(b)和图4(c)分别为在0—5 km和5—20 km距离范围内, 耦合、非耦合两种情况下计算的传播损失与COMSOL软件仿真的传播损失之差绝对值的直方图. 其中红色代表耦合情况、蓝色代表非耦合情况. 在0—5 km距离范围内, 耦合与非耦合两种算法的传播损失偏差均偏小, 但是考虑耦合, 偏差绝对值主要集中在0—2 dB (95.75%), 而非耦合的偏差绝对值主要集中在0—5 dB (94.32%); 在5—20 km距离范围内, 考虑耦合时传播损失偏差绝对值主要集中在0—3 dB (90.1%), 最大差值也仅为11.73 dB, 而非耦合情况下, 偏差绝对值在3—12 dB范围内的数据所占比例达到49.99%, 在12 dB误差以上的数据也达到了9.68%的比重. 对比图2、图3以及图4的仿真结果, 表明在此种环境, 压缩波、剪切波之间的耦合影响水中声场, 若忽略耦合, 在5—20 km距离范围内, 传播损失计算偏差绝对值最大可达35.41 dB, 声场计算偏差较大.

在运行环境一致的情况下, 本文方法计算时间要远小于COMSOL软件计算时间. 以环境I为基准, 改变沉积层厚度而其他参数不变时, 本文方法计算时间与COMSOL软件计算时间如表3所列.

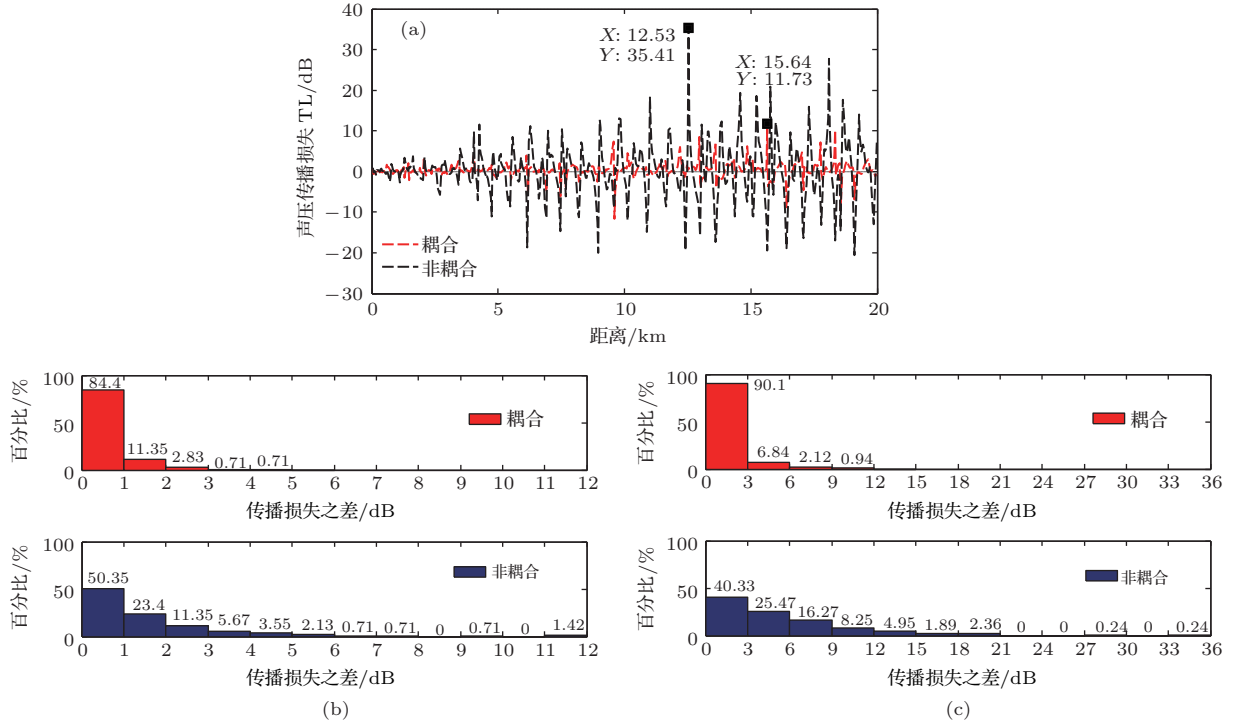


图4 (a) 传播损失之差; (b) 0—5 km的直方图; (c) 5—20 km的直方图  
 Fig. 4. (a) Difference of TLs; (b) histogram in the range of 0 to 5 km; (c) histogram in the range of 5 to 20 km.

表3 计算时间对比表  
 Table 3. Comparison table of calculation time.

沉积层厚度/m	本文方法/s	COMSOL 软件/s
30	6.21656	88
50	6.23938	94
100	6.52737	114

### 3.2 耦合对沉积层中质点位移场的影响

沉积层中质点水平位移、垂直位移的表达式:

$$u_r = u_{rc} + u_{rs}, \quad u_z = u_{zc} + u_{zs}, \quad (24)$$

其中  $u_{rc}$ ,  $u_{zc}$  是压缩波产生的水平位移与垂直位移;  $u_{rs}$ ,  $u_{zs}$  是剪切波产生的水平位移与垂直位移.

其中:

$$\begin{aligned} u_{rc} &= - \int_0^\infty \xi Z_1(z, \xi) J_1(\xi r) \xi d\xi \\ &= - \int_0^\infty \xi [C_1 y_1(z) + C_2 y_2(z)] J_1(\xi r) \xi d\xi, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{rs} &= - \int_0^\infty G'_1(z, \xi) J_1(\xi r) \xi d\xi \\ &= - \int_0^\infty [D_1 y'_3(z) + D_2 y'_4(z)] J_1(\xi r) \xi d\xi, \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{zc} &= \int_0^\infty Z'_1(z, \xi) J_0(\xi r) \xi d\xi \\ &= \int_0^\infty [C_1 y'_1(z) + C_2 y'_2(z)] J_0(\xi r) \xi d\xi, \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{zs} &= \int_0^\infty \xi G_1(z, \xi) J_0(\xi r) \xi d\xi \\ &= \int_0^\infty \xi [D_1 y_3(z) + D_2 y_4(z)] J_0(\xi r) \xi d\xi. \quad (28) \end{aligned}$$

(25)—(28) 式表明, 压缩波与剪切波产生的水平位移与垂直位移是  $Z_1(z, \xi)$ ,  $G_1(z, \xi)$ ,  $Z'_1(z, \xi)$  和  $G'_1(z, \xi)$  的积分函数.

仿真环境如表 4 所列, 声源频率  $f = 25$  Hz, 声源深度  $Z_s = 100$  m. 图 5 给出了距离为 3811 m 时, 质点水平位移与垂直位移随深度的变化. 其中红色实线代表耦合算法下压缩波与剪切波共同作用下产生的水平位移, 黑色实线是耦合算法下只计算剪切波产生的水平位移, 蓝色实线是耦合算法下只计算压缩波产生的水平位移; 相对应的虚线代表的是非耦合情况. 图 5 表明, 压缩波、剪切波以及二者共同作用产生的水平位移、垂直位移在耦合和非耦合情况下均不同, 即耦合改变沉积层中质点的位移场. 究其原因, 是由于耦合与非耦合情况下本征函数  $Z_1(z, \xi)$  和  $G_1(z, \xi)$  及其导数  $Z'_1(z, \xi)$  和  $G'_1(z, \xi)$  的不同. 图 6 给出了本征值对应下本征函数及其导数随深度的变化. 耦合与非耦合情况下, 压缩波、剪切波以及二者共同作用产生的水平位移、垂直位移由于本征函数及导数的不同而不同.

表4 环境II的声场参数  
Table 4. Parameters of the ocean environment II.

介质层	深度/m	密度/g·cm <sup>-3</sup>	压缩波声速/m·s <sup>-1</sup>	剪切波声速/m·s <sup>-1</sup>	压缩波衰减 /dB·λ <sup>-1</sup>	剪切波衰减 /dB·λ <sup>-1</sup>
流体	200	1.0	1500	—	—	—
沉积层	230	1.2	$1700/\sqrt{1-0.001(z-200)}$	$800\sqrt{1+0.01(z-200)}$	0.1	0.1
半无限海底	—	1.5	3400	1700	0.5	0.5

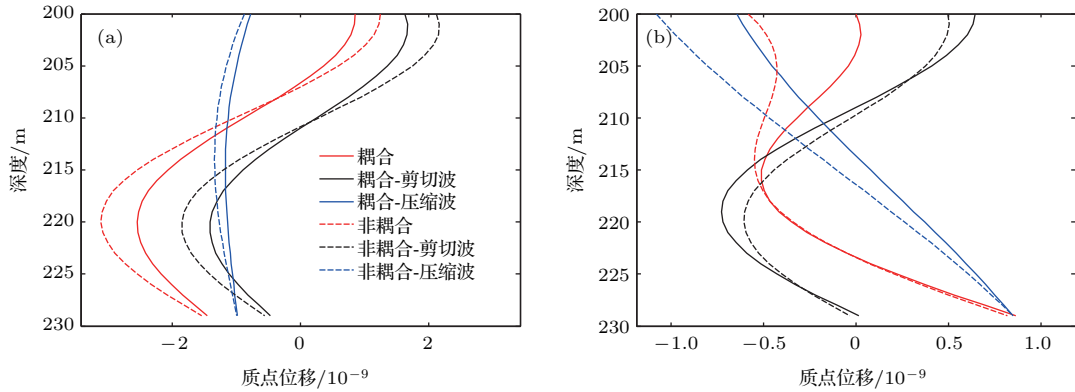


图5 水平位移与垂直位移随深度变化  
Fig. 5. Horizontal and vertical displacement according to depth changes.

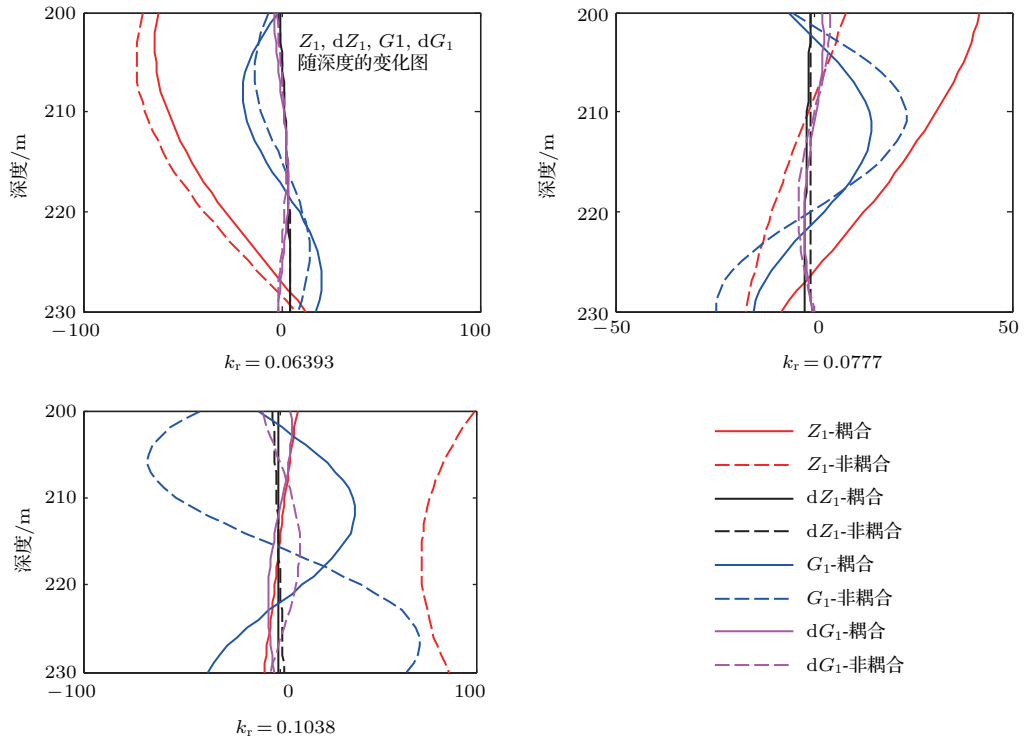


图6 耦合与非耦合情况下  $Z_1(z, \xi)$ ,  $G_1(z, \xi)$  及其导数随深度的变化  
Fig. 6. Functions  $Z_1(z, \xi)$ ,  $G_1(z, \xi)$  and derivative functions vary with depth in coupled and uncoupled cases.

图5表明, 耦合和非耦合情况下, 剪切波产生的水平位移、垂直位移曲线分别与共同作用产生的水平位移、垂直位移曲线类似, 随深度变化有两个极值; 压缩波产生的水平位移、垂直位移曲线随深

度单调变化。可以看出, 剪切波在水平位移和垂直位移的产生中起主导作用。从  $u_{rc}, u_{zc}, u_{rs}, u_{zs}$  的表达式(25)–(28)看出, 压缩波产生的位移是  $y_1(z), y_2(z), y'_1(z), y'_2(z)$  的积分函数, 剪切波产生的位移

是  $y_3(z)$ ,  $y_4(z)$ ,  $y'_3(z)$ ,  $y'_4(z)$  的积分函数. 图 7 给出不同水平波数  $k_r$  (即  $\xi$ ) 时, 这些被积函数随深度的变化图. 在  $k_r$  值相同时,  $y_3(z)$ ,  $y_4(z)$  的值要远大于  $y_1(z)$ ,  $y_2(z)$  的值. 所以合成的垂直位移以及水平位移是  $y_3(z)$ ,

$y_4(z)$  以及  $y'_3(z)$ ,  $y'_4(z)$  起主导作用, 即剪切波起主导作用. 从图 7 中可见,  $y_3(z)$ ,  $y_4(z)$ ,  $y'_3(z)$ ,  $y'_4(z)$  随深度的变化主要有两种, 一种是有两个极值点, 另一种是只有一个极值点, 故合成的水平位移、垂直位移随深度的变化也应该是这两种形式之一.

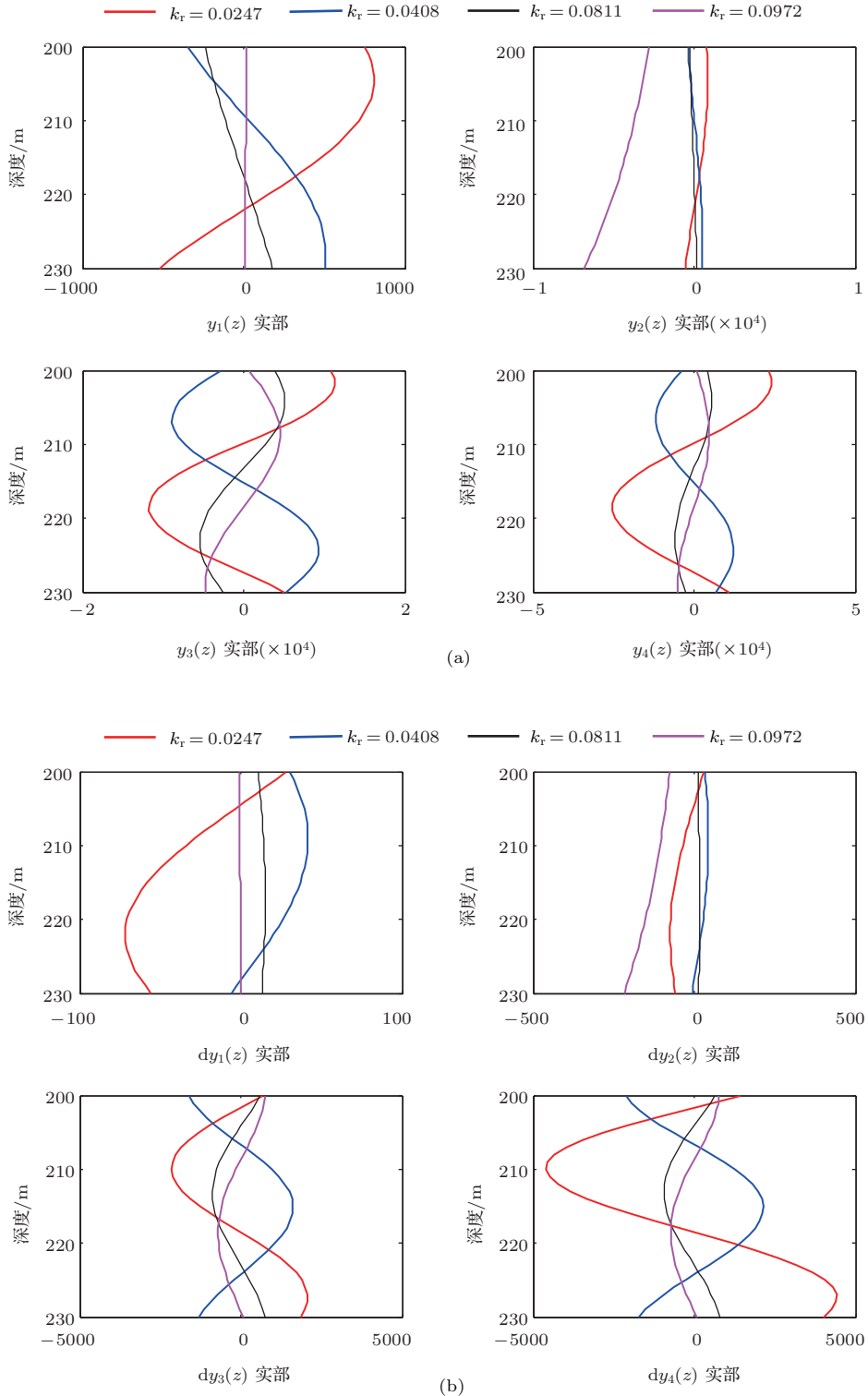


图 7 位移被积函数随深度的变化

Fig. 7. Changes of integrand of displacement according to depth.

### 4 沉积层参数对耦合程度的影响

弹性沉积层中压缩波与剪切波声速随深度的变化引起二者之间的耦合, 进而对声场产生影响, 所以这里仅考虑参数压缩波声速平方倒数的梯度  $\alpha$  和剪切波声速平方的梯度  $\sigma$  对耦合程度的影响. 这里的耦合程度表现为耦合与非耦合情况下传播损失的差值大小. 仿真环境如表 4 所列, 改变参数  $\alpha, \sigma$  的取值, 其余参数不变. 参数  $\alpha, \sigma$  的取值如表 5 所列. 仿真过程中声源频率  $f = 25$  Hz, 声源

深度  $Z_s = 100$  m, 接收深度  $Z_r = 30$  m. 图 8 给出  $\alpha, \sigma$  的不同取值时耦合与非耦合情况下声压传播

表 5 声场参数  $\alpha, \sigma$  的取值  
Table 5. Value of sound field parameter  $\alpha, \sigma$ .

编号	$\alpha$	$\sigma$	编号	$\alpha$	$\sigma$
(a)	0.001	0.001	(d)	0.001	0.006
(b)	0.08	0.001	(e)	0.001	0.008
(c)	0.1	0.001	(f)	0.001	0.01

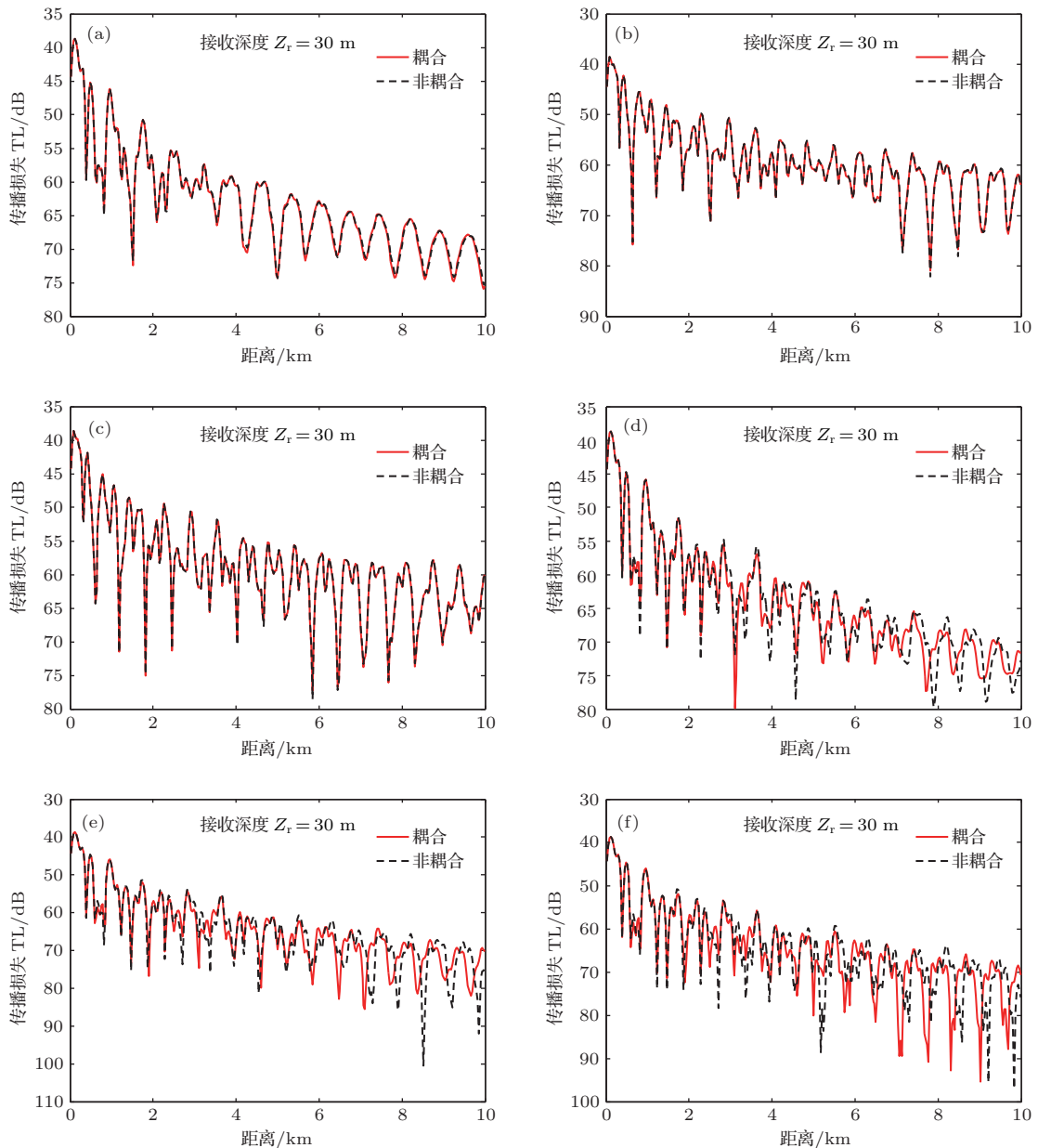


图 8  $\alpha, \sigma$  取值不同时耦合与非耦合情况下的传播损失 (a)  $\alpha = 0.001, \sigma = 0.001$ ; (b)  $\alpha = 0.08, \sigma = 0.001$ ; (c)  $\alpha = 0.1, \sigma = 0.001$ ; (d)  $\alpha = 0.001, \sigma = 0.006$ ; (e)  $\alpha = 0.001, \sigma = 0.008$ ; (f)  $\alpha = 0.001, \sigma = 0.01$

Fig. 8. Transmission loss of coupling and uncoupling when  $\alpha, \sigma$  changes: (a)  $\alpha = 0.001, \sigma = 0.001$ ; (b)  $\alpha = 0.08, \sigma = 0.001$ ; (c)  $\alpha = 0.1, \sigma = 0.001$ ; (d)  $\alpha = 0.001, \sigma = 0.006$ ; (e)  $\alpha = 0.001, \sigma = 0.008$ ; (f)  $\alpha = 0.001, \sigma = 0.01$ .

损失曲线. 图9和图10分别给出了 $\alpha$ ,  $\sigma$ 不同取值时(表5中编号(a)—(c)和编号(d)—(f))耦合与非耦合情况下5阶本征波数的结果. 图9表明, 当 $\sigma$ 值保持不变、 $\alpha$ 值增大时, 除了 $\alpha = 0.1$ 时非耦合的某阶本征波数值大于耦合情况, 耦合与非耦合算法计算出来的本征波数值相同. 在 $\alpha$ 值的增大过程中, 考虑耦合对本征波数值的改变非常小, 这也解释了图8(a), 图8(b)和图8(c)中耦合与非耦合算法计算出来的传播损失曲线基本一致的原因. 图8(a), 图8(b)和图8(c)以及图9表明, 弹性沉积层中压

缩波声速中的 $\alpha$ 值对耦合影响较小. 图10表明, 当 $\alpha$ 值保持不变、 $\sigma$ 值增大的过程中, 考虑耦合在一定程度上改变了本征波数的值, 导致耦合与非耦合算法计算出来的传播损失曲线差异增大, 如图8(d)—(f)所示. 图8(d), 图8(e)和图8(f)以及图10表明剪切波声速中的 $\sigma$ 值对耦合影响较大. 图8、图9和图10表明, 弹性沉积层中剪切波声速中 $\sigma$ 值对耦合的影响程度大于压缩波声速中 $\alpha$ 值的影响程度.

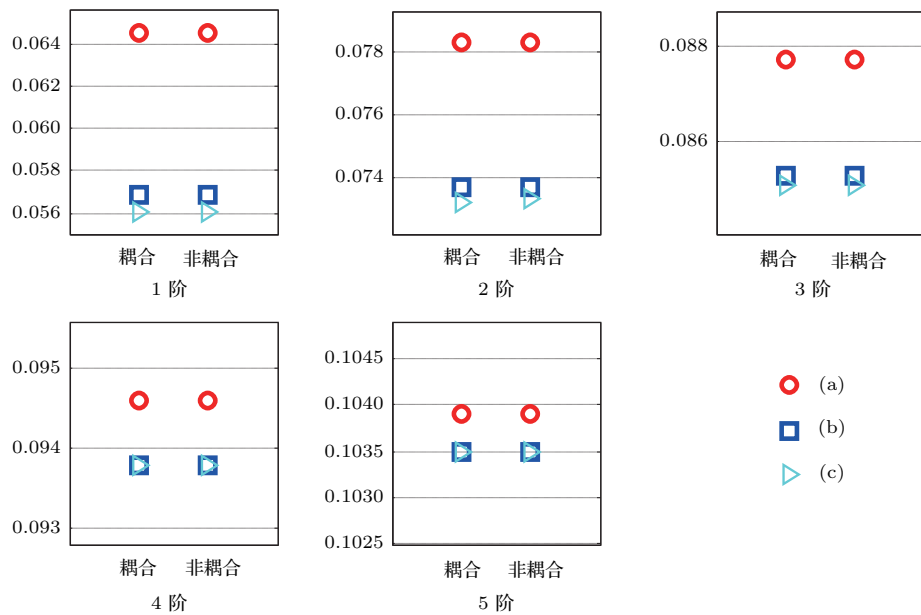


图9 耦合与非耦合情况时5阶本征波数结果 表5中编号(a), (b)和(c)三种情况时本征波数结果  
Fig. 9. Results of eigenwave number in three cases of Tab. 5 (a), (b) and (c).

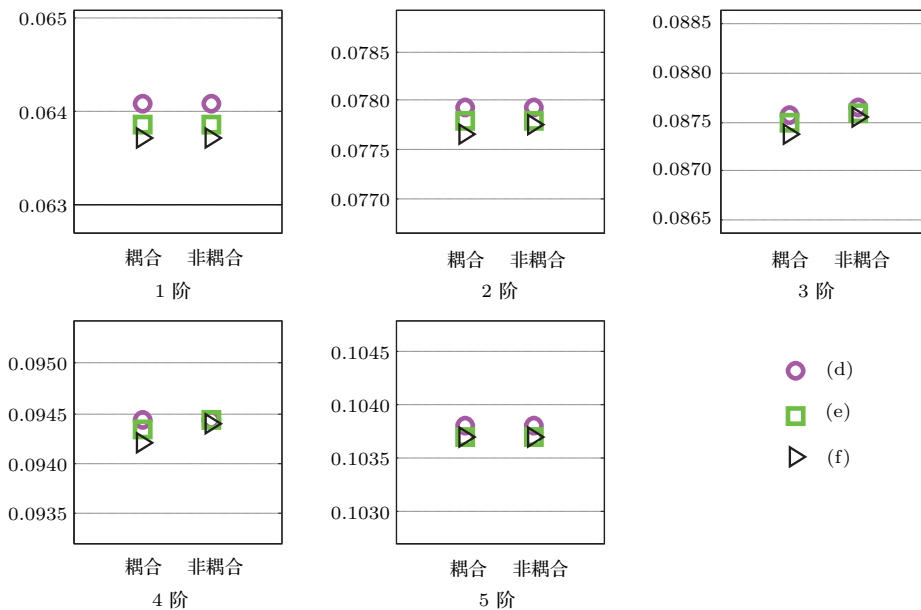


图10 耦合与非耦合情况时5阶本征波数结果 表5中编号(d), (e)和(f)三种情况时本征波数结果  
Fig. 10. Results of eigenwave number in three cases of Tab. 5 (d), (e) and (f).

## 5 实验数据验证

2018年1月,在青岛某海域进行了声传播特性的实验研究.一艘渔业运输船作为发射船,两条垂直阵列作为接收设备.发射船从远处向接收设备行驶,航行过程中的辐射噪声作为本次实验的目标声源.发射船行驶过程中进行GPS记录.实验海区深度约25 m,海底平坦.查阅该区海图可知沉积层类型为砂-粉砂-黏土.对于黏土、粉砂和砂质沉积物,压缩波和剪切波声速不是恒定不变[23,24].故在声场建模中,假设海洋环境如图1所示.参数的获取首先根据实验海区海底性质以及文献[23,24]中给出的该类海底参数的可能范围,然后进行参数反演

得到结果.

目标船有多条线谱,选取326 Hz的线谱,对其进行传播损失的计算.使用的数据来自于1号垂直阵列上海底地震波拾振器(ocean-bottom seismometer, OBS)设备的声压传感器接收的数据.OBS被放置于海底附近处.

图11(a)表明:实验结果与耦合理论计算出来的传播损失曲线趋势基本一致.图11(b)表明:未考虑耦合时计算出来的传播损失与实验结果在某些距离处有明显的趋势差异(用黑色椭圆标记).对比图11(a)和图11(b)的结果,在实际海洋环境建模,疏松沉积层中将剪切波声速假设成随深度变化并考虑由此引起的耦合能够更好地符合实际情况.

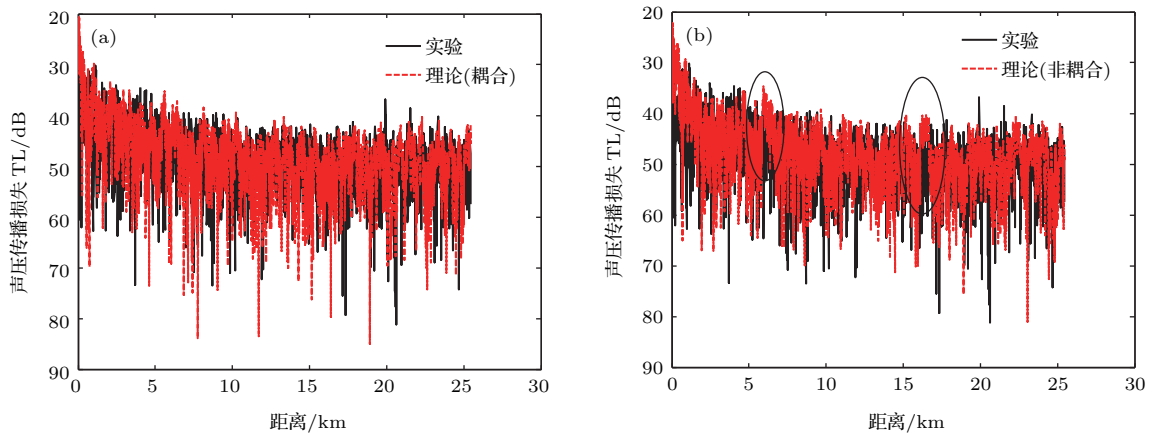


图 11 声压传播损失对比图 (a) 耦合情况; (b) 非耦合情况

Fig. 11. Comparison chart of TL curves for sound pressure: (a) In coupled case; (b) in uncoupled case.

## 6 结 论

针对弹性沉积层典型声速变化环境,求解出压缩波与剪切波本征函数的近似解析解,并分析了由于压缩波、剪切波声速随深度变化引起的耦合效应对低频声场(水中声压场、沉积层质点位移场)的影响,主要结论如下.

1) 压缩波与剪切波之间的耦合导致本征值减小,耦合对水中近场声场计算影响较小,但是对远场声场影响较大,考虑耦合可以提高远场声场预报精度.

2) 弹性沉积层中剪切波声速平方的梯度 $\sigma$ 值是压缩波与剪切波耦合的决定性因素,当剪切波声

速不随深度变化(即 $\sigma = 0$ ),压缩波与剪切波之间无耦合.仿真结果表明, $\sigma$ 值对耦合的影响程度随 $\sigma$ 值增大而变大,且 $\sigma$ 值对耦合影响程度比压缩波声速平方的倒数的梯度 $\alpha$ 值大.

3) 压缩波与剪切波之间的耦合导致沉积层中本征函数 $Z_1(z, \xi)$ ,  $G_1(z, \xi)$ 及其导数的变化,由于沉积层中压缩波、剪切波以及二者共同作用产生的水平位移、垂直位移为本征函数及导数的Fourier-Bessel积分,所以耦合与非耦合情况下沉积层中质点位移场不同.在仿真环境下,沉积层中压缩波与剪切波共同作用形成的水平位移与垂直位移随深度的变化曲线与剪切波单独产生的水平位移、垂直位移曲线相类似,剪切波在此过程中起主要作用.

附录 A

为了推导方便, 记:

$$\xi^m \varphi_1 = \begin{cases} \int_0^\infty \xi^m Z_1 J_0(\xi r) \xi d\xi, & m \text{ 为偶数,} \\ \int_0^\infty \xi^m Z_1 J_1(\xi r) \xi d\xi, & m \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

$$\xi^m \psi_1 = \begin{cases} \xi^m \int_0^\infty G_0 J_1(\xi r) \xi d\xi, & m \text{ 为偶数,} \\ \xi^m \int_0^\infty G_0 J_0(\xi r) \xi d\xi, & m \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

对波动方程 (4) 式分别取散度和旋度, 可得:

$$c_1^2 \left( \nabla^2 + \frac{2}{c_1^2} \frac{dc_1^2}{dz} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c_1^2} \frac{dc_1^2}{dz^2} + k_1^2 \right) \nabla^2 \varphi_1 + 2\sigma \xi b_{10}^2 \nabla^2 \psi_1 = 0, \quad (A1)$$

$$-b_1^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2}{b_1^2} \frac{db_1^2}{dz} \frac{\partial}{\partial z} + \gamma_1^2 \right) \nabla^2 \psi_1 - \frac{db_1^2}{dz} 2\xi \nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad (A2)$$

因为:

$$\nabla^2 (c_1^2 \nabla^2 \varphi_1) = c_1^2 \nabla^2 \nabla^2 \varphi_1 + \frac{dc_1^2}{dz} \nabla^2 \varphi_1 + 2 \frac{dc_1^2}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \varphi_1,$$

$$\nabla^2 (b_1^2 \nabla^2 \psi_1) = -b_1^2 \xi^2 \nabla^2 \psi_1 + 2 \frac{db_1^2}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi_1 + b_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 \psi_1,$$

故 (A1), (A2) 式可化为:

$$\nabla^2 (c_1^2 \nabla^2 \varphi_1 + \omega^2 \varphi_1 + 2\sigma \xi b_{10}^2 \psi_1) = 0, \quad (A3)$$

$$\nabla^2 (-b_1^2 \nabla^2 \psi_1 - \omega^2 \psi_1 - 2\sigma \xi b_{10}^2 \varphi_1) = 0. \quad (A4)$$

附录 B

对于 (13) 式, 令  $g(z) = P(z) e^{\frac{1}{2} \int \chi_1(z) dz}$ , 则  $g(z)$  所满足的方程为

$$g'' + I_g(z)g = 0, \quad (B1)$$

其中:

$$\chi_1(z) = \frac{2\alpha}{1 - \alpha(z - H_0)},$$

$$I_g(z) = \gamma_1^2(z) - \frac{2\alpha^2}{[1 - \alpha(z - H_0)]^2}.$$

忽略  $\alpha^2$  项, 则

$$g'' + \gamma_1^2(z)g \approx 0. \quad (B2)$$

其解可以表示为:  $g(z) = D_1 y_3^*(z) + D_2 y_4^*(z)$ , 其中  $S(z) = V^{\frac{1}{6}}/Q^{\frac{1}{2}}$ ,  $y_3^* = S(z)V^{\frac{1}{3}}H_{1/3}^{(1)}(V)$ ,  $y_4^* = S(z)V^{\frac{1}{3}}H_{1/3}^{(2)}(V)$ ,

$$Q(z) = \sqrt{\frac{k_{20}^2}{1 + \sigma(z - H_0)} - \xi^2}, \quad V(z) = \int_z^{z_t} Q(x) dx.$$

则  $P(z)$  的表达式为

$$P(z) = g(z) e^{-\frac{1}{2} \int \chi_1(z) dz} = [1 - \alpha(z - H_0)][D_1 y_3^*(z) + D_2 y_4^*(z)]. \quad (B3)$$

附录 C

$$[a_{ij}]_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ 0 & 0 & 0 & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ 0 & 0 & 0 & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ 0 & 0 & 0 & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix},$$

其中:  $a_{11} = \sin \beta_0 z_s$ ,  $a_{12} = -\sin \beta_0 z_s$ ,  $a_{13} = -\cos \beta_0 z_s$ ;  $a_{21} = \cos \beta_0 z_s$ ,  $a_{22} = -\cos \beta_0 z_s$ ,  $a_{23} = \sin \beta_0 z_s$ ;  $a_{32} = \beta_0 \cos(\beta_0 H_0)$ ,  $a_{33} = -\beta_0 \sin(\beta_0 H_0)$ ,  $a_{34} = -y'_{10}$ ,  $a_{35} = -y'_{20}$ ,  $a_{36} = -\xi y_{30}$ ,  $a_{37} = -\xi y_{40}$ ;  $a_{42} = \rho_0 \omega^2 \sin(\beta_0 H_0)$ ,  $a_{43} = \rho_0 \omega^2 \cos(\beta_0 H_0)$ ,  $a_{44} = \rho_1 (2b_{10}^2 \xi^2 - \omega^2) y_{10}$ ,  $a_{45} = \rho_1 (2b_{10}^2 \xi^2 - \omega^2) y_{20}$ ,  $a_{46} = 2\rho_1 b_{10}^2 \xi y'_{30} - \rho_1 2\sigma \xi b_{10}^2 y_{30}$ ,  $a_{47} = 2\rho_1 b_{10}^2 \xi y'_{40} - \rho_1 2\sigma \xi b_{10}^2 y_{40}$ ;  $a_{54} = 2\rho_1 \xi b_{10}^2 (\sigma y_{10} - y'_{10})$ ,  $a_{55} = 2\rho_1 \xi b_{10}^2 (\sigma y_{20} - y'_{20})$ ,  $a_{56} = \rho_1 (\omega^2 - 2b_{10}^2 \xi^2) y_{30}$ ,  $a_{57} = \rho_1 (\omega^2 - 2b_{10}^2 \xi^2) y_{40}$ ;  $a_{64} = y'_{11}$ ,  $a_{65} = y'_{21}$ ,  $a_{66} = \xi y_{31}$ ,  $a_{67} = \xi y_{41}$ ,  $a_{68} = -i\beta_2 F_1 e^{i\beta_2 H_1}$ ,  $a_{69} = -\xi F_2 e^{i\gamma_2 H_1}$ ;  $a_{74} = \rho_1 [2b_1^2 (H_1) \xi^2 - \omega^2] y_{11}$ ,  $a_{75} = \rho_1 [2b_1^2 (H_1) \xi^2 - \omega^2] y_{21}$ ,  $a_{76} = 2\rho_1 b_1^2 (H_1) \xi y_{31} - \rho_1 2\sigma \xi b_{10}^2 y_{31}$ ,  $a_{77} = 2\rho_1 b_1^2 (H_1) \xi y_{41} - \rho_1 2\sigma \xi b_{10}^2 y_{41}$ ,  $a_{78} = -\rho_2 (2b_2^2 \xi^2 - \omega^2) e^{i\beta_2 H_1}$ ,  $a_{79} = -2\rho_2 b_2^2 \xi i \gamma_2 F_2 e^{i\gamma_2 H_1}$ ;  $a_{84} = \xi y_{11}$ ,  $a_{85} = \xi y_{21}$ ,  $a_{86} = y'_{31}$ ,  $a_{87} = y'_{41}$ ,  $a_{88} = -\xi_1 e^{i\beta_2 H_1}$ ,  $a_{89} = -i\gamma_2 e^{i\gamma_2 H_1}$ ;  $a_{94} = \rho_1 2\sigma \xi b_{10}^2 y_{11} - \rho_1 b_1^2 (H_1) 2\xi y'_{11}$ ,  $a_{95} = \rho_1 2\sigma \xi b_{10}^2 y_{21} - \rho_1 b_1^2 (H_1) 2\xi y'_{21}$ ,  $a_{96} = \rho_1 [\omega^2 - 2b_1^2 (H_1) \xi^2] y_{31}$ ,  $a_{97} = \rho_1 [\omega^2 - 2b_1^2 (H_1) \xi^2] y_{41}$ ,  $a_{98} = \rho_2 b_2^2 2\xi i \beta_2 e^{i\beta_2 H_1}$ ,  $a_{99} = \rho_2 (2b_2^2 \xi^2 - \omega^2) e^{i\gamma_2 H_1}$ .

这里  $y_{mn} = y_m(H_n)$ ;  $y'_{mn} = y'_m(H_n)$ ;  $m = 1, 2, 3, 4$ ;  $n = 0, 1$ .

参考文献

- [1] Zhang H G 2010 *Ph. D. Dissertation* (Harbin: Harbin Engineering University) (in Chinese) [张海刚 2010 博士学位论文 (哈尔滨: 哈尔滨工程大学)]
- [2] Godin O A, Chapman D M F 2001 *J. Acoust. Soc. Am.* **110** 1890
- [3] Godin O A, Chapman D M F 1999 *J. Acoust. Soc. Am.* **106** 2367

- [4] Chapman D M F, Godin O A 2001 *J. Acoust. Soc. Am.* **110** 1908
- [5] Greene J, Giard J, Potty G R, Miller J H 2011 *International Symposium on Ocean Electronics* Kochi, India, November 16–18, 2011 p211
- [6] Soloway A G, Dahl P H, Odom R I 2015 *J. Acoust. Soc. Am.* **138** EL370
- [7] Hall M V 1995 *J. Acoust. Soc. Am.* **98** 1075
- [8] Fryer G J 1981 *J. Acoust. Soc. Am.* **69** 647
- [9] Liu J Y, Tsai S H, Wang C C, Chu C R 2004 *J. Sound Vib.* **275** 739
- [10] Liu J Y, Tsai S H, Lin I C 2004 *Ocean Eng.* **31** 417
- [11] Ewing W M, Jardetzky W S, Press F 1957 *Elastic Waves in Layered Media* (New York: Mcgraw-Hill Book Company) pp328–330
- [12] Karal F C, Keller J B 1959 *J. Acoust. Soc. Am.* **31** 694
- [13] Hook J F 1961 *J. Acoust. Soc. Am.* **33** 302
- [14] Scholte J G J 1961 *Geophys. Prospect.* **9** 86
- [15] Gupta R N 1966 *B. Seismol. Soc. Am.* **56** 511
- [16] Vidmar P J, Foreman T L 1979 *J. Acoust. Soc. Am.* **66** 1830
- [17] Westwood E K, Tindle C T, Chapman N R 1996 *J. Acoust. Soc. Am.* **100** 3631
- [18] Yang S E 2009 *Theory of Underwater Sound Propagation* (Harbin: Harbin Engineering University Press) pp24–25
- [19] Zhu H H 2014 *Ph. D. Dissertation* (Harbin: Harbin Engineering University) (in Chinese) [祝捍皓 2014 博士学位论文 (哈尔滨: 哈尔滨工程大学)]
- [20] Du S T 1996 *Seismic Wave Dynamics* (Dongying: Petroleum University Press) pp239–241 (in Chinese) [杜世通 1996 地震波动力学 (东营: 石油大学出版社) 第239—241页]
- [21] Wang D Z, Shang E C 2013 *Underwater Acoustics* (Beijing: Science China Press) p68 (in Chinese) [汪德昭, 尚尔昌 2013 水声学 (北京: 科学出版社) 第68页]
- [22] Jensen F B, Kuperman W A, Porter M B, Schmidt H 2012 *Computational Ocean Acoustics* (New York: Springer New York) pp265–266
- [23] Xiao F, Yin Y H 2006 *Mar. Geol. Lett.* **22** 1 (in Chinese) [肖菲, 尹延鸿 2006 海洋地质动态 **22** 1]
- [24] Li Y H, Guo C S, Li H Y, Tan B H 2010 *Mar. Sci.* **34** 55 (in Chinese) [李艳华, 郭常升, 李会银, 谭宝海 2010 海洋科学 **34** 55]

# Compressional-shear wave coupling induced by velocity gradient in elastic medium\*

Liu Ya-Qin<sup>3)</sup> Yang Shi-E<sup>1)2)3)</sup> Zhang Hai-Gang<sup>1)2)3)†</sup> Wang Xiao-Han<sup>3)</sup>

1) (*Acoustic Science and Technology Laboratory, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

2) (*Key Laboratory of Marine Information Acquisition and Security Industry and Information Technology, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

3) (*College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

( Received 27 August 2018; revised manuscript received 27 September 2018 )

## Abstract

In the real ocean environment, the compressional and shear wave velocities in an elastic sediment layer vary with depth, leading to the coupling between compressional and shear waves. As the coupling will affect the underwater sound field, in this paper, a typical sound velocity distribution (where the compression wave velocity has an  $n^2$  linear distribution and the square of shear wave velocity has a linear distribution) is analyzed. Based on the wave equation in inhomogeneous elastic medium, coupled equations of wavenumber kernels of scalar and vector potential functions are established. Based on the perturbation method, approximate analytical solutions of integration kernels are acquired by successive differentiation. The comparison between theoretical prediction and experimental data, which are from the pressure sensor of ocean-bottom seismometer (OBS) consisting of three orthogonal hydrophones and one hydrophone, located at the bottom of the sea near Qingdao City, shows that the coupling between shear wave and compression wave has little effect on near-field sound propagation, while the prediction of long-range sound propagation needs to consider the influence of eigenvalue change caused by coupling. Theoretic analysis shows that there will be coupling between the two waves only if the gradient,  $\sigma$ , of the square of the shear wave velocity is nonzero. When  $\alpha$ , the gradient of the reciprocal of the square of the compression wave velocity, becomes larger, and  $\sigma$  remains unchanged, the simulation results show that the change of the eigenvalue is very small when considering the coupling effect. Thus, transmission loss curves calculated by the coupled and uncoupled algorithm are almost the same. When  $\sigma$  becomes larger while  $\alpha$  remains unchanged, the simulation results show that eigenvalues are changed to some extent if considering the coupling effect, and that the difference between transmission loss calculated by the coupled and uncoupled algorithms increases. That means the effect of  $\sigma$  value on coupling is greater than that of  $\alpha$  value. In addition, the coupling between the compression wave and shear wave can lead the eigenfunctions and derivative eigenfunctions in the sediment to change. The horizontal displacement and vertical displacement are the Fourier-Bessel integral functions of eigenfunctions and derivative eigenfunctions. So the displacement field of particle in the sediment layer is different in the coupled case from that in the uncoupled cases. By comparing the transmission loss of sound pressure simulated by COMSOL software and that obtained from our proposed method, the correctness of the proposed method is verified. And the calculation time is much shorter than the calculation time by using COMSOL software.

**Keywords:** elastic sediment, velocity changing, coupling, approximate analytical

**PACS:** 43.30.-k, 43.25.Ba, 43.30.Ma

**DOI:** 10.7498/aps.67.20181600

\* Project supported by the the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11234002), the National Key Research and Develop Program of China (Grant No. 2016YFC1400100), and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11474073).

† Corresponding author. E-mail: zhanghaigang@hrbeu.edu.cn