

压电材料双曲壳热弹耦合作用下的混沌运动

李林利 薛春霞

Chaotic motion of piezoelectric material hyperbolic shell under thermoelastic coupling

Li Lin-Li Xue Chun-Xia

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 010501 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181714

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.68.20181714>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2019/V68/I1>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非扩散洛伦兹系统的周期轨道

Periodic orbits of diffusionless Lorenz system

物理学报.2018, 67(24): 240501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20181581>

兴奋性作用诱发神经簇放电个数不增反降的分岔机制

Bifurcation mechanism of not increase but decrease of spike number within a neural burst induced by excitatory effect

物理学报.2018, 67(24): 240502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20181675>

五阶压控忆阻蔡氏混沌电路的双稳定性

Bi-stability in a fifth-order voltage-controlled memristor-based Chua's chaotic circuit

物理学报.2018, 67(23): 230502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20181283>

窄带随机激励双稳压电悬臂梁响应机制与能量采集研究

Mechanism of a nonlinear bistable piezoelectric cantilever beam under narrow-band random excitations and its energy harvesting

物理学报.2018, 67(21): 210502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20180072>

分数阶 Willis 环脑迟发性动脉瘤时滞系统混沌分析

Chaotic analysis of fractional Willis delayed aneurysm system

物理学报.2018, 67(15): 150501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20180262>

压电材料双曲壳热弹耦合作用下的混沌运动*

李林利 薛春霞†

(中北大学理学院, 太原 030051)

(2018年9月15日收到; 2018年11月14日收到修改稿)

运用弹性力学有限变形基本理论推导出了压电材料双曲壳在外激力和温度场作用下的非线性振动方程和协调方程. 通过 Bubnov-Galerkin 原理, 得到该结构的非线性动力学方程. 利用 Melnikov 方法, 得到系统产生 Smale 马蹄变换意义下混沌的条件, 用四阶 Runge-Kutta 法编写程序对系统进行数值求解, 并绘制出相应的分岔图、Lyapunov 指数图、相轨迹图以及 Poincaré 截面图, 分析了温度场对压电材料双曲壳系统的非线性特性的影响. 仿真结果表明, 随着温度的升高, 系统的混沌与周期区交替出现, 温度场的改变可影响和控制系统的振动特性.

关键词: 双曲壳, 压电材料, 热弹耦合, 混沌

PACS: 05.45.-a, 46.25.Hf, 77.84.-s, 95.10.Fh

DOI: 10.7498/aps.68.20181714

1 引言

随着现代高新科学技术的迅猛发展, 压电材料作为智能材料的一种, 具有薄而轻、成本低、响应速度快、转换效率高、寿命长等优点, 被广泛应用于众多高科技设备和压电智能器件中. 而双曲壳结构作为工程中常见的结构之一, 常在机械场和温度场等多场作用的环境下工作, 其动力特性对系统的结构安全有重要影响. 因此对压电材料双曲壳在热弹耦合作用下的动力学分析具有重要的理论意义和实用价值. 国内外学者针对普通弹性梁板结构在热、电、磁多物理场耦合作用下混沌非线性动力学行为的研究, 已取得了一定的成果^[1-5]. 薛春霞等^[6]分析了磁感应强度和外加荷载对金属薄板振动特性的影响. 陈赵江等^[7]通过实验方法和理论推导对高功率超声脉冲激励下金属薄板的振动特性进行了分析研究. 与此同时, 对一些特殊功能材料板振动问题的研究也取得了显著成就^[8,9]. Hao 等^[10]首次在热环境下分析了简支功能梯度材料 (FGMS) 矩形板在横向和平面激励下的非线性动力学问题.

栗蕾^[11]系统地研究了考虑初始缺陷的网壳结构的非线性动力学行为和系统整体稳定性等问题. 周运朱^[12]通过几何非线性和几何材料双重非线性, 分析和考察了复杂曲面单层网壳结构的稳定性能. 曹洲等^[13]分析了各物理参数和温度场对功能梯度夹层双曲壳自由振动固有频率的影响. 此外, 数值模拟验证非线性系统的混沌动力学特性方面的研究对理论的分析奠定了必要的基础^[14-16].

综上所述, 对于双曲壳结构在热弹耦合作用下的混沌运动研究的较少. 本文以压电材料双曲壳结构为研究对象, 通过 MATLAB 软件建立数学模型并进行数值计算, 对在温度场和简谐外激励共同作用下的非线性振动行为进行分析. 结果表明, 温度场的改变可影响和控制系统的振动特性.

2 压电材料双曲壳的基本方程

薄壳振动理论的基本假设:

- 1) 变形前垂直中曲面的直线在变形后仍保持直线, 并垂直中曲面;
- 2) 沿中曲面垂直方向的法向应力忽略不计;

* 国家自然科学基金 (批准号: 11202190) 和教育部留学回国人员科研项目资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xuechunxia@nuc.edu.cn

3) 忽略不计转动惯性力矩和面内惯性力。

四边简支压电材料双曲壳模型如图 1 所示, 在双曲壳模型的中面建立正交曲线坐标系 (x_1, x_2, x_3) , 坐标原点为 o 点. 图中 x_1, x_2 分别是中面曲率线方向, x_3 表示沿着厚度的方向, 向上为正方向; a 表示沿 x_1 坐标方向的中面曲线长度, b 表示沿 x_2 坐标方向的中面曲线长度; R_1, R_2 分别表示 x_1, x_2 坐标方向上的曲率半径; h 表示双曲壳的厚度。

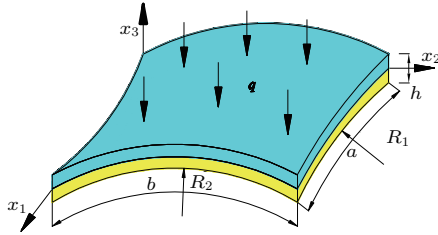


图 1 压电材料双曲壳模型

Fig. 1. Hyperbolic shell model for piezoelectric materials.

对于横观各向同性压电材料的双曲壳, 在考虑温度效应时的压电方程 [17] 如下:

$$\begin{cases} \sigma_1 = c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2 - e_{31}E_3 - t_{31}T, \\ \sigma_2 = c_{12}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2 - e_{31}E_3 - t_{31}T, \\ \tau_{12} = c_{66}\gamma_{12}, \\ D_E = e_{31}\varepsilon_1 + e_{31}\varepsilon_2 + \varepsilon_3E_3 + m_3T, \\ S = t_{31}\varepsilon_1 + t_{31}\varepsilon_2 + m_3E_3 + \alpha_0T, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $t_{31} = E\alpha/(1 - 2\nu)$ 为热-机械耦合常数, E 和 ν 分别为杨氏模量和泊松比, α 为线性膨胀系数; C 为比热, $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, c_{66}$ 表示压电材料的刚度; e_{31} 为压电系数, ε_3 为介电系数, m_3 为热-压电耦合常数, E_3 为电场, T 为温度增量; 而 σ_1, σ_2 和 τ_{12} 分别表示 x_1 方向和 x_2 方向的正应力和切应力; D_E 表示电位移, S 表示熵, $\alpha_0 = C/T_0$, T_0 是初始温度。

应用已知的扁壳大挠度几何方程, 得到双曲壳的位移应变关系为 [18]:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 - k_1w, \\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 - k_2w, \\ \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $k_1 = 1/R_1, k_2 = 1/R_2$.

设变温 $T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2) + x_3\bar{T}(x_1, x_2)$, 其中, $T_0(x_1, x_2)$ 是初始状态时, 沿壳体厚度方向分

布的平均温度, $\bar{T}(x_1, x_2)$ 是温度梯度. 设 $f_1(\xi, \eta)$ 和 $f_2(\xi, \eta)$ 是壳体的内、外表面的温度, 而且

$$T(x_1, x_2, x_3) = \frac{f_1 + f_2}{2} + x_3 \frac{f_1 - f_2}{h}, \quad (3)$$

其中,

$$\begin{aligned} f_1(\xi, \eta) &= \sum_{mn} L_{mn} \sin \alpha_m \xi \sin \beta_n \eta, \\ f_2(\xi, \eta) &= \sum_{mn} P_{mn} \sin \alpha_m \xi \sin \beta_n \eta. \end{aligned}$$

薄膜内力

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 dx_3, \\ N_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 dx_3, \\ N_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} dx_3, \end{aligned} \quad (4)$$

弯曲内力

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 x_3 dx_3, \\ M_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 x_3 dx_3, \\ M_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} x_3 dx_3. \end{aligned} \quad (5)$$

双曲壳的运动方程 [19]

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 = 0, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 = 0, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + N_1 \left(k_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \\ + N_2 \left(k_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \\ + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \delta h \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

其中, Q_1, Q_2 分别是垂直于 x_1 轴及垂直于 x_2 轴的截面上单位宽度的横向剪力. 通过引入 Airy 应力函数 φ 可以简化求解过程:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + e_{31}E_3 + t_{31}T, \\ \sigma_2 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + e_{31}E_3 + t_{31}T, \\ \tau_{12} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

将(7)式代入(5)式,再代入方程(6),由于 $c_{11} = c_{22}$,注意到 $c_{11} = c_{12} + 2c_{66}$,可得到压电材料矩形板的横向热振动方程如下:

$$D\nabla^4 w = hL(\varphi, w) - e_{31}\nabla^2 M_E - t_{31}\nabla^2 M_T + k_1 N_1 + k_2 N_2 + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \delta h \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (8)$$

其中, $L(\varphi, w) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $D = \frac{h^3 c_{11}}{12}$ 为弯曲刚度, $M_T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T x_3 dx_3$ 为热弯矩, $M_E = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_3 x_3 dx_3$ 为电弯矩, ρ 为薄壳单位面积上的质量,故薄壳系统在单位面积上惯性力为 $-\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$,简谐激振力为 $q = q_0 \cos \omega t$.

协调方程为:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = -\Delta \Gamma, \quad (9)$$

$\Delta \Gamma$ 为高斯曲率的变化,

$$\Delta \Gamma = -[(\chi_{12})^2 - \chi_1 \chi_2 - k_2 \chi_1 - k_1 \chi_2]. \quad (10)$$

由于双曲壳是扁壳,可近似地由挠度 w 所产生的中曲面的主曲率和扭率表示

$$\chi_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \chi_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad \chi_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

结合(1),(2)和(7)式,并代入方程(9)中,协调方程变型为

$$\frac{c_{11}}{c_{11}^2 - c_{12}^2} \nabla^4 \varphi + \frac{1}{h(c_{11} + c_{12})} (e_{31} \nabla^2 N_E + t_{31} \nabla^2 N_T) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad (11)$$

其中, $N_T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T dx_3$ 为热轴力, $N_E = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_3 dx_3$ 为电轴力.

方程(8)和(11)是热弹耦合作用下的薄壳大挠度问题的非线性振动方程组. 不考虑材料压电特性时,对比文献[20, 21],对于热弹耦合作用下的普通

弹性板壳结构该方程组仍适用,故本文的方法和结论具有可靠性.

四边简支的双曲壳的边界条件为:

$$w(0, x_2) = w(a, x_2) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \Big|_{(0, x_2)} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \Big|_{(a, x_2)} = 0, \quad w(x_1, 0) = w(x_1, b) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{(x_1, 0)} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{(x_1, b)} = 0.$$

为简化计算,令 $R_1 = R_2 = R$, 引入无量纲参数 $\xi = x_1/R, \eta = x_2/R$, 横向位移 w 设为

$$w(x_1, x_2, t) = w_0(t) \cdot \sin(\alpha_1 \xi) \sin(\beta_1 \eta), \quad (12)$$

式中 $\alpha_1 = \pi R/a, \beta_1 = \pi R/b$.

由方程(8)得:

$$\nabla^2 M_T = \frac{c_{11} \alpha h^2}{12} (L_{11} + P_{11}) (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \sin \alpha_1 \xi \sin \beta_1 \eta.$$

将方程(12)代入方程(11),解出应力函数 φ 再代入方程(8),利用 Bubnov-Galerkin 原理,由

$$\int_0^{a/R} \int_0^{b/R} \Phi \sin \alpha_1 \xi \sin \beta_1 \eta d\xi d\eta = 0, \quad (13)$$

其中

$$\Phi = D\nabla^4 w - hL(\varphi, w) + e_{31}\nabla^2 M_E + t_{31}\nabla^2 M_T - k_1 N_1 - k_2 N_2 - q + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta h \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (14)$$

求得

$$\int_0^{a/R} \int_0^{b/R} \Phi \sin \alpha_1 \xi \sin \beta_1 \eta d\xi d\eta = \frac{D}{h} w_0 (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \frac{ab}{4R} + \frac{w_0^3 (c_{11}^2 - c_{12}^2)}{8c_{11}} (\alpha_1^4 + \beta_1^4) \frac{ab}{8R^2} - \frac{(k_2 \alpha_1^2 + k_1 \beta_1^2) w_0^2 (c_{11}^2 - c_{12}^2) R^2 \alpha_1^2 \beta_1^2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2 c_{11}} \cdot \frac{8}{3\alpha_1 \beta_1} - \frac{(k_2 \alpha_1^2 + k_1 \beta_1^2) w_0^2 (c_{11}^2 - c_{12}^2) R^2}{6\alpha_1 \beta_1 c_{11}} + \frac{(k_2 \alpha_1^2 + k_1 \beta_1^2)^2 w_0 (c_{11}^2 - c_{12}^2) R^4}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2 c_{11}} \cdot \frac{ab}{4R^2} - \frac{R^4}{h} \left[q - t_{31} \frac{c_{11} \alpha h^2}{12} (L_{11} + P_{11}) (\alpha_1^2 + \beta_1^2) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \delta h \frac{\partial w}{\partial t} \right] \frac{4}{\alpha_1 \beta_1} = 0. \quad (15)$$

整理化简为

$$w_0^3 l_1 - w_0^2 l_2 + w_0 l_3 - K$$

$$= \frac{q_0}{h} \cos \omega t - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \delta \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (16)$$

其中,

$$l_1 = \frac{(c_{11}^2 - c_{12}^2)\pi^6}{256c_{11}} \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) - \frac{c_{11}\alpha(L_{11} + P_{11})}{2h\pi^2 R^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)},$$

$$l_2 = \frac{\left(k_2 \frac{1}{a^2} + k_1 \frac{1}{b^2} \right) (c_{11}^2 - c_{12}^2)\pi^2}{4abc_{11}} \times \left[\frac{8}{3ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} + \frac{ab}{6} \right],$$

$$l_3 = \left\{ \frac{D}{h} \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \left[\left(k_2 \frac{1}{a^2} + k_1 \frac{1}{b^2} \right)^2 (c_{11}^2 - c_{12}^2) \right] \times \left[\pi^2 R \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 c_{11} \right]^{-1} \right\} \frac{\pi^2}{16R},$$

$$K = \frac{t_{31}c_{11}\alpha h}{12} (L_{11} - P_{11})\pi^2 R^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2.$$

引入: $w_0(t) = f(t) + w_0^*$ 并代入方程(16), 得到:

$$f^3 \frac{l_1}{\rho} - f^2 \frac{l_2 - w_0^*}{\rho} + f \frac{l_3 + 3w_0^{*2} - 2w_0^*}{\rho} = -\ddot{f} - \frac{\delta}{\rho} \dot{f} + \frac{q_0}{\rho h} \cos \omega t, \quad (17)$$

其中, $w_0^{*3}l_1 - w_0^{*2}l_2 + w_0^*l_3 = K$.

3 系统非线性分岔与混沌分析

方程(17)可改写为我们熟悉的非线性动力系统的形式:

$$\ddot{f} + \lambda_1 \dot{f} - \lambda_2 f^2 + \lambda_3 f^3 = \varepsilon(g_0 \cos \omega t - \dot{\varepsilon} f), \quad (18)$$

(18)式是热弹耦合作用下的非线性动力学方程. 其中,

$$\lambda_1 = \frac{l_3 + 3w_0^{*2} - 2w_0^*}{\rho}, \quad \lambda_2 = \frac{l_2 - w_0^*}{\rho},$$

$$\lambda_3 = \frac{l_1}{\rho}, \quad g_0 = \frac{q_0}{\varepsilon \rho h}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\delta'}{\varepsilon \rho'},$$

λ_1, λ_2 均大于0, 便是我们要求的热弹耦合作用下双曲壳的大挠度问题的非线性动力系统.

双曲壳在强迫振动作用下的非线性动力系统的无扰动力系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 - \lambda_3 x^3 \end{cases}. \quad (19)$$

系统(19)的Hamilton量为

$$H = \frac{y^2}{2} + \frac{\lambda_1}{2} x^2 - \frac{\lambda_2}{3} x^3 + \frac{\lambda_3}{4} x^4, \quad (20)$$

H 值由运动的初始条件确定. 从物理意义上看, 方程(19)可看成是描述单位质量的质点在外力 $-\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 - \lambda_3 x^3$ 作用下所做的运动, 而Hamilton量中 $\frac{y^2}{2}$ 表示质点的动能, $\frac{\lambda_1}{2} x^2 - \frac{\lambda_2}{3} x^3 + \frac{\lambda_3}{4} x^4$ 表示外力对质点所做功的负值, 即为势能, H 代表系统总的机械能. 不同的 H 值, (20)式代表相平面上不同的曲线.

取 $\dot{x} = \dot{y} = 0$, 求得(19)式的不动点为:

$$O(0, 0), \quad a \left(\frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}}{2\lambda_3}, 0 \right),$$

$$b \left(\frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}}{2\lambda_3}, 0 \right).$$

无扰动系统的Jocabi矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2\xi - 3\lambda_3\xi^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

特征方程为

$$\lambda^2 = -\lambda_1 + 2\lambda_2\xi - 3\lambda_3\xi^2. \quad (22)$$

将不动点(0, 0)代入上式, 得到 $\lambda = \pm i\sqrt{\lambda_1}$, 为共轭复根, 因此判断 O 点为中心, 同理可得 a 点也为中心, 而 b 点为鞍点. 相平面上的轨迹如图2所示.

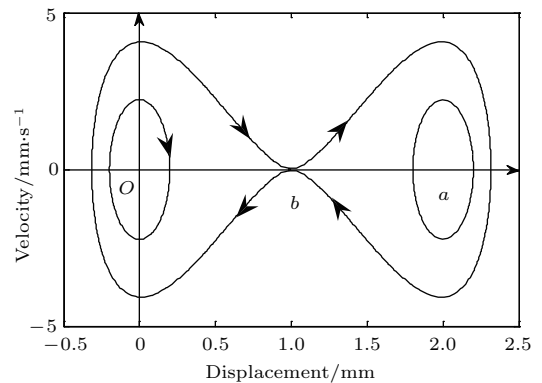


图2 同宿轨道

Fig. 2. Homoclinic orbit.

可解出同宿轨道的参数方程为

$$\begin{cases} x(t) = \pm \frac{2\sqrt{2}\lambda_2}{3\lambda_3} \cdot \frac{\exp(\pm\lambda_2 t/3\sqrt{\lambda_3})}{\exp(\pm 2\lambda_2 t/3\sqrt{\lambda_3}) + 1} - \frac{\lambda_2}{3\lambda_3}, \\ y(t) = \pm \frac{2\sqrt{2}\lambda_2^2}{9\lambda_3^2\sqrt{\lambda_3}} \cdot \frac{1 - \exp(\pm 2\lambda_2 t/3\sqrt{\lambda_3})}{[\exp(\pm 2\lambda_2 t/3\sqrt{\lambda_3}) + 1]^2}. \end{cases} \quad (23)$$

对动力系统定义 Melnikov 函数

$$\begin{aligned} M(t) &= -\varepsilon' \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt + g \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cos \omega(t + \tau) dt \\ &= -\varepsilon' \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dx(t) + g \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) (\cos \omega t \cos \omega \tau - \sin \omega t \sin \omega \tau) dt \\ &= -\varepsilon' \frac{4\lambda_2^3}{81\lambda_3^2\sqrt{\lambda_3}} + g \frac{2\sqrt{2}\omega\pi \sin \omega \tau \exp(2\pi\omega\sqrt{\lambda_3}/\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_3} [1 + \operatorname{ch} \frac{3\pi\omega\sqrt{\lambda_3}}{\lambda_2}]}. \end{aligned} \quad (24)$$

由 Melnikov 理论可知, 若 Melnikov 函数存在零点, 则稳定流形和不稳定流形相交, 存在不变集合, 系统有可能会出现混沌. (24) 式中等式右端第一项是阻尼力 $\delta\dot{x}$ 沿轨道所做的功, 第二项是以 τ 所处位置为出发点外力沿轨道所做的功.

令

$$\begin{aligned} M(t) &= 0, \\ \sin \omega \tau &= \frac{\varepsilon' \frac{\sqrt{2}\lambda_2^3}{81\lambda_3^2}}{g\omega\pi \frac{\exp(3\pi\omega\sqrt{\lambda_3}/\lambda_2)}{1 + \operatorname{ch} \frac{3\pi\omega\sqrt{\lambda_3}}{\lambda_2}}}, \end{aligned} \quad (25)$$

使 $|\sin \omega \tau| < 1$, 得到

$$\frac{g}{\varepsilon'} > \left| \frac{\sqrt{2}\lambda_2^3 \left(1 + \operatorname{ch} \frac{3\pi\omega\sqrt{\lambda_3}}{\lambda_2}\right)}{81\lambda_3^2\omega\pi \exp(3\pi\omega\sqrt{\lambda_3}/\lambda_2)} \right|. \quad (26)$$

且仅当 (26) 式成立时, 动力系统 (18) 具有 Smale 马蹄变换意义下的混沌运动的阈值条件. 如图 3 所示, 曲线上方表示可能出现混沌的参数范围.

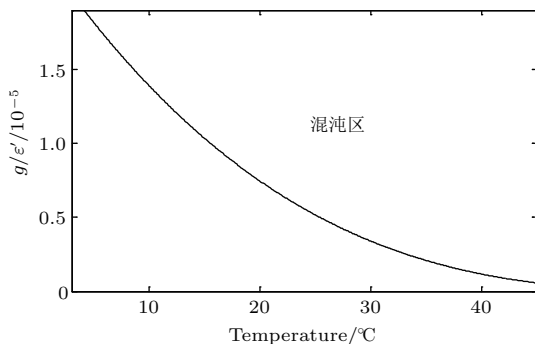


图 3 混沌阈值曲线

Fig. 3. Chaotic threshold curve.

4 数值计算

本文通过 MATLAB 中 simulink 仿真模块对系统建模, 具体的仿真模型如图 4 所示. 取双曲壳结构的材料为 BaTiO₃ 陶瓷, 材料参数列于表 1. 双曲壳长 $a = 400$ mm, 宽 $b = 400$ mm, 厚 $h = 70$ mm, 曲率半径 $R_1 = R_2 = 500$ mm. 将这些参数代入 (26) 式计算, 通过改变温度 T_0 的大小, 使方程 (26) 成立时, 系统就可能出现 Smale 马蹄变换意义下的混沌.

表 1 钛酸钡材料参数 [22]

Table 1. Barium titanate material parameters [22].

参数	参数值	参数	参数值
ρ	5700 kg/m ³	e_{33}	17.5 C/m ²
c_{11}	1.5×10^{11} N/m ²	ε_{11}	1115
c_{12}	0.66×10^{11} N/m ²	ε_{22}	1115
c_{22}	1.5×10^{11} N/m ²	e_{33}	1260
c_{66}	0.42×10^{11} N/m ²	α	$1.0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$
e_{31}	-4.35 C/m ²	m_3	2.0×10^{-8} C/cm ² · °C
e_{15}	11.4 C/m ²	μ	0.27

利用四阶 Runge-Kutta 法编制数值仿真程序, 通过改变温度 T_0 得到系统的分岔图和相对应的 Lyapunov 指数图, 如图 5 和图 6 所示. 可以看出随着温度的增加, 系统的混沌与周期区交替出现. 由图 6 可看出, 温度 T_0 在 32 °C 和 41 °C 附近以及 36 °C—37 °C 的范围内, Lyapunov 指数小于 0, 对应图 5 中的周期区; 而当图 6 中的 Lyapunov 指数大于 0 时, 对应图 5 中的混沌区.

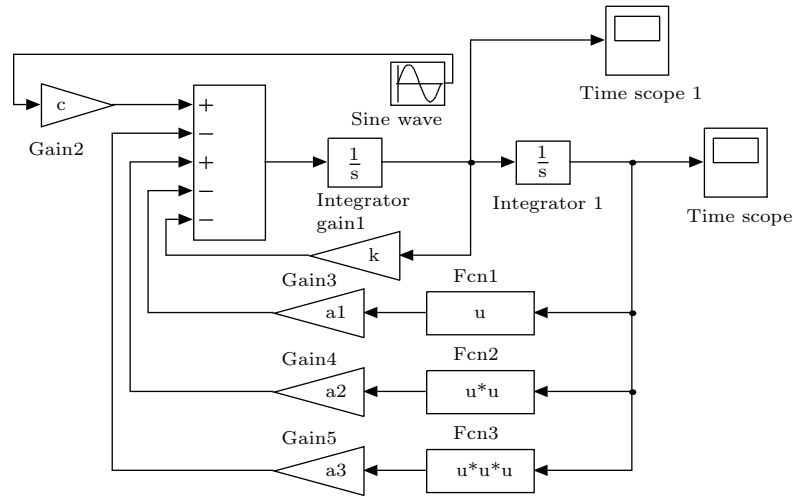


图4 仿真模型

Fig. 4. Simulation model.

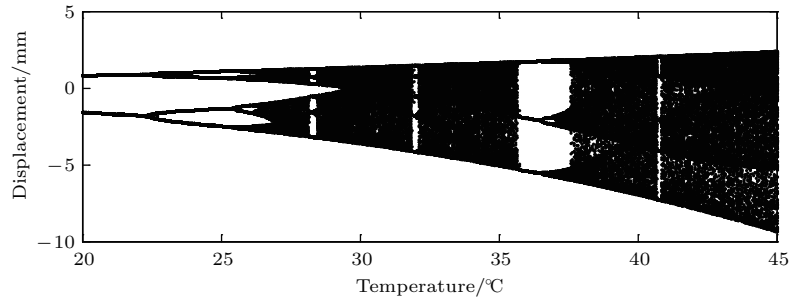


图5 随温度 T_0 变化的分岔图

Fig. 5. Bifurcation diagram with temperature T_0 change.

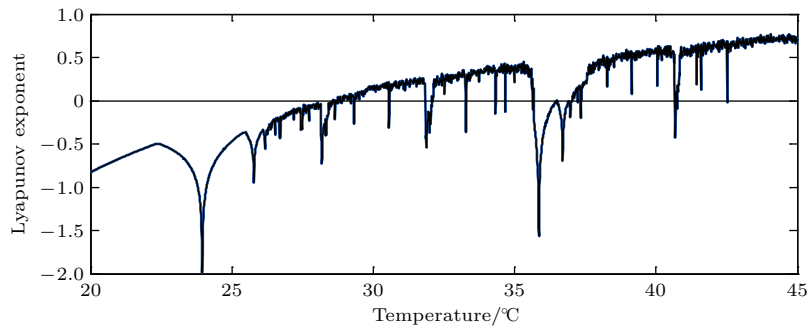


图6 随温度 T_0 变化的 Lyapunov 指数图

Fig. 6. Lyapunov exponent diagram varying with temperature T_0 .

当 $\omega_0 = 17$ Hz, $q_0 = 200$ N/m²时, 通过改变温度 T_0 的大小, 分别做出热弹耦合作用下双曲壳系统的相图和 Poincaré 截面图.

由上面的分析可知, 仿真结果和 Melnikov 方法的判定一致. 此外, 仿真结果反映出的混沌运动更加复杂, 随着温度的增加, 系统的混沌与周期区交替出现, 而 Melnikov 方法是无法得到这样的结论的.

由图 7—图 9 可以看出, 图 7 相图和时程曲线

很规整, 相图绕了 2 圈, Poincaré 映射为两个点, 故代表周期为 2 的运动; 同理可知, 图 8 代表周期为 3 的运动. 由图 7 和图 8 可看出, k 周期运动有明显的周期重复性, 对应的相图绕 k 圈, Poincaré 截面图显示 k 个点. 而图 9 的相图轨迹互不重叠, 相互缠绕, Poincaré 截面图也杂乱无章, 结合这组参数已落在 Melnikov 函数和系统分岔图给定的混沌区, 且对应的 Lyapunov 指数大于 0, 因此可判断图 9 代表着混沌运动.

从计算结果可以看出, 压电材料双曲壳在四边简支的条件下, 随着温度场的变化, 会改变系统的运动状态. 就物理意义而言, 温度的变化给系统的

刚度造成了附加效应. 由(16)式可看出, 温度的变化使 l_1 发生变化, 相当于系统的刚度发生变化, 从而影响和改变了系统的振动特性.

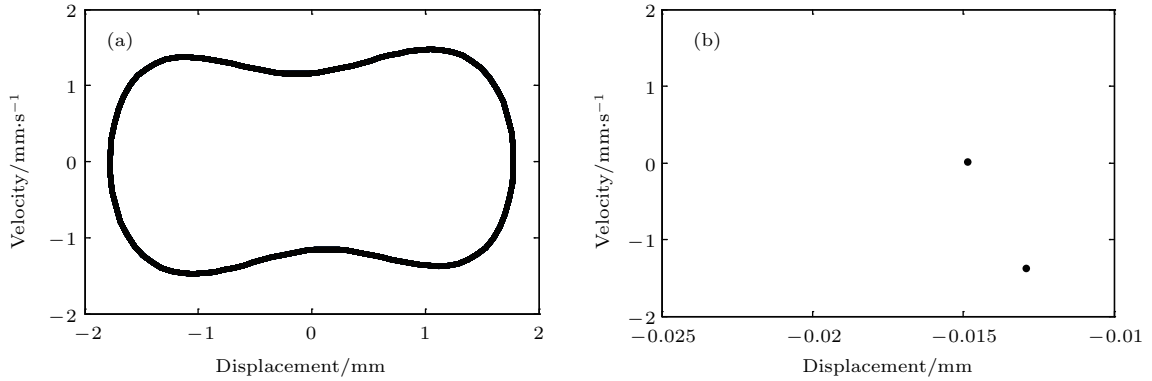


图7 $T_0 = 22\text{ °C}$ 时的相图和 Poincaré 截面图
Fig. 7. Phase diagrams and Poincaré section diagrams at $T_0 = 22\text{ °C}$.

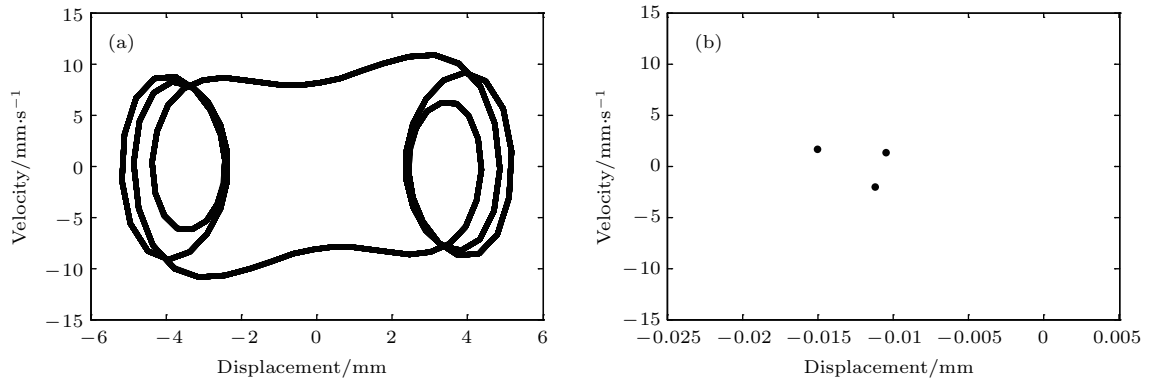


图8 $T_0 = 36\text{ °C}$ 时的相图和 Poincaré 截面图
Fig. 8. Phase diagrams and Poincaré section diagrams at $T_0 = 36\text{ °C}$.

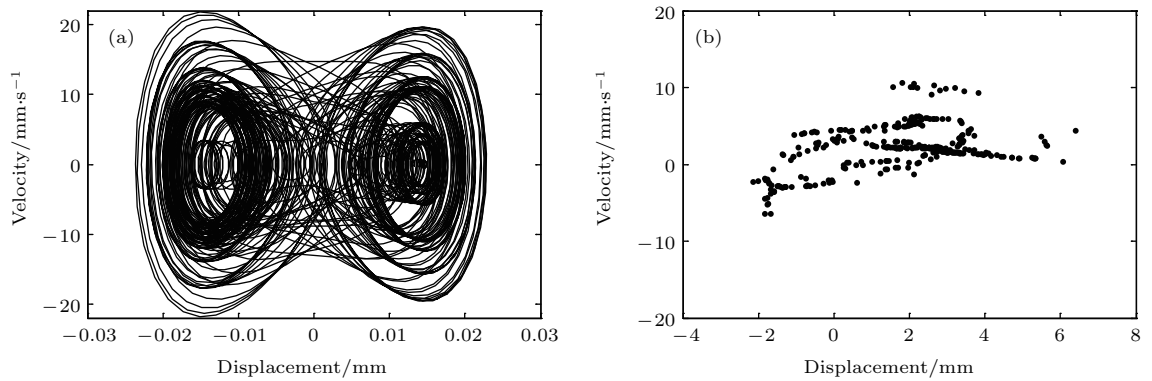


图9 $T_0 = 45\text{ °C}$ 时的相图和 Poincaré 截面图
Fig. 9. Phase diagrams and Poincaré section diagrams at $T_0 = 45\text{ °C}$.

5 结 论

本文研究了热弹耦合效应下简支的压电材料双曲壳的动力学行为. 利用 Melnikov 理论, 推导出系统出现混沌运动的判据, 通过 MATLAB 软件进

行数值模拟, 在热弹耦合作用下系统的振动方程具有明显的非线性, 随着温度的增加, 运动行为较复杂, 系统的混沌与周期区交替出现. 因此, 控制和调整温度场的变化, 可实现控制系统的运动状态, 为系统安全性和可靠性提供参考.

参考文献

- [1] Ding H, Yan S Y, Chen L Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 200502 (in Chinese) [丁虎, 严巧赟, 陈立群 2013 物理学报 **62** 200502]
- [2] Yeh Y L, Chen C K, Lai H Y 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **13** 1493
- [3] Wang P, Chen S M 2013 *J. Mech. Engin.* **49** 82 (in Chinese) [王平, 陈蜀梅 2013 机械工程学报 **49** 82]
- [4] Wang P, Chen S M, Wang Z R 2013 *J. Vib. Shock* **32** 129 (in Chinese) [王平, 陈蜀梅, 王知人 2013 振动与冲击 **32** 129]
- [5] Zhu W G 2011 *Ph. D. Dissertation* (Hebei: Yanshan University) (in Chinese) [朱为国 2011 博士学位论文 (河北: 燕山大学)]
- [6] Xue C X, Zhang S Y, Shu X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6599 (in Chinese) [薛春霞, 张善元, 树学锋 2010 物理学报 **59** 6599]
- [7] Chen Z J, Zhang S Y, Zheng K 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4017 (in Chinese) [陈赵江, 张淑仪, 郑凯 2010 物理学报 **59** 4017]
- [8] Xue C X, Ren X J 2014 *J. Measur. Sci. Instrum.* **5** 93
- [9] Pan E 2001 *J. Appl. Mech.* **68** 608
- [10] Hao Y X, Chen L H, Zhang W 2008 *J. Sound Vib.* **312** 862
- [11] Li L 2011 *Ph. D. Dissertation* (Shanxi: Xi'an University of Architecture and Technology) (in Chinese) [栗蕾 2011 博士学位论文 (陕西: 西安建筑科技大学)]
- [12] Zhou Y Z 2008 *M. S. Thesis* (Zhejiang: Zhejiang University) (in Chinese) [周运朱 2008 硕士学位论文 (浙江: 浙江大学)]
- [13] Cao Z, Hao Y X, Gu X J, Li Z N 2018 *Acta Mech. Solida* **39** 284 (in Chinese) [曹洲, 郝育新, 顾晓军, 李珍妮 2018 固体力学学报 **39** 284]
- [14] Zhang Q C, Wang W, He X J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5384 (in Chinese) [张琪昌, 王炜, 何学军 2008 物理学报 **57** 5384]
- [15] Zhang Q C, Tian R L, Wang W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2799 (in Chinese) [张琪昌, 田瑞兰, 王炜 2008 物理学报 **57** 2799]
- [16] Ji Y, Bi Q S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4431 (in Chinese) [季颖, 毕勤胜 2009 物理学报 **58** 4431]
- [17] Gu H Z, Aditi C, Li J M 1999 *Int. J. Solids Struct.* **37** 6479
- [18] Liu R H 2011 *Nonlinear Bending, Stability and Vibration of Reticulated Shell Structure* (Beijing: Science Press) p9 (in Chinese) [刘人怀 2011 网壳结构的非线性弯曲、稳定和振动 (北京: 科学出版社) 第9页]
- [19] Zhang G Q 2004 *Ph. D. Dissertation* (Tianjin: Tianjin University) (in Chinese) [张国清 2004 博士学位论文 (天津: 天津大学)]
- [20] Ding H L 1996 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Tsinghua University) (in Chinese) [丁红丽 1996 博士学位论文 (北京: 清华大学)]
- [21] Liu S N 1963 *Acta Mech. Sin.* **6** 61 (in Chinese) [刘世宁 1963 力学学报 **6** 61]
- [22] Wang J F, Su W B, Wang C M 2011 *Theory and Application of Piezoelectric Vibration* (Beijing: Science Press) pp231-243 (in Chinese) [王矜奉, 苏文斌, 王春明 2011 压电振动理论及应用 (北京: 科学出版社)] 第231—243页

Chaotic motion of piezoelectric material hyperbolic shell under thermoelastic coupling*

Li Lin-Li Xue Chun-Xia[†]

(College of Science, North University of China, Taiyuan 030051, China)

(Received 15 September 2018; revised manuscript received 14 November 2018)

Abstract

Piezoelectric material, which exhibits excellent electro-mechanical conversion properties, is widely used in smart sensors and structures for sonar systems, weather detection and remote sensing. Hyperbolic shell structure made of piezoelectric material is liable to break down when it is used in high temperature environment, which is caused by the unexpected chaotic dynamic motion under the coupling effect of thermal field and force field. Therefore, the chaotic nonlinear dynamic vibration of simply-supported piezoelectric material hyperbolic shell is studied under the combined action of temperature field and simple harmonic excitation. Based on the theory of finite deformation, the non-linear vibration equation and coordination equation of the hyperbolic shell are established. The non-linear dynamic equation of the structure is obtained by the Bubnov-Galerkin principle. The corresponding undisturbed Hamilton system has a homoclinic orbit. Using Melnikov function, the chaotic motion condition of the dynamic system under the criterion of Smale-horseshoe transformation is obtained. Furthermore, the mathematical model is established by Simulink software and the numerical simulations are performed by the fourth-order Runge-Kutta method. The simulation results accord well with those from the Melnikov method. The bifurcation diagram, the Lyapunov exponent diagram, the phase diagram and Poincaré section diagram are acquired to analyze the influence of temperature field on the non-linear characteristic of piezoelectric material hyperbolic shell system. When the temperature is close to 32 °C and 41 °C, the Lyapunov index is less than 0 and the corresponding movement of the system is in the periodic zone, which is the same as that for a temperature range from 36 °C to 37 °C. When the Lyapunov index is greater than 0, the corresponding movement of the system is in chaos zone. Therefore, the change of temperature has an additional effect on the stiffness of the system which affects the vibration of the system. The chaos and periodic zones of the system alternate with the increase of temperature and the vibration characteristics of the system can be controlled by changing the temperature field. Therefore, adjusting the temperature field can control the motion state of the system, which helps to improve reliability of the structure.

Keywords: hyperbolic shell, piezoelectric material, thermoelastic coupling, chaos

PACS: 05.45.-a, 46.25.Hf, 77.84.-s, 95.10.Fh

DOI: [10.7498/aps.68.20181714](https://doi.org/10.7498/aps.68.20181714)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11202190) and the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars, Education Ministry of China.

† Corresponding author. E-mail: xuechunxia@muc.edu.cn