

考虑晶粒分布的多晶体材料超声散射统一理论

李珊 李雄兵 宋永锋 陈超

Ultrasonic scattering unified theory for polycrystal material with grain sizes distribution

Li Shan Li Xiong-Bing Song Yong-Feng Chen Chao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 234301 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20181751

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20181751>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I23>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[表面粗糙度对固体内部超声背散射的影响](#)

Effects of surface roughness on diffuse ultrasonic backscatter in the solids

物理学报.2016, 65(21): 214301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.214301>

[界面条件下线型超声相控阵声场特性研究](#)

Acoustic field characteristics of ultrasonic linear phased array for an interface condition

物理学报.2011, 60(9): 094301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.60.094301>

## 考虑晶粒分布的多晶体材料超声散射统一理论\*

李珊<sup>1)</sup> 李雄兵<sup>1)</sup> 宋永锋<sup>1)†</sup> 陈超<sup>2)</sup>

1)(中南大学交通运输工程学院, 长沙 410075)

2)(中南大学粉末冶金国家重点实验室, 长沙 410083)

(2018年9月22日收到; 2018年10月11日收到修改稿)

现有超声散射统一理论可通过多晶体材料的微观结构和力学特性, 实现全频域范围内衰减和相速度的正演建模, 但其忽略晶粒尺寸分布的影响, 进而降低了正演模型的计算精度. 本文对不均匀介质的波动方程进行二阶 Keller 近似, 用全频域格林函数推导介质中的平均波; 以截断对数正态分布描述晶粒分布, 构建加权的空间相关函数; 结合材料的弹性模量协方差, 建立含晶粒分布的超声散射统一理论, 揭示晶粒分布对超声散射的影响规律; 制备 304 不锈钢试块并开展超声散射实验. 结果表明考虑晶粒分布特性后, 纵波衰减谱和相速度谱相对于实验结果的相异性降低约 49% 和 64%, 横波衰减谱和相速度谱相对于实验结果的相异性降低约 12% 和 4%. 可见, 本文的统一理论模型能有效修正晶粒分布导致的衰减谱和相速度谱偏差, 为晶粒分布反演评价提供理论基础.

**关键词:** 超声散射, 统一理论, 晶粒尺寸, 截断对数正态分布

**PACS:** 43.20.Bi, 43.20.Fn, 43.35.Cg

**DOI:** 10.7498/aps.67.20181751

## 1 引言

超声波在多晶体材料中传播时, 邻近晶粒的取向差引起晶界处的声阻抗变化, 最终导致超声波的散射<sup>[1]</sup>. 由于散射的发生, 超声波能量将随着传播距离的增加而衰减, 其相速度也将发生色散<sup>[2]</sup>. O'Donnell 等<sup>[3]</sup> 研究表明只有准确地对超声散射过程进行正演建模, 才能实现材料力学性能或微观结构的超声散射反演评价.

相关研究最早由 Mason 和 McSkimin 提出<sup>[4,5]</sup>, Huntington<sup>[6]</sup> 和 Papadakis<sup>[7]</sup> 在此基础上构建了著名的超声散射分区近似模型. 该模型为分段解析解, 根据波数  $k$  和平均晶粒直径  $\bar{d}$  来对频域进行划分: 当  $k\bar{d} \ll 1$  时, 为瑞利 (Rayleigh) 散射区; 当  $k\bar{d} \approx 1$  时, 为随机 (Stochastic) 散射区; 当  $k\bar{d} \gg 1$  时, 为几何 (Geometric) 散射区. 但该模型难以统一描述全频域范围的散射情况, 且无法给出确切的散射区转换点 (或函数分段点). Weaver<sup>[8]</sup> 基于 Dyson 方程和 Born 近似, 用自由能算子推导了衰

减谱. 然而该方法仅适用于瑞利散射区和随机散射区, 且无法得到相速度谱. Calvet 和 Margerin<sup>[9,10]</sup> 利用 Dyson 方程及谱函数法推导了全频域范围内的衰减谱和相速度谱. 但该方法属于数值解, 且运算中涉及到瑕积分, 因此求解效率低, 同时其精度受瑕积分数值解的影响大. Stanke 和 Kino<sup>[11]</sup> 基于 Keller 近似, 建立了超声散射统一理论模型, 用统一的数学形式来描述不同散射区的衰减和相速度变化, 其结果为半解析解, 求解效率高于谱函数法. 由于该理论框架具有很强的普适性, 随后 Hirsekorn<sup>[12]</sup> 将 Stanke 和 Kino 的统一理论模型推广到了多相材料. Ahmed 和 Thompson<sup>[13]</sup> 又针对拉长晶材料, 修正了统一理论模型中描述微观组织的空间相关函数.

然而, Stanke 和 Kino 的超声散射统一理论仅使用平均晶粒尺寸来推导衰减谱和相速度谱, 是不尽合理的. 众多研究表明超声散射不仅与平均晶粒尺寸有关, 而且与晶粒尺寸的分布有关<sup>[14-17]</sup>. Smith<sup>[18]</sup> 发现平均晶粒尺寸相同但晶粒尺寸分布

\* 国家自然科学基金 (批准号: 51575541, 51711530231) 和中南大学中央高校基本科研业务费 (批准号: 2018zzts515) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: songyf\_ut@163.com

不同的样本衰减谱存在明显差异. 陈尧等<sup>[19]</sup>基于电子背散射衍射 (electron backscattering diffraction, EBSD) 技术, 对离心铸造奥氏体不锈钢构建了含晶粒分布的二维虚拟试块, 并用有限差分法得到了各向异性粗晶材料的衰减谱, 但未给出相速度谱. Rzyzy 等<sup>[20]</sup>根据三维泰森多边形虚拟了不同晶粒分布的试块, 运用有限元方法模拟发现, 各向异性镍合金的晶粒分布同时影响衰减谱及相速度谱. 但有限元模拟的计算量大, 且无法显式表达衰减谱和相速度谱. Arguelles 和 Turner<sup>[21]</sup>使用对数正态分布方法描述晶粒尺寸分布, 修正了空间相关函数, 并得到了瑞利散射区衰减谱的解析解. 然而该方法不适用于随机散射区和几何散射区, 且无法计算相速度谱. 此外, 用对数正态分布来描述晶粒尺寸分布, 理论上假设了存在无穷大的晶粒, 与实际不符, 而且无穷大的晶粒会导致计算中的无穷积分而无法求解.

本文引入截断对数正态分布描述晶粒分布的特性<sup>[22]</sup>, 推导了含晶粒分布修正的超声散射统一理论模型, 然后使用奥氏体 304 不锈钢制备试块, 开展 EBSD 实验和超声散射实验, 验证了修正模型的有效性.

## 2 理论模型

### 2.1 广义的超声散射统一理论

首先, 假设由不同尺寸晶粒组成的单相多晶体金属材料的密度均匀, 但局部模量存在差异, 则单相不均匀介质的线性弹性波动方程可表达为<sup>[11]</sup>

$$[C_{ijkl}(\mathbf{r})u_{k,l}(\mathbf{r})]_{,j} + \rho\omega^2 u_i(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

其中  $C_{ijkl}(\mathbf{r})$  为世界坐标系下的局部弹性模量,  $u_i(\mathbf{r})$  为质点位移场,  $\rho$  为多晶体金属材料的密度,  $\omega$  为弹性波的角频率. 记 (1) 式为  $L(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) = 0$ , 其中  $L(\mathbf{r})$  为一个作用于  $u(\mathbf{r})$  的不均匀介质波动方程算子, 根据微扰理论有<sup>[12]</sup>

$$L(\mathbf{r}) = L_0(\mathbf{r}) - \varepsilon L_1(\mathbf{r}), \quad (2)$$

其中  $L_0(\mathbf{r})$  为零阶的均匀介质波动方程算子, 而  $L_1(\mathbf{r})$  则为一阶的扰动算子,  $\varepsilon$  为一个远小于 1 的无量纲量. 零阶和一阶算子作用于质点位移场可以分别写为<sup>[12]</sup>

$$L_0(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) = C_{ijkl}^0 u_{k,lj}(\mathbf{r}) + \rho\omega^2 u_i(\mathbf{r}), \quad (3a)$$

$$L_1(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) = -[\Delta C_{ijkl}(\mathbf{r})u_{k,l}(\mathbf{r})]_{,j}, \quad (3b)$$

其中局部弹性模量  $C_{ijkl}(\mathbf{r})$  被分解为一个宏观均匀的各向同性介质弹性模量  $C_{ijkl}^0$ , 以及一个扰动量  $\Delta C_{ijkl}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}(\mathbf{r}) - C_{ijkl}^0$ , 其中  $C_{ijkl}^0$  可用 Voigt 平均方法得到.

接着, 通过零阶和一阶算子构建波动方程的二阶 Keller 近似, 可得到质点的平均位移场  $\langle u(\mathbf{r}) \rangle$  为<sup>[12]</sup>

$$L_0(\mathbf{r})\langle u(\mathbf{r}) \rangle = \left[ \varepsilon \langle L_1(\mathbf{r}) \rangle + \varepsilon^2 \left( \langle L_1(\mathbf{r})L_0^{-1}(\mathbf{r})L_1(\mathbf{r}) \rangle - \langle L_1(\mathbf{r}) \rangle L_0^{-1}(\mathbf{r}) \langle L_1(\mathbf{r}) \rangle \right) \right] \langle u(\mathbf{r}) \rangle, \quad (4)$$

其中尖括号  $\langle * \rangle$  表示计算总体平均值.  $L_0^{-1}(\mathbf{r})$  为  $L_0(\mathbf{r})$  的逆算子<sup>[12]</sup>

$$L_0^{-1}(\mathbf{r})u_i(\mathbf{r}) = \int_V G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') u_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (5)$$

(5) 式中的  $G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  为全频域格林函数, 其 Lifshits 和 Parkhomovskii 表达为<sup>[11]</sup>:

$$G_{ij}(\mathbf{r}) = -\left(\frac{1}{r}\right) [(x_i x_j / r^2) g(\mathbf{r}) + \delta_{ij} h(\mathbf{r})], \quad (6a)$$

$$g(\mathbf{r}) = (4\pi\rho\omega^2 r^2)^{-1} [3(1+ix) - x^2] \times \exp(-ix) \begin{vmatrix} k_{Tr} \\ k_{Lr} \end{vmatrix}, \quad (6b)$$

$$h(\mathbf{r}) = -(4\pi\rho\omega^2 r^2)^{-1} \left[ (1+ix) \exp(-ix) \begin{vmatrix} k_{Tr} \\ k_{Lr} \end{vmatrix} - k_{Tr}^2 r^2 \exp(-ik_{Tr}r) \right], \quad (6c)$$

其中  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 函数,  $k_\xi$  ( $\xi = L, T$ ) 为多晶体金属的纵波和横波复波数. 因此将 (3a) 式、(3b) 式和 (5) 式代入 (4) 式可得<sup>[11]</sup>

$$0 = C_{ijkl}^0 \langle u_k(\mathbf{r}) \rangle_{,lj} + \rho\omega^2 \langle u_i(\mathbf{r}) \rangle + \varepsilon \left[ \langle \Delta C_{ijkl}(\mathbf{r}) \rangle \langle u_k(\mathbf{r}) \rangle_{,lj} - \varepsilon^2 \left\langle \left\{ \Delta C_{ijkl}(\mathbf{r}_1) \int_V G_{km,l}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \times [\Delta C_{mnpq}(\mathbf{r}_2) \langle u_p(\mathbf{r}') \rangle_{,q}]_{,n} d\mathbf{r}' \right\}_{,j} \right\rangle + \varepsilon^2 \left\{ \langle \Delta C_{ijkl}(\mathbf{r}_1) \rangle \int_V G_{km,l}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \times [\Delta C_{mnpq}(\mathbf{r}_2) \langle u_p(\mathbf{r}') \rangle_{,q}]_{,n} d\mathbf{r}' \right\}_{,j} \right]. \quad (7)$$

考虑多晶体金属材料在局部上是不均匀的, 但全局上具有统计均匀性, 即一阶晶粒统计量  $\langle \Delta C_{ijkl}(\mathbf{r}) \rangle$  和二阶晶粒统计量  $\langle \Delta C_{ijkl}(\mathbf{r}_1) \Delta C_{mnpq}(\mathbf{r}_2) \rangle$  都与空间无关, 则 (7) 式可以进一步化简为<sup>[11]</sup>

$$0 = \left[ (C_{ijkl}^0 + \varepsilon \langle \Delta C_{ijkl} \rangle) \langle u_k(\mathbf{r}) \rangle_{,lj} + \rho\omega^2 \langle u_i(\mathbf{r}) \rangle - \varepsilon^2 \left[ \langle \Delta C_{ijkl} \Delta C_{mnpq} \rangle \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
 & - \langle \Delta C_{ijkl} \rangle \langle \Delta C_{mnpq} \rangle \left\{ \int_V G_{km,l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right. \\
 & \times [W(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle u_p(\mathbf{r}') \rangle_{,q} ]_{,n} d\mathbf{r}' \left. \right\}_{,j}, \quad (8)
 \end{aligned}$$

其中  $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  为多晶体金属材料的空间相关函数, 用于描述空间点  $\mathbf{r}$  和点  $\mathbf{r}'$  落在同一个晶粒内部的概率. 不失一般性, 用平面波计算质点位移场为<sup>[11]</sup>

$$u_i(\mathbf{r}) = \hat{u}_i \exp(-ik_\xi \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{x}}), \quad (9)$$

其中  $\hat{u}_i$  为偏振方向单位矢量,  $\hat{\mathbf{x}}$  为传播方向单位矢量. 将(9)式代入(8)式, 并计算偏导数得<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned}
 0 &= (C_{ijkl}^0 + \varepsilon \langle \Delta C_{ijkl} \rangle) \hat{u}_k \hat{x}_l \hat{x}_j - \rho (\omega^2/k_\xi^2) \hat{u}_i \\
 & - \varepsilon^2 [\langle \Delta C_{ijkl} \Delta C_{mnpq} \rangle - \langle \Delta C_{ijkl} \rangle \langle \Delta C_{mnpq} \rangle] \\
 & \times \int_V G_{km,l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [W(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\
 & \times \exp(ik_\xi (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{x}})]_{,n} d\mathbf{r}' \hat{u}_p \hat{x}_q \hat{x}_j, \quad (10)
 \end{aligned}$$

由格林第一公式可知<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned}
 & \int_V G_{km,l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_{,n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\
 &= - \int_V G_{km,l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_{,n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} \\
 &= \int_V G_{km}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_{,ln}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} \\
 & - \int_S G_{km}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_{,n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{s}_l, \quad (11)
 \end{aligned}$$

其中  $S$  为体积分区域  $V$  的表面. 当忽略侧壁干扰时, (11) 式中的面积分项可忽略. 此时, 将(11)式代入(10)式, 令  $\mathbf{r}'$  为原点得<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned}
 0 &= (C_{ijkl}^0 + \varepsilon \langle \Delta C_{ijkl} \rangle) \hat{u}_k \hat{x}_l \hat{x}_j - \rho (\omega^2/k_\xi^2) \hat{u}_i \\
 & - \varepsilon^2 [\langle \Delta C_{ijkl} \Delta C_{mnpq} \rangle - \langle \Delta C_{ijkl} \rangle \langle \Delta C_{mnpq} \rangle] \\
 & \times \int_V G_{km}(\mathbf{r}) [W(\mathbf{r}) \exp(ik_\xi \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{x}})]_{,ln} \\
 & \times d\mathbf{r} \hat{u}_p \hat{x}_q \hat{x}_j, \quad (12)
 \end{aligned}$$

(12) 式为超声散射统一理论的广义表达式. 当单相多晶体具有任意对称性、拉长晶、或织构时, (12) 式都普遍适用(不适用于多相材料).

## 2.2 含晶粒分布的超声散射统一理论

多晶材料主要可分为单相材料和多相材料. 为了简化问题本文将研究对象限定为单相材料, 而且其晶格为面心立方对称结构, 不含织构, 晶粒为球状晶. 假设晶粒尺寸具有分布特性, 由于不含有织构且为球状晶, 因此(12)式可以化简为<sup>[11]</sup>

$$0 = C_{ijkl}^0 \hat{u}_k \hat{x}_l \hat{x}_j - \rho (\omega^2/k_\xi^2) \hat{u}_i$$

$$\begin{aligned}
 & - \varepsilon^2 \langle \Delta C_{ijkl} \Delta C_{mnpq} \rangle \\
 & \times \int_V G_{km}(\mathbf{r}) [W(\mathbf{r}) \exp(ik_\xi \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{x}})]_{,ln} \\
 & \times d\mathbf{r} \hat{u}_p \hat{x}_q \hat{x}_j, \quad (13)
 \end{aligned}$$

不考虑晶粒尺寸分布特性时, 空间相关函数为  $W(\mathbf{r}) = \exp(-|\mathbf{r}|/l)$ , 其中  $l$  为空间相关长度, 实际上也就是晶粒的半径. 但本文考虑晶粒的半径呈截断对数正态分布<sup>[22]</sup>, 其概率密度函数为

$$\begin{aligned}
 P(l) &= \left[ \Phi \left( \frac{\ln b - \mu}{\sigma} \right) - \Phi \left( \frac{\ln a - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1} \\
 & \times (l\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp \left( -\frac{(\ln l - \mu)^2}{2\sigma^2} \right), \quad (14)
 \end{aligned}$$

其中  $\mu$  为位置参数,  $\sigma$  为尺度参数,  $a$  为下截断点,  $b$  为上截断点, 这四个参数可惟一确定分布的形态.  $\Phi(x) = [1 + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})]/2$ , 其中  $\operatorname{erf}(\ast)$  为高斯误差函数. 此时, 截断对数正态分布的数学期望为

$$\begin{aligned}
 \bar{l} &= \exp \left( \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\mu + \sigma^2 - \ln a}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right. \\
 & \left. - \operatorname{erf} \left( \frac{\mu + \sigma^2 - \ln b}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \\
 & \times \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\ln b - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{\ln a - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]^{-1}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

根据截断对数正态分布可构造加权的空间相关函数为

$$\begin{aligned}
 W(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^N P(l_i) \Delta l \exp(-|\mathbf{r}|/l_i) \\
 &= \sum_{i=1}^N P(l_i) \Delta l W_i(\mathbf{r}), \quad (16)
 \end{aligned}$$

其中  $l_i = a + (b - a)(2i - 1)/(2N)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\Delta l = (b - a)/N$ ,  $N$  为晶粒分布区间被划分的段数. 注意到, 在计算中  $N$  应足够大且  $\Delta l$  足够小, 使得  $\left| 1 - \sum_{i=1}^N P(l_i) \Delta l \right| < e$ , 定义  $e$  为给定的区间离散精度. 将(16)式代入(13)式, 可得到晶粒尺寸服从截断对数正态分布时的超声散射统一理论模型

$$\begin{aligned}
 0 &= C_{ijkl}^0 \hat{u}_k \hat{x}_l \hat{x}_j - \rho (\omega^2/k_\xi^2) \hat{u}_i \\
 & - \varepsilon^2 \langle \Delta C_{ijkl} \Delta C_{mnpq} \rangle \sum_{i=1}^N P(l_i) \Delta l \\
 & \times \int_V G_{km}(\mathbf{r}) [W_i(\mathbf{r}) \exp(ik_\xi \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{x}})]_{,ln} \\
 & \times d\mathbf{r} \hat{u}_p \hat{x}_q \hat{x}_j, \quad (17)
 \end{aligned}$$

(17) 式是本文的一个主要成果. 接着, 结合 Stanke 和 Kino<sup>[11]</sup> 给出的弹性模量协方差张量

$\langle \Delta C_{ijkl} \Delta C_{mnpq} \rangle$ , 可对(17)式进行求解, 假设纵波和横波都沿着  $x_3$  方向传播, 其中横波的偏

振方向为  $x_1$  方向, 可得纵波和横波的复波数分别为:

$$\begin{aligned}
 & k_L^2 - k_{0L}^2 \\
 = & \sum_{i=1}^N P(l_i) \Delta l \left\{ -\frac{v^2}{525 \langle C_{3333} \rangle^2} \frac{k_L^2}{4k_{0L}^2 l_i^2} \left[ \arctan \left( \frac{k_L l_i}{1 + ik_{0L} l_i} \right) \left( 2k_L l_i + \frac{6 + 30k_{0L}^2 l_i^2}{k_L l_i} \right) \right. \right. \\
 & + \frac{6 + 36k_{0L}^2 l_i^2 + 30k_{0L}^4 l_i^4}{k_L^3 l_i^3} + \frac{2 + 6k_{0L}^2 l_i^2 + 6k_{0L}^4 l_i^4 + 2k_{0L}^6 l_i^6}{k_L^5 l_i^5} \left. \right] - \arctan \left( \frac{k_L l_i}{1 + ik_{0T} l_i} \right) \\
 & \times \left( 2k_L l_i + \frac{6 - 18k_{0T}^2 l_i^2}{k_L l_i} + \frac{6 - 12k_{0T}^2 l_i^2 - 18k_{0T}^4 l_i^4}{k_L^3 l_i^3} + \frac{2 + 6k_{0T}^2 l_i^2 + 6k_{0T}^4 l_i^4 + 2k_{0T}^6 l_i^6}{k_L^5 l_i^5} \right) \\
 & - \frac{64k_{0L}^2 l_i^2 (1 + 2ik_{0L} l_i + k_L^2 l_i^2)}{1 + 2ik_{0L} l_i + k_L^2 l_i^2 - k_{0L}^2 l_i^2} - \frac{80k_{0T}^2 l_i^2 (1 + 2ik_{0T} l_i + k_L^2 l_i^2)}{1 + 2ik_{0T} l_i + k_L^2 l_i^2 - k_{0T}^2 l_i^2} + 2il_i (k_{0L} - k_{0T}) \\
 & + \frac{4i (k_{0L} - k_{0T})}{k_L^2 l_i} - \frac{16 (2k_{0L}^2 + k_{0T}^2)}{k_L^2} + \frac{4il_i (23k_{0L}^3 + 13k_{0T}^3)}{3k_L^2} + \frac{2i (k_{0L} - k_{0T})}{k_L^4 l_i^3} \\
 & - \frac{4 (k_{0L}^2 - k_{0T}^2)}{k_L^4 l_i^2} + \frac{4i (k_{0L}^3 - k_{0T}^3)}{k_L^4 l_i} - \frac{2 (k_{0L}^4 - k_{0T}^4)}{k_L^4} + \frac{2il_i (k_{0L}^5 - k_{0T}^5)}{k_L^4} \left. \right\}, \tag{18a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & k_T^2 - k_{0T}^2 \\
 = & \sum_{i=1}^N P(l_i) \Delta l \left\{ -\frac{v^2}{1050 \langle C_{1313} \rangle^2} \frac{k_T^2}{4k_{0T}^2 l_i^2} \left[ \arctan \left( \frac{k_T l_i}{1 + ik_{0L} l_i} \right) \left( -2k_T l_i - \frac{6 - 18k_{0L}^2 l_i^2}{k_T l_i} \right) \right. \right. \\
 & - \frac{6 - 12k_{0L}^2 l_i^2 - 18k_{0L}^4 l_i^4}{k_T^3 l_i^3} - \frac{2 + 6k_{0L}^2 l_i^2 + 6k_{0L}^4 l_i^4 + 2k_{0L}^6 l_i^6}{k_T^5 l_i^5} \left. \right] + \arctan \left( \frac{k_T l_i}{1 + ik_{0T} l_i} \right) \\
 & \times \left( 2k_T l_i + \frac{6 + 18k_{0T}^2 l_i^2}{k_T l_i} + \frac{6 + 24k_{0T}^2 l_i^2 + 18k_{0T}^4 l_i^4}{k_T^3 l_i^3} + \frac{2 + 6k_{0T}^2 l_i^2 + 6k_{0T}^4 l_i^4 + 2k_{0T}^6 l_i^6}{k_T^5 l_i^5} \right) \\
 & - \frac{80k_{0L}^2 l_i^2 (1 + 2ik_{0L} l_i + k_T^2 l_i^2)}{1 + 2ik_{0L} l_i + k_T^2 l_i^2 - k_{0L}^2 l_i^2} - \frac{112k_{0T}^2 l_i^2 (1 + 2ik_{0T} l_i + k_T^2 l_i^2)}{1 + 2ik_{0T} l_i + k_T^2 l_i^2 - k_{0T}^2 l_i^2} - 2il_i (k_{0L} - k_{0T}) \\
 & - \frac{4i (k_{0L} - k_{0T})}{k_T^2 l_i} - \frac{(16k_{0L}^2 + 20k_{0T}^2)}{k_T^2} + \frac{4il_i (13k_{0L}^3 + 14k_{0T}^3)}{3k_T^2} - \frac{2i (k_{0L} - k_{0T})}{k_T^4 l_i^3} \\
 & + \frac{4 (k_{0L}^2 - k_{0T}^2)}{k_T^4 l_i^2} - \frac{4i (k_{0L}^3 - k_{0T}^3)}{k_T^4 l_i} + \frac{2 (k_{0L}^4 - k_{0T}^4)}{k_T^4} - \frac{2il_i (k_{0L}^5 - k_{0T}^5)}{k_T^4} \left. \right\}, \tag{18b}
 \end{aligned}$$

其中零阶均匀介质的纵波和横波波数分别为  $k_{0L} = \omega \sqrt{\rho / \langle C_{3333} \rangle}$  及  $k_{0T} = \omega \sqrt{\rho / \langle C_{1313} \rangle}$ ,  $v$  为立方对称材料各向异性系数. 另外需要注意的是,  $\epsilon^2$  被隐式地并入二阶晶粒统计量的计算中. 继而, 将复波数进行简单分解, 即可得到考虑晶粒分布特性的多晶体金属超声衰减系数和相速度<sup>[12]</sup>:

$$k_L = \omega / v_L - i\alpha_L, \tag{19a}$$

$$k_T = \omega / v_T - i\alpha_T, \tag{19b}$$

其中  $v_L = \omega / \text{Re}(k_L)$  和  $v_T = \omega / \text{Re}(k_T)$  分别为纵波和横波的相速度,  $\alpha_L = -\text{Im}(k_L)$  和  $\alpha_T = -\text{Im}(k_T)$  分别为纵波和横波的衰减系数. 通过(18a)式和(18b)式即可计算不同频点下的衰减系数和相速度, 即衰减谱和相速度谱. 因此, 问题的

关键是如何对(18a)式和(18b)式进行有效的求解. 本文拟使用迭代方法<sup>[2,23]</sup>对其进行计算, 但由于(18a)式和(18b)式属于复杂的非线性超越方程, 迭代时对初值的选择极为敏感. 因此, 引入超声散射的分区近似模型, 用理论近似解作为迭代初值, 以实现超声散射统一理论模型的快速求解.

Stanke 和 Kino 基于不含晶粒分布的超声散射统一理论, 已经推导了在瑞利散射区、随机散射区和几何散射区下的复波数近似模型. 当考虑晶粒分布时, 本文通过截断对数正态分布函数, 构造加权平均得到近似模型. 因此, 对于纵波, 近似模型分别为:

$$k_L^R = k_{0L} + \frac{2v^2}{375 \langle C_{3333} \rangle^2} \left[ k_{0L} \left( 2 + 3 \frac{\langle C_{3333} \rangle}{\langle C_{1313} \rangle} \right) \right]$$

$$-ik_{0L}^4 \left( \sum_{i=1}^N P(l_i) \Delta l \cdot l_i^3 \right) \times \left( 4 + 6 \frac{\langle C_{3333} \rangle^{5/2}}{\langle C_{1313} \rangle^{5/2}} \right), \quad (20a)$$

$$k_L^S = k_{0L} + \frac{4v^2}{525 \langle C_{3333} \rangle^2} \left[ \frac{5}{2} k_{0L} \frac{\langle C_{1313} \rangle}{\langle C_{3333} \rangle - \langle C_{3333} \rangle} - ik_{0L}^2 \left( \sum_{i=1}^N P(l_i) \Delta l \cdot l_i \right) \right], \quad (20b)$$

$$k_L^G = k_{0L} - k_{0L} \sqrt{\frac{4v^2}{525 \langle C_{3333} \rangle^2}} - \frac{i}{2} \left( \sum_{i=1}^N P(l_i) \Delta l \cdot \frac{1}{l_i} \right), \quad (20c)$$

而对于横波有

$$k_T^R = k_{0T} + \frac{v^2}{250 \langle C_{1313} \rangle^2} \left[ k_{0T} \left( 2 \frac{\langle C_{1313} \rangle}{\langle C_{3333} \rangle} + 3 \right) - ik_{0T}^4 \left( \sum_{i=1}^N P(l_i) \Delta l \cdot l_i^3 \right) \times \left( 4 \frac{\langle C_{1313} \rangle^{5/2}}{\langle C_{3333} \rangle^{5/2}} + 6 \right) \right], \quad (21a)$$

$$k_T^S = k_{0T} + \frac{v^2}{150 \langle C_{3333} \rangle^2} \left[ \frac{5}{7} k_{0T} \frac{7 \langle C_{3333} \rangle - 3 \langle C_{1313} \rangle}{\langle C_{3333} \rangle - \langle C_{1313} \rangle} - ik_{0T}^2 \left( \sum_{i=1}^N P(l_i) \Delta l \cdot l_i \right) \right], \quad (21b)$$

$$k_T^G = k_{0T} + k_{0T} \sqrt{\frac{v^2}{150 \langle C_{1313} \rangle^2}} - \frac{i}{2} \left( \frac{3}{4} \sum_{i=1}^N P(l_i) \Delta l \cdot \frac{1}{l_i} \right), \quad (21c)$$

其中, 上标 R, S, 和 G 分别代表着瑞利 (Rayleigh) 散射区、随机 (Stochastic) 散射区和几何 (Geometric) 散射区. 当归一化频率为  $0 < 2k_{0\xi}\bar{l} \leq 10^{-1}$  时, 本文以瑞利散射区为 (18a) 式和 (18b) 式的迭代求解初值; 当归一化频率为  $10^{-1} < 2k_{0\xi}\bar{l} \leq 10^1$  时, 以随机散射区为初值; 当归一化频率为  $2k_{0\xi}\bar{l} > 10^1$  时, 则以几何散射区为初值.

### 2.3 数值结果分析

为揭示晶粒分布对衰减谱和相速度谱的影响, 取具有相同数学期望值的截断对数正态分布进行对比, 其中选取晶粒半径的下截断点为  $a = 10 \mu\text{m}$ , 上截断点为  $b = 120 \mu\text{m}$ , 平均晶粒半径为  $\bar{l} = 25 \mu\text{m}$ . 选取尺度参数分别为

$\sigma = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ , 则从 (15) 式可知相应的位置参数, 从而得到概率密度分布函数图, 如图 1 所示. 显然, 截断对数正态分布仅在  $l \in [10, 120] \mu\text{m}$  的范围内有意义, 在该范围外被成功地截断, 通过积分  $\int_a^b P(l) dl$  进行检验, 结果等于 1. 当尺度参数越小时, 晶粒半径的分布越集中, 且概率密度的峰值约接近于设定的数学期望值. 当尺度参数越大时, 例如  $\sigma = 1$  时, 截断的作用和效果越明显, 同时验证了截断对数正态分布可表现出近似于指数分布的特性 [17]. 而当  $\sigma \rightarrow 0$  时, 即不考虑晶粒分布的情况. 另一方面, 在进行区间离散时, 本文给定晶粒分布区间的离散精度为  $e = 10^{-3}$ .

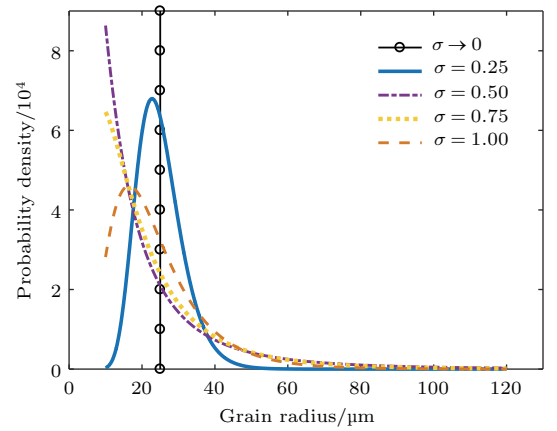


图 1 晶粒半径的概率密度分布

Fig. 1. Grain size distributions with a constant mean  $\bar{l} = 25 \mu\text{m}$  and varying scale parameter  $\sigma$ .

以图 1 所代表的 5 种晶粒分布为基础, 研究不同分布作用下的纵波和横波的衰减谱和相速度谱. 假设本文所选用的单相不锈钢材料的密度为  $\rho = 7930 \text{ kg/m}^3$ , 并分别设定其 3 个独立的单晶弹性常数为:  $c_{11} = 204.6 \text{ GPa}$ ,  $c_{12} = 137.7 \text{ GPa}$ ,  $c_{44} = 126.2 \text{ GPa}$  [24]. 同时,  $c_{33} = c_{22} = c_{11}$ ,  $c_{23} = c_{13} = c_{12}$ ,  $c_{66} = c_{55} = c_{44}$ , 其他单晶弹性常数均为 0. 各向异性系数上述单晶弹性常数的下标采用 Voigt 记法:  $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$ . 根据一阶晶粒统计量的 Voigt 平均有:

$$\begin{aligned} \langle C_{3333} \rangle &= \frac{1}{5} (c_{11} + c_{22} + c_{33}) + \frac{2}{15} (c_{12} + c_{13} + c_{23}) \\ &\quad + \frac{4}{15} (c_{44} + c_{55} + c_{66}), \quad (22a) \\ \langle C_{1313} \rangle &= \frac{1}{15} (c_{11} + c_{22} + c_{33}) - \frac{1}{15} (c_{12} + c_{13} + c_{23}) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{5} (c_{44} + c_{55} + c_{66}), \quad (22b)$$

因此, 可知  $\langle C_{3333} \rangle = 278.8$  GPa,  $\langle C_{1313} \rangle = 89.1$  GPa. 故而又可计算立方对称材料各向异

性系数  $v = c_{11} - c_{12} - 2c_{44}$  为  $-185.5$  GPa. 接着, 可求解得到考虑晶粒分布特性的多晶体金属超声散射统一理论模型, 结果如图 2 至图 5 所示. 由图 2 和图 3 可见, 在瑞利散射区, 即  $0 < 2k_{0L}\bar{l} \leq 10^{-1}$  或

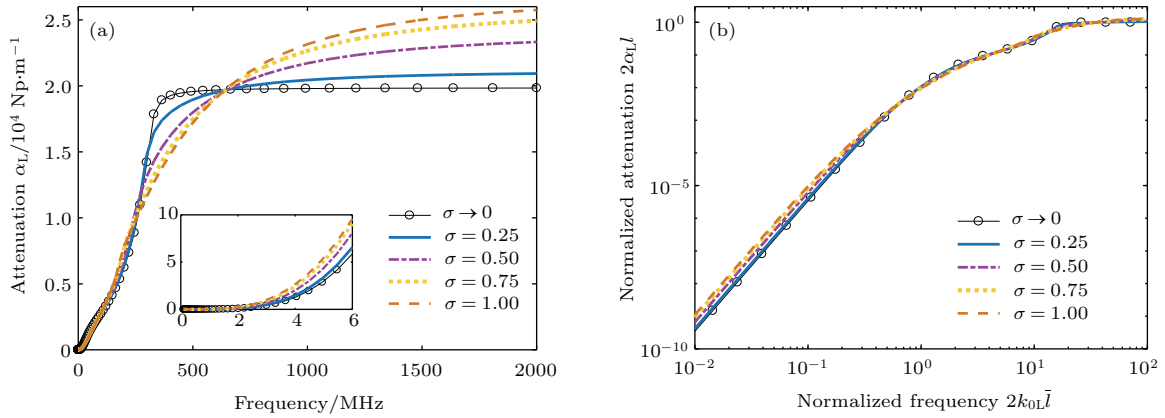


图 2 不同晶粒分布下的纵波衰减谱 (a) 衰减-频率图; (b) 归一化衰减-归一化频率图(双对数坐标图)

Fig. 2. Attenuation spectrums of longitudinal wave using different grain size distributions: (a) Attenuation-frequency graph; (b) normalized attenuation-normalized frequency graph (log-log plot).

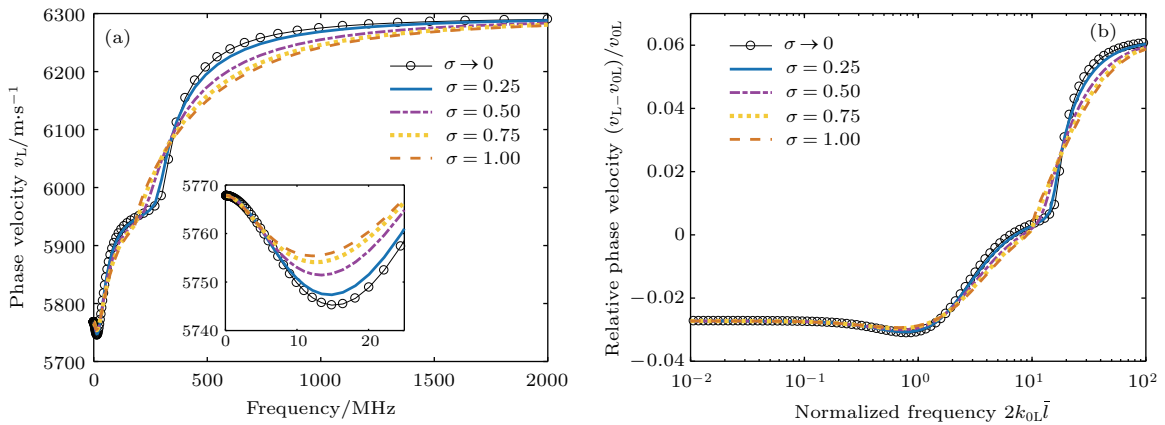


图 3 不同晶粒分布下的纵波相速度谱 (a) 相速度-频率图; (b) 相对相速度-归一化频率图(双对数坐标图)

Fig. 3. Phase velocity spectrums of longitudinal wave using different grain size distributions: (a) Phase velocity-frequency graph; (b) relative phase velocity-normalized frequency graph (log-log plot).

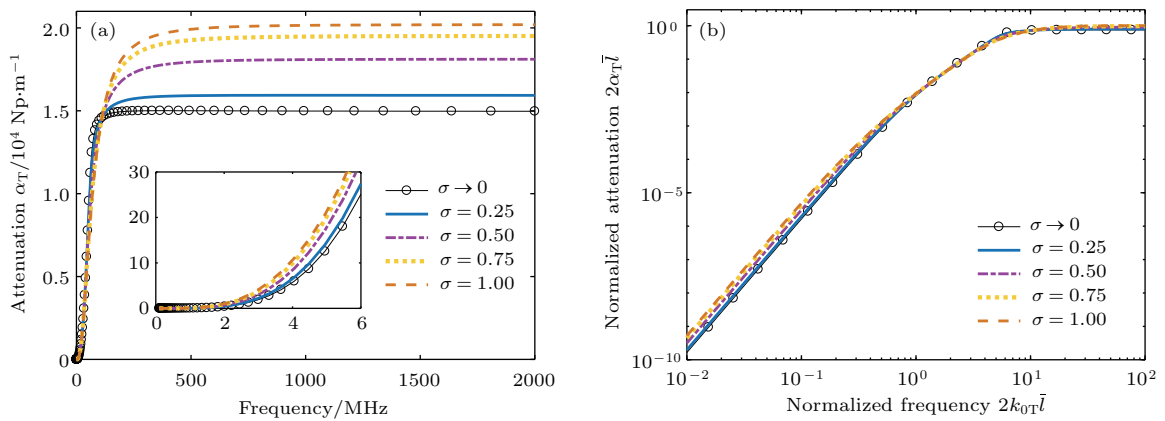


图 4 不同晶粒分布下的横波衰减谱 (a) 衰减-频率图; (b) 归一化衰减-归一化频率图(双对数坐标图)

Fig. 4. Attenuation spectrums of transverse wave using different grain size distributions: (a) Attenuation-frequency graph; (b) normalized attenuation-normalized frequency graph (log-log plot).

频率为  $0 < f \leq 1.89$  MHz时, 晶粒分布尺度参数越大, 纵波衰减越大, 相速度基本不变; 在随机散射区, 即  $10^{-1} < 2k_{0L}\bar{l} \leq 10^1$  或频率为  $1.89 < f \leq 189$  MHz时,  $\sigma = 1$  的纵波衰减曲线和相速度曲线分别围绕  $\sigma \rightarrow 0$  的纵波衰减曲线和

相速度曲线波动; 在几何散射区, 即  $2k_{0L}\bar{l} > 10^1$  或频率为  $f > 189$  MHz时,  $\sigma = 1$  的纵波衰减曲线和  $\sigma \rightarrow 0$  的纵波衰减曲线比先变小、后变大,  $\sigma = 1$  的纵波相速度曲线和  $\sigma \rightarrow 0$  的纵波相速度曲线比先变大、后变小. 由图4和图5可见, 在瑞利散射区、

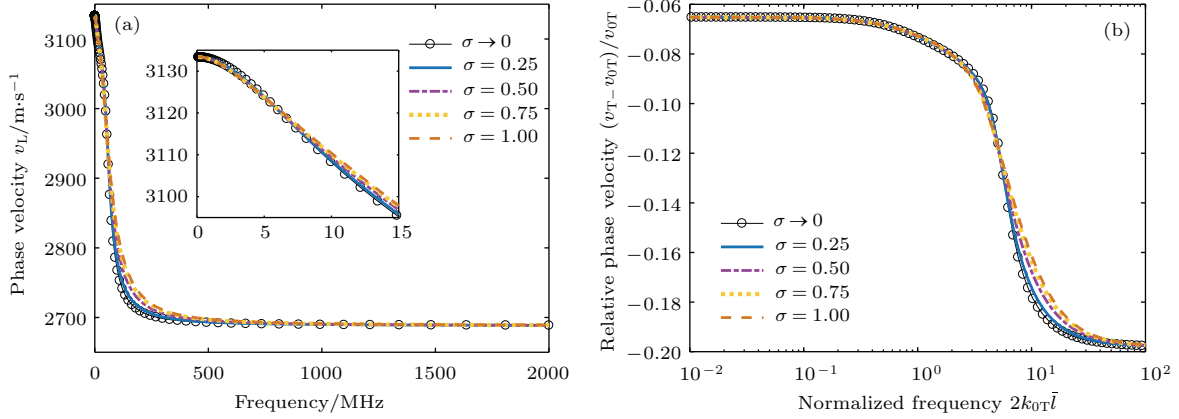


图5 不同晶粒分布下的横波相速度谱 (a) 相速度-频率图; (b) 相对相速度-归一化频率图(双对数坐标图)

Fig. 5. Phase velocity spectrums of transverse wave using different grain size distributions: (a) Phase velocity-frequency graph; (b) relative phase velocity-normalized frequency graph (log-log plot).

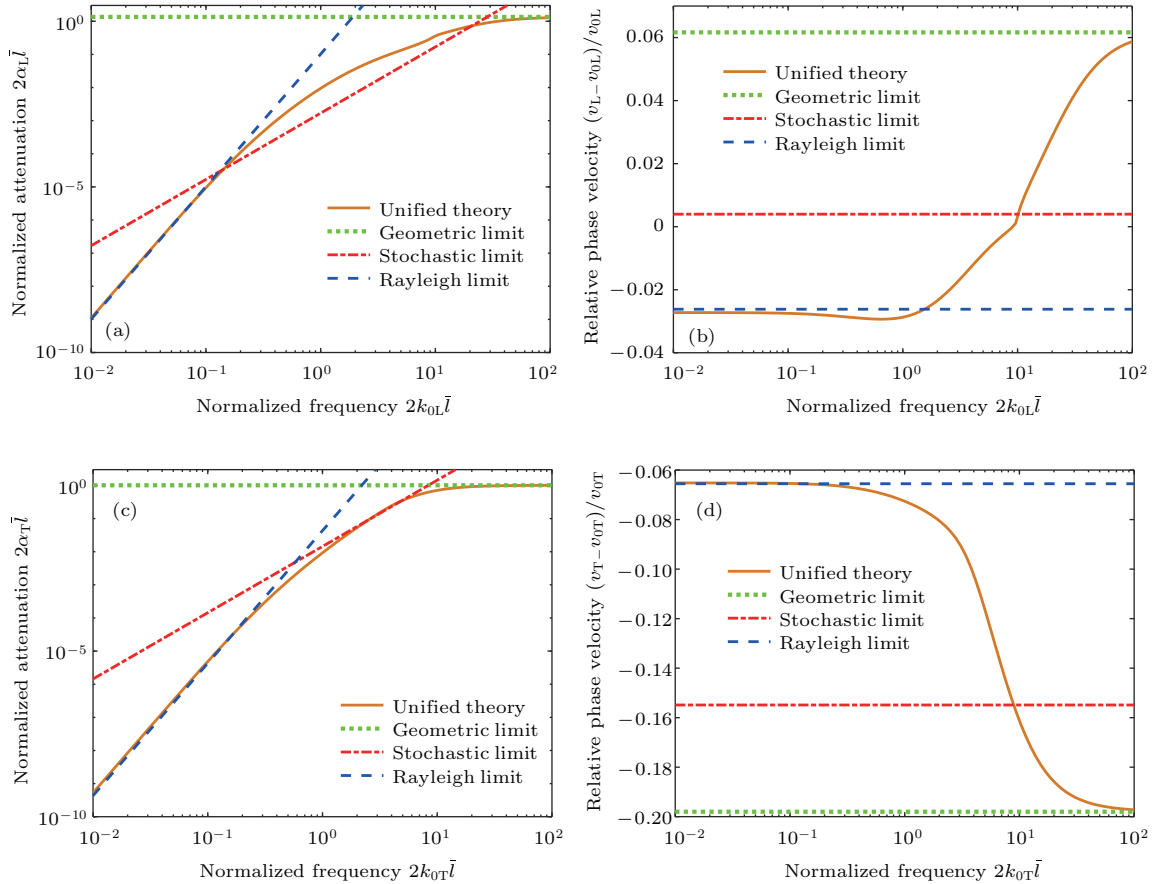


图6 超声散射分区近似模型和统一理论模型的对比 (a) 纵波衰减; (b) 纵波相速度; (c) 横波衰减; (d) 横波相速度

Fig. 6. Comparison between the asymptotic model and the unified theory model for ultrasonic scattering: (a) Longitudinal wave, attenuation; (b) longitudinal wave, phase velocity; (c) transverse wave, attenuation; (d) transverse wave, phase velocity.

瑞利散射和随机散射的转换区, 即  $0 < 2k_{0T}\bar{l} \leq 10^0$  或频率为  $0 < f \leq 10.7$  MHz 时, 晶粒分布尺度参数越大, 横波衰减越大, 相速度基本不变; 在随机散射和几何散射的转换区、几何散射区, 即  $2k_{0T}\bar{l} > 10^0$  或频率为  $f > 10.7$  MHz 时,  $\sigma = 1$  的横波衰减曲线和相速度曲线分别围绕  $\sigma \rightarrow 0$  的横波衰减曲线和相速度曲线先变小、后变大。

最后, 以  $\sigma = 1$  时的晶粒分布为例, 比较超声散射的分区近似模型和统一理论模型, 结果如图 6 所示. 可明显看出, 分区近似模型是离散的, 尤其是相速度谱不连续, 在不同的散射区之间没有交点. 而在精度方面, 瑞利散射区和几何散射区的近似精度较高, 误差主要存在于随机散射区及其两个相邻的转换区. 因此, 研究统一理论模型是有必要的, 结果在全频域上可连续, 而分区近似模型作为近似解, 作为统一理论模型迭代求解的初值也是合适的。

### 3 实验系统及测量结果

本文实验采用 304 不锈钢材料对理论模型进行验证. 首先对一个 304 不锈钢坯料进行线切割加工, 得到一个外形尺寸为  $40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$  的超声实验试块, 并在其相邻位置切割出三个  $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$  的金相实验样品, 假设超声实验试块和金相样的微观组织在统计意义下完全一致. 对试块和金相样的表面分别用砂纸打磨至 1000 目, 并用尼龙布及  $0.3 \text{ }\mu\text{m}$  的抛光液进行抛光至镜面效果。

本文使用 EBSD 技术对材料进行金相分析<sup>[25]</sup>,

确定晶粒尺寸分布. 首先, 对金相样进行镶样, 利用 Buehler VibroMet 2 型振动抛光机对金相样进行 3 h 的振动抛光, 用 FEI Quanta 650 FEG 型场发射扫描电镜和 NordlysMax2 EBSD 探测器对金相样进行晶粒尺寸测定. 共测试 5 个视场, 其中一个测试结果如图 7 所示, 5 次测试中标定率最低为 95.47%. 通过 5 领域外插法对 EBSD 图像进行降噪去除非真实的小晶粒, 可以降低标定率对平均晶粒尺寸的影响. 使用 HKL CHANNEL5 软件包提供的晶粒重构算法可以直接算出平均晶粒尺寸, 并给出各个晶粒的具体分布情况, 其中临界的晶界角度取向差为  $10^\circ$ , 将晶粒取向差在  $10^\circ$  以内的孪晶合并成一个晶粒进行分析, 并通过将符合  $60^\circ$  (111) 关系的孪晶界完全除去, 对平均晶粒尺寸进一步修正为直径  $48.2 \text{ }\mu\text{m}$ . 每个正交面分别观察 3 个视场, 最终用 EBSD 测量得到平均的晶粒半径为  $\bar{l} = 24.1 \text{ }\mu\text{m}$ , 而晶粒半径最小值为  $10.0 \text{ }\mu\text{m}$ , 最大值为  $125.5 \text{ }\mu\text{m}$ . 故选取晶粒半径的下截断点为  $a = 10.0 \text{ }\mu\text{m}$ , 上截断点为  $b = 125.5 \text{ }\mu\text{m}$ . 基于最小二乘法, 调整位置参数和尺度参数, 对 5 个视场 EBSD 得到的晶粒半径频率分布立方图进行拟合. 截断对数正态分布拟合归一化结果如图 7 (b) 所示, 当  $\mu \approx -13.581$  且  $\sigma \approx 1.563$  时, 拟合优度为 99.2%.

由于水浸法难以测量横波衰减, 本文采用接触式脉冲反射法进行纵波和横波的实验. 超声信号采集系统主要由 JSR Ultrasonics 的 DPR300 型超声脉冲发生/接收器, ADLink 的 PCIe-9852 型高速数字采集卡, 以及不同的超声接触式探头构成. 考虑到几何散射区的衰减过大, 导致难以在实验中采集

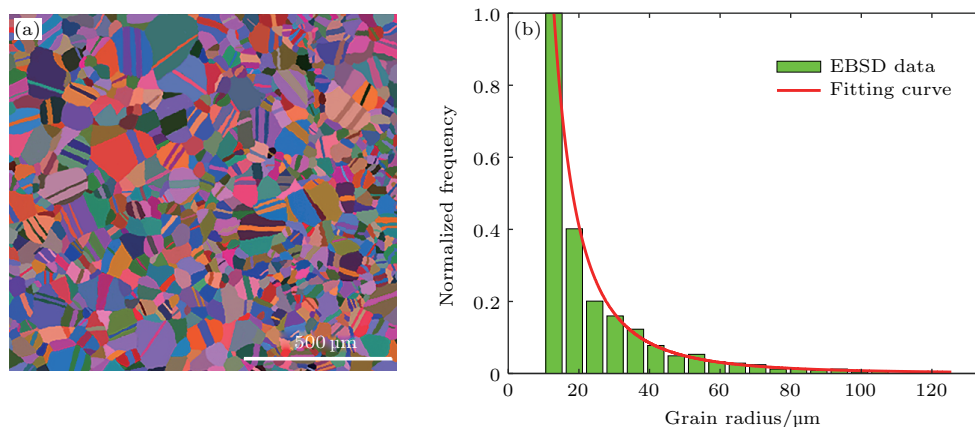


图 7 304 不锈钢金相样的 EBSD 测量结果 (a) 降噪后的取向成像图; (b) 晶粒半径分布

Fig. 7. The EBSD measurement results of the 304 stainless steel specimen: (a) The orientation imaging of the samples after denoising; (b) the grain size distribution.

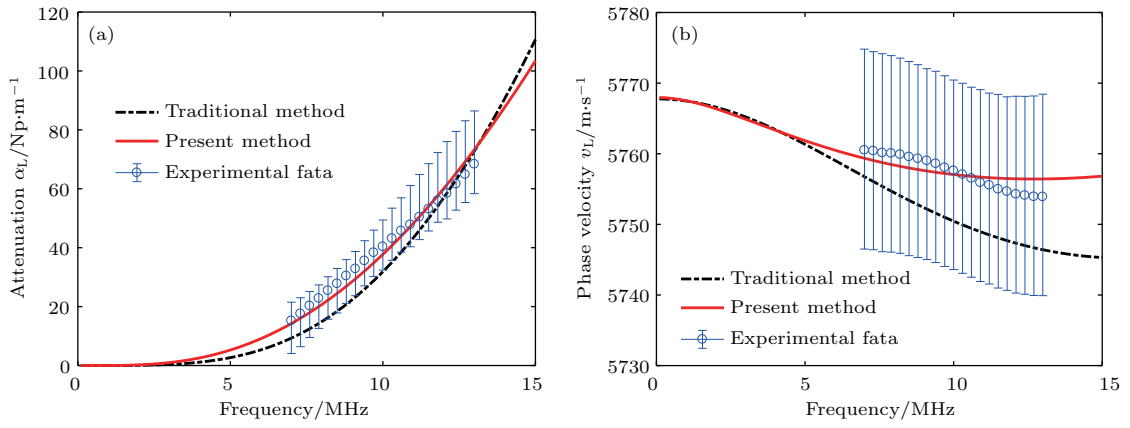


图8 纵波散射实验结果 (a) 衰减谱; (b) 相速度谱

Fig. 8. The experimental results of the longitudinal wave scattering: (a) Attenuation spectrum; (b) phase velocity spectrum.

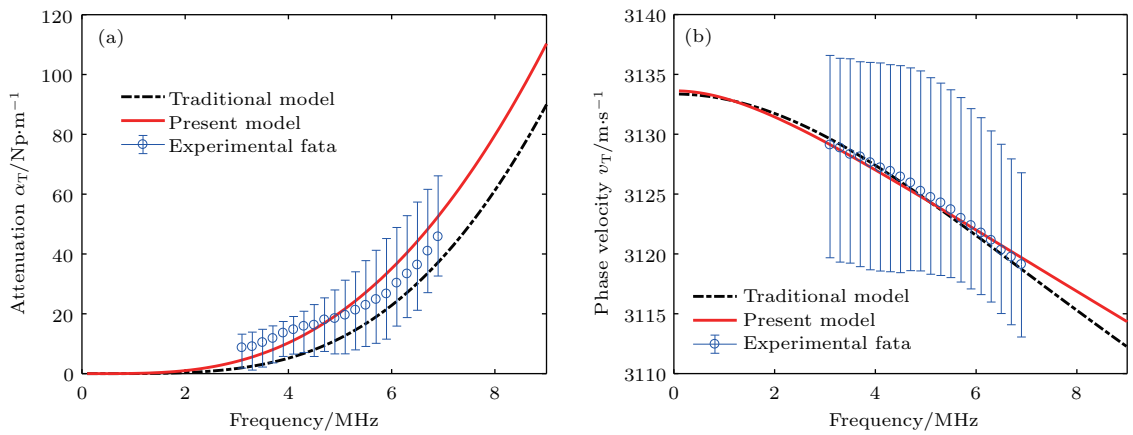


图9 横波散射实验结果 (a) 衰减谱; (b) 相速度谱

Fig. 9. The experimental results of the transverse wave scattering: (a) Attenuation spectrum; (b) phase velocity spectrum.

表1 实验结果与模型计算值之间相异性度量结果

Table 1. The measures of dissimilarities between experimental data and theoretical model.

距离 度量类别	纵波衰减			纵波相速度		
	本文模型/ $Np \cdot m^{-1}$	传统模型/ $Np \cdot m^{-1}$	变化率/%	本文模型/ $m \cdot s^{-1}$	传统模型/ $m \cdot s^{-1}$	变化率/%
一范数	154.5	390.1	-60.39	84.54	395.1	-78.60
二范数	21.85	55.14	-60.37	11.98	51.15	-76.57
无穷范数	9.780	4.971	-49.17	2.664	7.495	-64.45
距离 度量类别	横波衰减			横波相速度		
	本文模型/ $Np \cdot m^{-1}$	传统模型/ $Np \cdot m^{-1}$	变化率/%	本文模型/ $m \cdot s^{-1}$	传统模型/ $m \cdot s^{-1}$	变化率/%
一范数	178.3	295.5	-39.65	14.51	16.66	-12.93
二范数	31.22	46.73	-33.19	4.183	5.416	-7.266
无穷范数	7.948	9.078	-12.45	1.195	1.287	-4.677

注: 一范数为误差绝对值之和, 其均值为平均绝对误差; 二范数为误差平方和的平方根, 其平方的均值为均方误差; 无穷范数为最大误差值的绝对值;  $1 Np = 8.68 \text{ dB}$ .

到超声回波, 本文选用 Olympus 的 V111-RM 型 10 MHz 纵波直探头, 和 V155-RB 型 5 MHz 横波直探头, 开展超声衰减谱和相速度谱测量实验<sup>[26]</sup>. 10 MHz 纵波和 5 MHz 横波的频段正好处于瑞利散射和随机散射的转换区 ( $2k_{0L}\bar{l} = 0.511$ ,  $2k_{0T}\bar{l} = 0.452$ ), 可同时对两个散射区进行验证. 纵波衰减谱和相速度谱的实验结果如图 8 所示, 而横波衰减谱和相速度谱的实验结果如图 9 所示, 图中实验测量结果仅显示探头有效带宽部分. 对相异性度量进行计算, 得到不同范数意义下的距离比较, 结果如表 1 所示. 可见, 考虑晶粒分布特性对超声散射统一理论模型进行修正后, 衰减谱和相速度谱测量结果和理论模型之间的相异性存在不同程度的降低. 其中, 纵波衰减谱和相速度谱的符合程度提高得尤为明显.

## 4 讨 论

从以下四个方面对考虑晶粒分布特性的多晶体金属超声散射统一理论进行分析和讨论.

首先, 选用截断对数正态分布取代传统的对数正态分布来描述多晶体金属的晶粒分布特性, 使晶粒分布模型具有了实际的物理意义, 避免了晶粒尺寸为零, 或为无穷大的情况出现. 而且通过 EBSD 的金相分析方法, 确定了晶粒分布的上界和下界, 继而惟一确定了晶粒的截断对数正态分布, 这也证明了本方法在物理上是可行的.

第二, 应注意到本文的 (18a) 式、(18b) 式和 Hirsekorn 所给出的多相材料超声散射统一理论模型在数学形式上是等价的 (见文献 [12] 中 (14) 式和 (15) 式). Hirsekorn 的模型是每个晶粒的物相不同, 但尺寸相同, 根据相含量进行加权. 而本文模型是每个晶粒的尺寸不同, 但物相相同, 根据晶粒分布进行加权. 其中蕴含的物理意义是: 可认为具有同一物相、同一晶粒尺寸的晶粒的集合, 是对超声散射起作用的一组基本单元.

第三, 应注意到在本文的 (20b) 式和 (21b) 式中, 有  $\sum_{i=1}^N P(l_i) \Delta l \cdot l_i = \bar{l}$ . 因此, 随机散射区的近似模型不管是纵波还是横波, 在数学上都将退化为 Stanke 和 Kino 所研究的不考虑晶粒分布的形式. 从物理上可理解为, 在随机散射区, 超声散射主要受平均晶粒尺寸的影响, 个别大晶粒的强散射作用被众多小晶粒的弱散射作用部分中和, 此结果也在

图 2(b) 至图 5(b) 中得到证实.

最后, 从图 5(b) 和图 9(b) 可发现, 横波相速度在瑞利散射和随机散射区受晶粒分布的影响相对较小, 此物理特性可能应用于材料晶粒分布的超声散射反演评价. 其原因是, 用横波相速度估计平均晶粒尺寸后, 晶粒分布独立的参数只剩余三个, 此时通过纵波衰减、纵波相速度、横波衰减联立求解剩余的三个参数, 继而可无损估计晶粒分布.

## 5 结 论

基于晶粒尺寸的截断对数正态分布特性, 推导了受晶粒分布影响的多晶体材料超声散射统一理论. 根据该理论模型, 在平均晶粒尺寸一致的条件下, 通过数值模拟方法分析了晶粒分布范围扩大对固体内部超声背散射的影响: 1) 对纵波及横波衰减而言, 在瑞利散射区衰减和几何散射区的衰减明显增大, 而在随机散射区及相邻两个转换区衰减变化幅度较小; 2) 对纵波相速度而言, 在随机散射区及其与几何散射的转换区内有明显的变化, 而在其他散射区的变化较小; 3) 对横波相速度而言, 除了在随机散射与几何散射转换区的变化明显外, 其他散射区变化较小. 对于晶粒半径在 10.0—125.5  $\mu\text{m}$  范围内变化的 304 不锈钢试块, 实验结果表明, 晶粒分布修正后模型的精度高于传统模型. 其中, 纵波衰减谱和相速度谱的精度有显著的提高, 和实验结果间的一范数距离比传统模型分别降低了约 60% 和 79%. 可见, 仅使用平均晶粒尺寸建模, 无法准确地计算衰减谱和相速度谱, 有必要考虑晶粒分布进行修正. 未来, 本文模型可进一步扩展至含拉长晶粒、宏观织构或多个物相的材料.

## 参考文献

- [1] Li J, Rokhlin S I 2015 *Wave Motion* **58** 145
- [2] Kube C M 2017 *J. Acoust. Soc. Am.* **141** 1804
- [3] O'Donnell M, Jaynes E T, Miller J G 1978 *J. Acoust. Soc. Am.* **63** 1935
- [4] Mason W P, McSkimin H J 1947 *J. Acoust. Soc. Am.* **19** 464
- [5] Mason W P, McSkimin H J 1948 *J. Appl. Phys.* **19** 940
- [6] Huntington H B 1950 *J. Acoust. Soc. Am.* **22** 362
- [7] Papadakis E P 1965 *J. Acoust. Soc. Am.* **37** 703
- [8] Weaver R L 1990 *J. Mech. Phys. Solids* **38** 55
- [9] Calvet M, Margerin L 2012 *J. Acoust. Soc. Am.* **131** 1843
- [10] Calvet M, Margerin L 2016 *Wave Motion* **65** 29

- [11] Stanke F E, Kino G S 1984 *J. Acoust. Soc. Am.* **75** 665
- [12] Hirsekorn S 1988 *J. Acoust. Soc. Am.* **83** 1231
- [13] Ahmed S, Thompson R B 1992 *Nondestr. Test. Eval.* **8** 525
- [14] Sha G, Rokhlin S I 2018 *Ultrasonics* **88** 84
- [15] Papadakis E P 1964 *J. Appl. Phys.* **35** 1586
- [16] Papadakis E P 1961 *J. Acoust. Soc. Am.* **33** 1616
- [17] Nicoletti D, Anderson A 1997 *J. Acoust. Soc. Am.* **101** 686
- [18] Smith R L 1982 *Ultrasonics* **20** 211
- [19] Chen Y, Luo Z B, Zhang D H, Zhou Q, Liu L L, Yang H M, Lin L 2016 *J. Mech. Eng.* **18** 24 (in Chinese) [陈尧, 罗忠兵, 张东辉, 周全, 刘丽丽, 杨会敏, 林莉 2016 机械工程学报 **18** 24]
- [20] Rzyzy M, Grabec T, Sedlák P, Veres I A 2018 *J. Acoust. Soc. Am.* **143** 219
- [21] Arguelles A P, Turner J A 2017 *J. Acoust. Soc. Am.* **141** 4347
- [22] Bebu I, Mathew T 2009 *Stat. Probabil. Lett.* **79** 375
- [23] Zheng Q, Li J, Huang F 2011 *Appl. Math. Comput.* **217** 9592
- [24] Song Y F, Li X B, Shi Y W, Ni P J 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 214301 (in Chinese) [宋永锋, 李雄兵, 史亦韦, 倪培君 2016 物理学报 **65** 214301]
- [25] Schwartz A J, Kumar M, Adams B L, Field D P 2009 *Electron Backscatter Diffraction in Materials Science* (Berlin, Heidelberg: Springer) pp53–81
- [26] Treiber M, Kim J Y, Jacobs L J, Qu J 2009 *J. Acoust. Soc. Am.* **125** 2946

# Ultrasonic scattering unified theory for polycrystal material with grain sizes distribution\*

Li Shan<sup>1)</sup> Li Xiong-Bing<sup>1)</sup> Song Yong-Feng<sup>1)†</sup> Chen Chao<sup>2)</sup>

1) (School of Traffic and Transportation Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

2) (State Key Laboratory of Powder Metallurgy, Central South University, Changsha 410083, China)

( Received 22 September 2018; revised manuscript received 11 October 2018 )

## Abstract

The existing unified theory of ultrasonic scattering can model the attenuation and phase velocity in the frequency domain by using the microstructure and mechanical properties of polycrystalline materials. However, this theory does not consider the influence of grain size distribution, thus degrading the calculation accuracy in the forward modeling. A new unified theory, which is mainly corrected by considering the grain size distribution, is developed. First, the second-order Keller approximation and the full-field Green's function are used to calculate the wave equation of inhomogeneous medium and derive the average wave in the medium, respectively. Second, the method of the truncated lognormal distribution is used to describe the grain size distribution and construct the weighted spatial correlation function. Finally, the new unified theory of ultrasonic scattering is established to reveal the influence of grain distribution on ultrasonic scattering.

Using the new unified model, the effects of the grain distribution widening on the ultrasonic scattering while the average grain size is unchanged, are analyzed for the longitudinal wave and the shear wave. The attenuation increases in the Rayleigh scattering region and the geometric scattering region, while there is less attenuation variation in the stochastic scattering region and two adjacent transition regions. The phase velocity varies strongly in the stochastic-geometric transition region, while the variation is relatively small in other scattering zones. Experiments are conducted by using a 304 stainless steel specimen. The results show that when the grain distribution characteristics are considered, the discrepancy between the longitudinal wave attenuation spectrum and experimental results, and that between the phase velocity spectrum and experimental results are reduced by 49% and 64%, respectively; for the shear wave, these discrepancies are reduced by 12% and 4%, respectively.

From all above aspects, the accuracy of the new model is higher than that of the traditional model. The new unified theory proposed in this paper can effectively correct the discrepancy of the attenuation spectrum and phase velocity spectrum caused by the grain size distribution and provide a theoretical basis for inverse problem of grain distribution. Also, the theory can be extended to materials containing elongated grains, macroscopic texture or multiple phases.

**Keywords:** ultrasonic scattering, unified theory, grain size, truncated log-normal distribution

**PACS:** 43.20.Bi, 43.20.Fn, 43.35.Cg

**DOI:** 10.7498/aps.67.20181751

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51575541, 51711530231) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Central South University, China (Grant No. 2018zzts515).

† Corresponding author. E-mail: [songyf\\_ut@163.com](mailto:songyf_ut@163.com)