

偶极玻色-爱因斯坦凝聚体在类方势阱中的 Bénard-von Kármán 涡街

席忠红 杨雪滢 唐娜 宋琳 李晓霖 石玉仁

Bénard-von Kármán vortex street in dipolar Bose-Einstein condensate trapped by square-like potential

Xi Zhong-Hong Yang Xue-Ying Tang Na Song Lin Li Xiao-Lin Shi Yu-Ren

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 230501 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20181604

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20181604>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I23>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[多个子玻色-爱因斯坦凝聚气体膨胀叠加形成的量子涡旋现象研究](#)

Quantum vortex phenomenon of many sub-Bose-Einstein condensations formed by expansion and superposition

物理学报.2018, 67(1): 010501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20171708>

[自旋-轨道耦合作用下玻色-爱因斯坦凝聚在量子相变附近的朗道临界速度](#)

Landau critical velocity of spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensate across quantum phase transition

物理学报.2017, 66(22): 220301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.220301>

[单模光腔中N个二能级原子系统的有限温度特性和相变](#)

Finite-temperature properties of N two-level atoms in a single-mode optic cavity and phase transition

物理学报.2015, 64(13): 130505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130505>

[非相对论弱相互作用玻色气体的有效场理论处理](#)

Effective field theory approach to the weakly interacting bose gas

物理学报.2014, 63(4): 040501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.040501>

[方势阱中凝聚体的孤子动力学行为](#)

Soliton dynamical behavior of the condensates trapped in a square-well potential

物理学报.2013, 62(11): 110501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.110501>

# 偶极玻色-爱因斯坦凝聚体在类方势阱中的 Bénard-von Kármán 涡街\*

席忠红<sup>1)2)3)</sup> 杨雪滢<sup>1)2)</sup> 唐娜<sup>1)2)</sup> 宋琳<sup>1)2)</sup> 李晓霖<sup>1)2)</sup> 石玉仁<sup>1)2)†</sup>

1) (西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

2) (甘肃省原子分子物理与功能材料重点实验室, 兰州 730070)

3) (甘肃民族师范学院物理与水电工程系, 合作 747000)

(2018年8月28日收到; 2018年9月26日收到修改稿)

对偶极玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein condensate, BEC) 在类方势阱中的 Bénard-von Kármán 涡街现象进行了数值研究. 结果表明, 当障碍势在 BEC 中的运动速度与尺寸在适当范围内时, 系统中会出现稳定的两列涡旋对阵列, 即 Bénard-von Kármán 涡街. 研究了偶极相互作用强弱、障碍势尺寸以及运动速度对尾流中产生的涡旋结构的影响, 得到了相图结构. 对障碍势所受拖拽力进行计算, 分析了涡旋对产生的力学机理.

**关键词:** 偶极玻色-爱因斯坦凝聚体, 类方势阱, Bénard-von Kármán 涡街

**PACS:** 05.30.Jp, 03.75.Kk, 03.75.Lm, 67.85.-d

**DOI:** 10.7498/aps.67.20181604

## 1 引言

当玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein condensate, BEC) 体系中存在大量涡旋成核时, 这些涡旋的排列方式是一个非常值得研究的物理问题<sup>[1,2]</sup>. 俄国物理学家 Abrikosov<sup>[3]</sup> 在研究超导理论时最先讨论了量子化的涡旋结构, 并提出了 Abrikosov 三角涡旋晶格, 之后其他物理学家在单分量 BEC 中也发现了 Abrikosov 三角涡旋晶格<sup>[4]</sup>. 然而, 随着对此类问题研究的不断深化, 研究人员发现, BEC 中的涡旋结构不仅仅局限在三角晶格结构<sup>[5]</sup>. 实验和理论研究表明, 由于 BEC 系统受到相互作用、外势、多分量、旋转角频率等诸多因素的影响, 系统有更加新奇的涡旋结构<sup>[1,5]</sup>.

当经典流体流过障碍物时, 一种普遍而有趣的

现象是在尾流中交替产生涡旋对, 这就是著名的 Bénard-von Kármán 涡街<sup>[6-8]</sup>. 自从实验和理论上发现 von Kármán 涡街以后, 物理学家对其做了大量研究. 众所周知, 当黏性流体流过障碍物时其行为主要取决于表征流体黏性的雷诺系数  $Re$ <sup>[6,7]</sup>, 然而, 由于超流体无黏性, 导致无法定义其黏性系数<sup>[9]</sup>. 超流体涡旋的量子化使得其动力学行为与经典流体有很大区别<sup>[10]</sup>, 因此在超流体的尾流中能否产生并形成稳定的 von Kármán 涡街就成为一个有意义的课题. 近几年物理学家就该领域做了大量研究, 取得了很多成果. Sasaki 等<sup>[11]</sup> 通过数值求解 Gross-Pitaevskii (GP) 方程, 成功模拟了无偶极相互作用 BEC 尾流中出现的稳定 von Kármán 涡街, 给出了其相图. Kwon 小组<sup>[12-14]</sup> 从实验上研究了障碍势在稀薄原子气体 BEC 中运动时尾流中的 von Kármán 涡街. Sasaki 等<sup>[15]</sup> 研究了双组分

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11565021, 11047010)、西北师范大学青年教师科研能力提升计划 (批准号: NWNLUKQN-16-3)、甘肃民族师范学院学术带头人、双骨干项目建设计划 (批准号: GSNU-SHGG-1806) 和甘肃民族师范学院校长基金 (批准号: GSNUXM16-44) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: shiyr@nwnu.edu.cn

BEC中分离相的动力学行为,发现在强相分离情形下,组分1的原子在组分2中运动时会分裂成量子化涡旋并在尾流中形成 von Kármán 涡街.

当超冷原子气体的电偶极或磁偶极的相互作用不可忽略时,须考虑原子间的偶极效应. 偶极效应远比各向同性的s波作用复杂得多,是一种长程各向异性的相互作用,会对超冷原子气体的基态相图、稳定性以及动力学行为产生重要影响<sup>[15-19]</sup>. 此外,偶极间的各向异性相互作用也提供了一个可控参量,使得偶极凝聚体在量子模拟和计算等许多高水平的研究领域有了应用的可能<sup>[20]</sup>. 但据我们所知,偶极BEC中的涡街现象一直未有报道.

本文对偶极BEC在类方势阱中的 Bénard-von Kármán 涡街现象进行了数值研究. 结果表明,当障碍势在BEC中的运动速度与尺寸在适当范围内时,系统中会出现稳定的两列涡旋对阵列,即 Bénard-von Kármán 涡街. 本文也研究了偶极相互作用强弱、障碍势尺寸以及运动速度对尾流中产生的涡旋结构的影响,得到了相图结构,并对障碍势所受拖拽力进行计算,分析了涡旋对产生的力学机理.

## 2 理论模型

考虑质量为 $m$ 的偶极原子BEC束缚在势阱 $V_{\text{ext}}$ 中,障碍势 $V_{\text{OP}}$ 在BEC中沿 $x$ 方向以速度 $v$ 运动. 设原子沿轴 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 极化,其中 $\sum_i n_i^2 = 1$ . 在平均场近似下,可以得到描述系统的GP方程<sup>[19-22]</sup>

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\psi|^2 + \Phi_{\text{dd}} \right] \psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

其中 $V(\mathbf{r}) = V_{\text{ext}} + V_{\text{OP}}$ ,  $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$  表征原子间相互作用强度,  $a_s$  为s波散射长度( $a_s$ 可由Feshbach共振调节),波函数满足 $\int |\psi|^2 d^3\mathbf{r} = N$  ( $N$ 为总粒子数),偶极势<sup>[18]</sup>

$$\Phi_{\text{dd}} = \int d^3\mathbf{r}' U_{\text{dd}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\psi(\mathbf{r}', t)|^2. \quad (2)$$

偶极相互作用为

$$U_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = \frac{C_{\text{dd}}}{4\pi} \frac{1 - 3\cos^2\theta}{|\mathbf{r}|^3}, \quad (3)$$

其中 $\theta$ 是极化轴与两个原子之间相对位置的夹角( $\cos\theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ ). 对于磁偶极子,  $C_{\text{dd}} = \mu_0\mu_d^2$  ( $\mu_0$ 是真空磁导率,  $\mu_d$ 是磁偶极矩); 对于电偶极子,  $C_{\text{dd}} = l^2/\epsilon_0$  ( $\epsilon_0$ 是真空介电常数,  $l$ 是电偶极矩). 文献<sup>[23, 24]</sup>中指出,可通过Feshbach共振自由调节偶极作用强度 $C_{\text{dd}}$ ,使其可正可负.

实验中, BEC原子通常被置于谐振子势阱中. 若谐振子势频率满足 $\omega_z \gg \omega_x, \omega_y$ , 则BEC将被束缚在 $xoy$ 平面内. 此时,可先进行准2维近似<sup>[22]</sup>, 然后进行无量纲化处理:  $\tilde{t} = \omega_0 t$ ,  $\tilde{x} = \frac{x}{a_0}$ ,  $\tilde{y} = \frac{y}{a_0}$ ,  $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{N/a_0^2}}$ ,  $\tilde{g} = \frac{gmN}{\sqrt{2\pi\hbar^2 l_z}}$ , 并略去变量上的“~”号, 其中 $a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ ,  $l_z = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}$ ,  $\omega_0 = \omega_x$ , 从而得无量纲化准二维GP方程<sup>[25]</sup>

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[ -\frac{1}{2} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\varphi|^2 + \frac{a_{\text{dd}}}{(2\pi)^2} \int \hat{n}(k_x, k_y, t) h_{2D}(\kappa) \times e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right] \varphi, \quad (4)$$

其中 $a_{\text{dd}} = \frac{mNC_{\text{dd}}}{3\sqrt{2\pi\hbar^2 l_z}}$ . 波函数满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x, y, t)|^2 dx dy = 1.$$

方程(4)中

$$\hat{n}(k_x, k_y, t) = \int |\varphi(x, y, t)|^2 e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy, \\ h_{2D}(\kappa) = 2 - 3\sqrt{\pi}\kappa e^{\kappa^2} \text{erfc}(\kappa), \\ \kappa = \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2}{2\gamma_z}}, \text{erfc}(\kappa) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\kappa}^{\infty} e^{-u^2} du$$

为完全误差函数,  $\gamma_z = \omega_z/\omega_0$ .

数值计算针对方程(4)进行, 计算范围取为 $\{(x, y) | |x| < 512, |y| < 128\}$ . 用 $\varphi = 1$ 作为初始波函数, 利用虚时演化法<sup>[26]</sup>得到系统的基态. 然后取该基态作为初始条件, 利用时间劈裂傅里叶谱方法<sup>[27]</sup>对GP方程(4)进行非线性动力学演化, 从而对系统的动力学行为进行研究.

## 3 数值结果

考虑外势为下面的类方势阱<sup>[28]</sup>

$$V_{\text{ext}} = V_0 [e^{-\frac{1}{16}(x+x_0)} + e^{\frac{1}{16}(x-x_0)}]$$

$$+ e^{-\frac{1}{4}(y+y_0)} + e^{\frac{1}{4}(y-y_0)}],$$

其中  $V_0$  是无量纲化的外势深度;  $\pm x_0, \pm y_0$  分别表示  $x, y$  方向上阱壁所在位置. 该势阱的特点是在阱壁处势很强而阱内离开阱壁处势很快降为接近于 0, 故可视为对无限深方势阱的一种近似. 当  $V_0 = 1000$  时外势形状如图 1 所示.

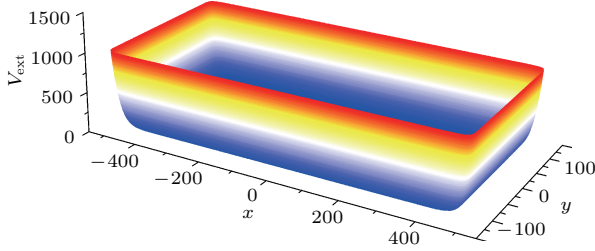


图 1 外势形状图 (取外势深度  $V_0 = 1000$ , 阱壁位置  $x_0 = 512, y_0 = 128$ )

Fig. 1. Shape of external potential (The depth of external potential is  $V_0 = 1000$ , and the position of a potential wall is  $x_0 = 512, y_0 = 128$ ).

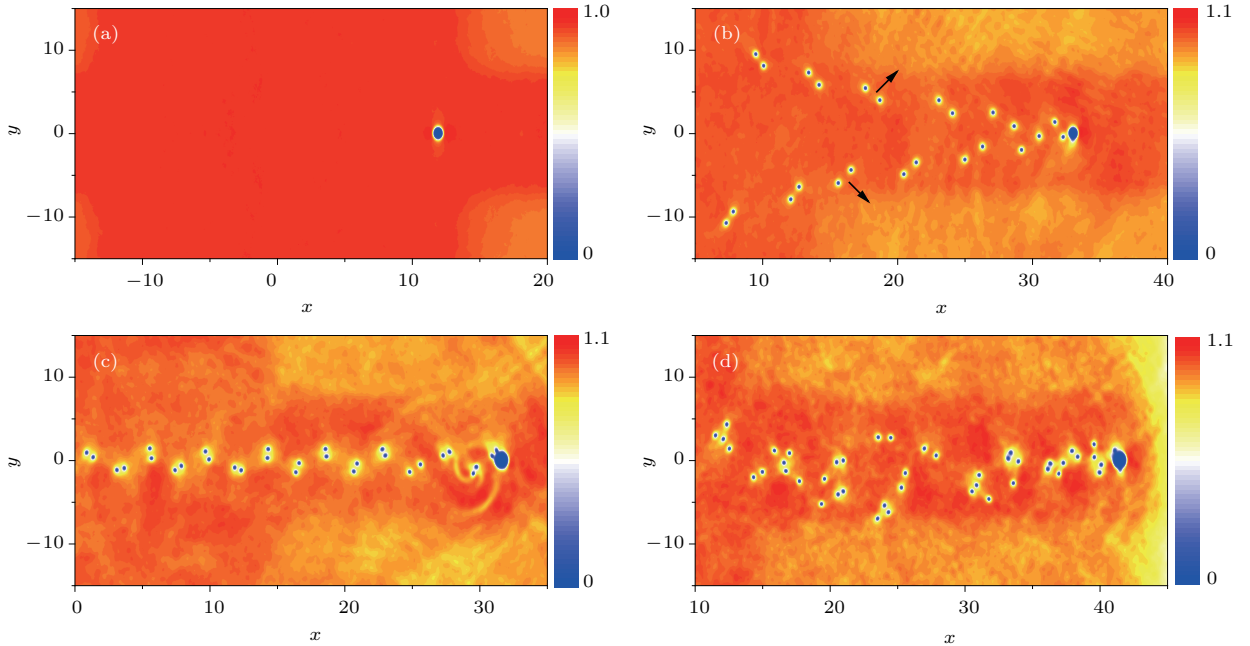


图 2 障碍势在偶极 BEC 中运动时尾流密度分布 (a)  $v = 0.25, d = 1.2$ ; (b)  $v = 0.49, d = 1.2$ ; (c)  $v = 0.48, d = 1.8$ ; (d)  $v = 0.55, d = 1.82$

Fig. 2. Density distributions of a condensate past an obstacle potential: (a)  $v = 0.25, d = 1.2$ ; (b)  $v = 0.49, d = 1.2$ ; (c)  $v = 0.48, d = 1.8$ ; (d)  $v = 0.55, d = 1.82$ .

从图 2 可以看出, 当障碍势的运动速度  $v$  足够小时, 障碍势周围的凝聚体是稳定的层流形式, 没有涡旋产生 (图 2(a)). 当障碍物势的运动速度  $v$  达到某个临界值时, 尾流中开始产生如图 2(b) 所示的涡旋-反涡旋对. 这个临界值主要取决于障碍物势的形状和原子之间的相互作用 [9]. 当一对涡旋

将  $N = 2.5 \times 10^5$  个  $^{164}\text{Dy}$  原子 BEC 束缚在该势阱中,  $^{164}\text{Dy}$  原子磁偶极矩为  $10\mu_B$  ( $\mu_B$  为玻尔磁子), 原子质量  $m = 2.72 \times 10^{-25}$  kg. 取谐振子势频率  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = 2\pi \times (4.3, 56, 350)$  Hz, 这与 Berkeley 等团队的实验参数一致 [11]. 由此可得偶极相互作用系数  $a_{\text{dd}} \approx 0.2$ . 通过 Feshbach 共振调节 s 波散射长度使  $a_s \approx 8.0 \times 10^{-13}$  m 时, 由  $g = \frac{4\pi a_s N}{\sqrt{2\pi} l_z}$  得  $g \approx 1$ . 故在计算中取  $a_{\text{dd}} = 0.2, g = 1$ . 考虑无量纲化的圆柱形障碍势

$$V_{\text{OP}} = V_{\text{OP}}^0 \exp \left[ -\frac{(x - L_0 - vt)^2 + y^2}{d^2} \right],$$

从初始位置  $L_0 = -x_0 + \frac{2}{5}x_0 = -307.2$  开始在 BEC 中沿  $x$  方向以速度  $v$  运动 (深度取  $V_{\text{OP}}^0 = 100$ ). 偶极 BEC 流经障碍势时其尾流的典型密度分布如图 2 所示.

从障碍势脱落后, 附近的凝聚体很快达到产生涡旋的临界条件并产生新的涡旋对, 这样就在障碍势后面产生了上下两列涡旋对阵列. 由于一个涡旋对中的两个点涡旋有着不同的旋量  $\pm h/m$  ( $h$  为普朗克常量), 使得两列对称分布的涡旋对阵列不稳定 [11]. 受到小的扰动时, 涡旋对会沿着垂直于涡

旋对连线的方向(图2(b)黑色箭头所示方向)平动,从而在尾流中形成V字形涡旋对阵列结构. 一些学者在研究经典流体时也发现了这种交替的涡旋模式<sup>[29-31]</sup>. 这种涡旋结构在 $v$ 比较大、 $d$ 比较小时更加明显,与经典流体中的尾流模式非常类似<sup>[11]</sup>.

当障碍势的运动速度 $v$ 增大到一定程度并且障碍物的尺寸 $d$ 在适当范围内时,其后同时产生的一组涡旋对具有相同的旋量 $h/m$ 或 $-h/m$ ,以角频率 $2\hbar/(md_0^2)$ 绕着它们的中心运动<sup>[11]</sup>,在运动过程中两个点涡旋之间的距离 $d_0$ 基本保持不变. 这样,在尾流中交替产生的旋量相反的涡旋对就形成稳定的两列涡旋对阵列,即Bénard-von Kármán涡街(图2(c)). 在图2(c)参数条件下,数值计算得到上下两列涡旋阵列之间的距离 $b \approx 19a_0$ ,同一阵列中两个涡旋对之间的平均距离 $\ell \approx 68a_0$ ,因此 $b/\ell \approx 0.28$ . 该值与经典流体中Bénard-von Kármán涡街产生的稳定性条件 $b/\ell = \pi^{-1} \cosh^{-1} \sqrt{2} \approx 0.28$ 以及Sasaki等在研究无偶极相互作用BEC时的结论一致. 当障碍势的运动速度 $v$ 继续增大时,障碍物势后尾流中的这种周期性涡街消失,在尾流中出现混乱的涡旋结构(图2(d)).

为研究各种尾流结构的参数区间,我们对系统在不同 $v$ 和 $d$ 时的情形进行了大量数值计算(图3为其相图结构).

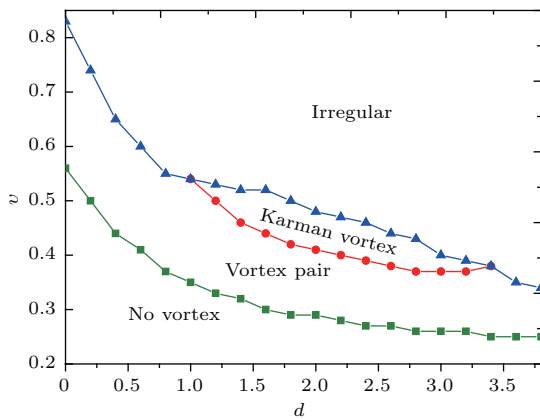


图3 尾流结构随障碍势尺寸 $d$ 和运动速度 $v$ 的变化  
Fig. 3. Dependence of the patterns of wakes on the normalized width  $d$  and velocity  $v$  of the obstacle potential.

从图3可以看出,沿图中箭头所示方向改变参数时,障碍物势后尾流的结构依次出现稳定的层流、涡旋对、von Kármán涡街以及混乱的涡旋结构,分别与图2(a)—(d)相对应. 显然, von

Kármán涡街出现的参数范围相对较小,具体约为 $1.0 \leq d \leq 3.4, 0.37 \leq v \leq 0.54$ . 图3与无偶极相互作用时的相图结构也存在较大不同. 在无偶极相互作用的BEC中( $a_{dd} = 0$ ),  $d > 1.5$ 时,尾流从稳定的层流直接过渡到卡门涡街或者混乱模式,而不会出现图3中较宽范围的涡旋对结构. 同时,随着偶极相互作用强度的增加,相图中 von Kármán涡街出现的参数区域变得更窄. 然而,对于经典流体,在雷诺数 $Re$ 变化的较大范围内都会出现 von Kármán涡街<sup>[32-35]</sup>.

图4直观地反映了障碍势所受拖拽力 $F = \partial_t \int d\mathbf{r} \psi^* (i\hbar \nabla) \psi$ 随时间的变化. 初始状态为 $v = 0$ 的稳态(基态), $t = 0$ 时障碍势开始以速度 $v$ 运动. 图4(a)是涡旋-反涡旋对产生时障碍势的受力情况,与图2(b)相对应. 当 $t \leq 200$ 时, $F_x$ 振荡而 $F_y = 0$ ,说明涡旋对称地从障碍势脱落. 当 $t \geq 200$ 时,涡旋对开始分别向上下两个方向运动,导致 $F_x$ 振荡的同时 $F_y$ 也开始振荡. 图4(b)是 von Kármán涡街产生时障碍物势受力情况,与图2(c)相对应. 当 $t \geq 200$ 时, $F_x$ 与 $F_y$ 同时开始振荡. 由于图4(a)、图4(b)中 $F_y$ 振荡反映涡旋对向上或向下运动的频率,而 $F_x$ 的振荡反映涡旋对脱落的频率. 因此, $F_y$ 的振荡频率为 $F_x$ 振荡频率的一半. 图4(c)中 $F_x, F_y$ 的振荡则没有明显的规律,涡旋对脱落后随机地在尾流中运动形成混乱的涡旋结构,与图4(a)、图4(b)相比 $F_x$ 的振荡频率明显增大,意味着在尾流中产生更多的涡旋对. 类似的规律在经典流体以及无偶极相互作用的BEC中都有所体现<sup>[11,36]</sup>.  $F_y$ 的振荡相对于平衡位置表现出一定的对称性,但是由于偶极相互作用及外势的影响, $F_x$ 的整体振荡趋势则随着演化时间的增大先上升后下降;而在无偶极相互作用的BEC系统中, $F_x$ 在振荡过程中始终保持小于零,并且,由于外势的影响,使得图4(b)、图4(c)中 $F_y$ 的振幅在BEC密度较大的中心区域明显增大.

以上数值结果容易在实验中得以实现. 考虑将 $N = 2.5 \pm 0.5 \times 10^5$ 个 $^{164}\text{Dy}$ (磁偶极矩为 $10\mu_B$ )或 $^{52}\text{Cr}$ (磁偶极矩为 $6\mu_B$ )或 $^{168}\text{Er}$ (磁偶极矩为 $7\mu_B$ )等原子BEC束缚在方势阱中,取谐振子势频率 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = 2\pi \times (4.3, 56, 350)$  Hz<sup>[11]</sup>. 此时,偶极相互作用系数 $a_{dd} \approx 0.2$ . 通过Feshbach共振调节s波散射长度使接触相互作用系数 $g \approx 1$ . 当尺寸

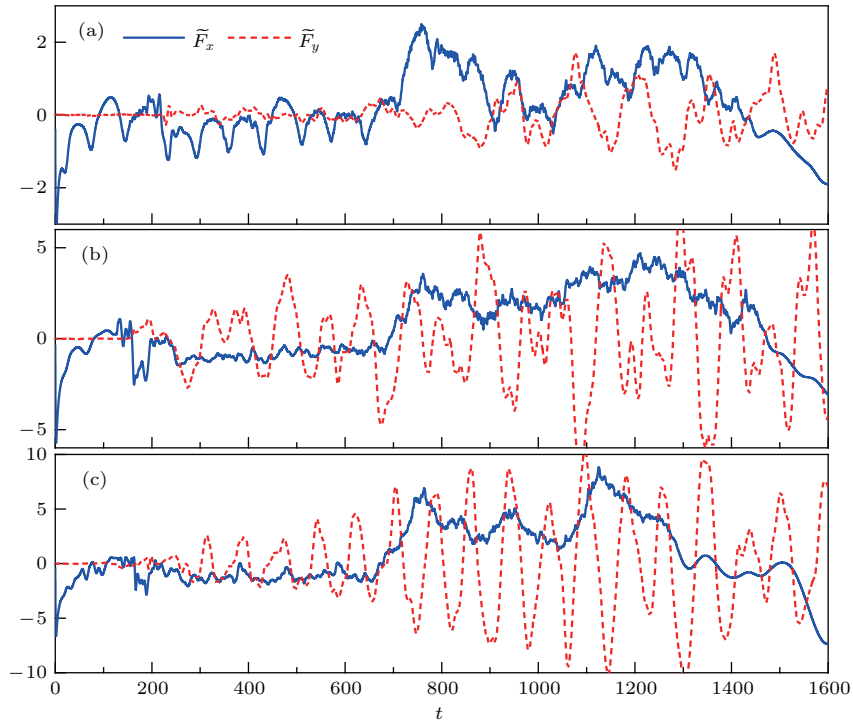


图4 无量纲化拖拽力  $\tilde{F}$  随时间的变化 (a)  $v = 0.49, d = 1.2$ ; (b)  $v = 0.48, d = 1.8$ ; (c)  $v = 0.55, d = 1.8$   
 Fig. 4. Time evolution of the normalized drag force  $\tilde{F}$ : (a)  $v = 0.49, d = 1.2$ ; (b)  $v = 0.48, d = 1.8$ ; (c)  $v = 0.55, d = 1.8$ .

为  $1.0a_0 \leq d \leq 3.4a_0$  的激光束以速度  $0.37\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{m}} \leq v \leq 0.54\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{m}}$  在偶极 BEC 中运动时, 将会在激光束后尾流中周期性产生涡旋对, 形成稳定的 Bénard-von Kármán 涡街。

若考虑将  $N = 2.0 \pm 0.5 \times 10^3$  个  $^{164}\text{Dy}$  原子 BEC 束缚在类方势阱中, 通过 Feshbach 共振调节 s 波散射长度  $a_s = 4.08 \times 10^{-9} \text{ m} \approx 77a_B$ ,  $a_B$  为玻尔半径。此时接触相互作用系数  $g \approx 100$ , 偶极相互作用系数  $a_{dd} \approx 20$  (其他参数与前面相同), 仍有  $a_{dd}/g = 0.2$ 。数值结果表明, 此时也会出现图 2(c) 中所示的 Bénard-von Kármán 涡街现象。

#### 4 结 论

对偶极 BEC 在类方势阱中的 Bénard-von Kármán 涡街现象进行了研究。在平均场近似下, 通过虚时演化法得到系统的基态, 然后利用时间劈裂傅里叶谱方法对系统进行非线性动力学演化, 发现障碍势在偶极 BEC 系统中以一定速度运动时, 系统中会出现稳定的两列涡旋对阵列, 即 Bénard-von Kármán 涡街; 数值研究了偶极相互作用强弱、障碍物势尺寸以及运动速度对尾流中产生的涡旋结构的影响, 得到了系统的相图结构; 通过对障碍

势所受拖拽力进行计算, 分析了涡旋对产生的力学机理。

#### 参考文献

- [1] Wang D S, Song S W, Xiong B, Liu W M 2011 *Phys. Rev. A* **84** 053607
- [2] Ji A C, Liu W M, Song J L, Zhou F 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 010402
- [3] Abrikosov A A, Eksp Z 1957 *Phys. JETP* **5** 1174
- [4] Abo-Shaeer J R, Raman C, Vogels J M, Ketterle W 2001 *Sci.* **292** 476
- [5] Wang L X, Dong B, Chen G P, Han W, Zhang S G, Shi Y R, Zhang X F 2016 *Phys. Lett. A* **380** 435
- [6] Bénard H, Acad C R 1908 *Science* **147** 839
- [7] von Kármán T, Gottingen N G W 1911 *Math. Phys. Kl.* **509** 721
- [8] Williamson C H K 1996 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **28** 477
- [9] Barenghi C F 2008 *Physica D* **237** 2195
- [10] Kwon W J, Moon G, Choi J, Seo S W, Shin Y 2016 *Phys. Rev. Lett.* **24** 117
- [11] Sasaki K, Suzuki N, Saito H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 150404
- [12] Kwon W J, Moon G, Choi J, Seo S W, Shin Y 2014 *Phys. Rev. A* **90** 063627
- [13] Kwon W J, Seo S W, Shin Y 2015 *Phys. Rev. A* **92** 033613
- [14] Kwon W J, Seo S W, Shin Y 2015 *Phys. Rev. A* **91** 053615
- [15] Sasaki K, Suzuki N, Saito H 2010 *Phys. Rev. A* **83** 033602

- [16] Qi R, Yu X L, Li Z B, Liu W M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 185301
- [17] Liang Z X, Zhang Z D, Liu W M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 050402
- [18] Ji A C, Sun Q, Xie X C, Liu W M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 023602
- [19] Yi S, You L 2000 *Phys. Rev. A* **61** 041604
- [20] Marinescu M, You L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 4596
- [21] Deb B, You L 2001 *Phys. Rev. A* **64** 022717
- [22] Cai Y Y, Matthias R, Lei Z, Bao W Z 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043623
- [23] Nath R, Pedri P, Santos L 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 050401
- [24] Giovanazzi S, Gorlitz A, Pfau T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 130401
- [25] Pedri P, Santos L 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 200404
- [26] Bao W, Chem L L, Lim F Y 2006 *J. Comput. Phys.* **219** 836
- [27] Bao W, Wang H 2006 *J. Comput. Phys.* **217** 612
- [28] Mou S, Guo K X, Xiao B 2014 *Superlattices Microstruct.* **65** 309
- [29] Finne A P, Araki T, Blaauwgeers R, Eltsov V B, Kopnin N B, Kruslus M, Skrbek L, Tsubota M, Volovik G E 2003 *Nature* **424** 1022
- [30] Nore C, Huepe C, Brachet M E 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2191
- [31] Volovik G E 2003 *JETP Lett.* **78** 533
- [32] Inouye S, Gupta S, Rosenband T, Chikkatur A P, Orlicz A G, Gustavson T L, Leanhardt A E, Pritchard D E, Ketterle W 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 080402
- [33] Neely T W, Samson E C, Bradley A S, Davis M J 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 160401
- [34] Stagg G W, Allen A J, Barenghi C F, Parker N G 2015 *J. Phys.: Conf. Ser.* **594** 012044
- [35] Reeves M T, Anderson B P, Bradley A S 2012 *Phys. Rev. A* **86** 053621
- [36] Kadokura T, Yoshida J, Saito H 2014 *Phys. Rev. A* **90** 013612

# Bénard-von Kármán vortex street in dipolar Bose-Einstein condensate trapped by square-like potential\*

Xi Zhong-Hong<sup>1)2)3)</sup> Yang Xue-Ying<sup>1)2)</sup> Tang Na<sup>1)2)</sup> Song Lin<sup>1)2)</sup>  
 Li Xiao-Lin<sup>1)2)</sup> Shi Yu-Ren<sup>1)2)†</sup>

1) (College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

2) (Key Laboratory of Atomic and Molecular Physics and Functional Material of Gansu Province, Lanzhou 730070, China)

3) (College of Physics and Hydropower Engineering, Gansu Normal University for Nationalities, Hezuo 747000, China)

( Received 28 August 2018; revised manuscript received 26 September 2018 )

## Abstract

Bénard-von Kármán vortex street in dipolar Bose-Einstein Condensate (BEC) trapped by a square-like potential is investigated numerically. In the frame of mean-field theory, the nonlinear dynamic of the dipolar BEC can be described by the so-called two-dimensional Gross-Pitaevskii (GP) equation with long-range interaction. In this paper, we only consider the case that all the dipoles are polarized along the  $z$ -axis, which is perpendicular to the plane of disc-shaped BEC. Firstly, the stationary state of the BEC is obtained by the imaginary-time propagation approach. Secondly, the nonlinear dynamic of the BEC, when a moving Gaussian potential exists in such a system, is numerically investigated by the time-splitting Fourier spectral method, in which the stationary state obtained before is set to be the initial state. The results show that when the velocity of the cylindrical obstacle potential reaches a critical value, which depends on interaction strength and the shape of the potential, the vortex-antivortex pairs will be generated alternately in the superflow behind the obstacle potential. However, in general, such a vortex-antivortex pair structure is dynamically unstable. When the velocity of the obstacle potential increases to a certain value and for a suitable potential width, a stable vortex structure called Bénard-von Kármán vortex street will be formed. While this phenomenon emerges, the vortices in pairs created by the obstacle potential have the same circulation. The pairs with opposite circulations are alternately released from the moving obstacle potential. For larger potential width and velocity, the shedding pattern becomes irregular. We also numerically investigate the effects of the dipole interaction strength, the width and the velocity of the obstacle potential on the vortex structures arising in the wake flow. As a result, the phase graph is presented by lots of numerical calculations for a group of given physical parameters. Thirdly, the drag force on the obstacle potential is also calculated and the mechanical mechanism of vortex pair is analyzed. Finally, we discuss how to find the phenomenon of Bénard-von Kármán vortex street in dipolar BEC experimentally.

**Keywords:** dipolar Bose-Einstein condensate, square-like potential, von Kármán vortex street

**PACS:** 05.30.Jp, 03.75.Kk, 03.75.Lm, 67.85.-d

**DOI:** [10.7498/aps.67.20181604](https://doi.org/10.7498/aps.67.20181604)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11565021, 11047010), the Scientific Research Foundation of Northwest Normal University, China (Grant No. NWNLU-LKQN-16-3), and the Scientific Research Foundation of Gansu Normal University for Nationalities, China (Grant Nos. GSNU-SHGG-1806, GSNUXM16-44).

† Corresponding author. E-mail: [shiyu@nwnu.edu.cn](mailto:shiyu@nwnu.edu.cn)