

## 微波连续变量极化纠缠

罗均文 吴德伟 李响 朱浩男 魏天丽

Continuous variable polarization entanglement in microwave domain

Luo Jun-Wen Wu De-Wei Li Xiang Zhu Hao-Nan Wei Tian-Li

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 064204 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181911

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181911>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 连续变量1.34 m量子纠缠态光场的实验制备

Continuous variable quantum entanglement at 1.34 m

物理学报. 2017, 74(24): 244205 <https://doi.org/10.7498/aps.66.244205>

#### 优化抽运空间分布实现连续变量超纠缠的纠缠增强

Enhancement of continuous-variable hyperentanglement by optimizing pump mode

物理学报. 2019, 68(3): 034204-1 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181625>

#### 连续变量纠缠态光场在光纤中传输特性的实验研究

Experimental investigation of transmission characteristics of continuous variable entangled state over optical fibers

物理学报. 2018, 75(2): 024203 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171542>

#### 基于纠缠见证的路径纠缠微波检测方法

Path-entanglement microwave signals detecting method based on entanglement witness

物理学报. 2018, 75(4): 040301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172164>

#### 基于散粒噪声方差实时监测的连续变量量子密钥分发系统的设计与实现

The design and realization of continuous-variable quantum key distribution system based on real-time shot noise variance monitoring

物理学报. 2017, 74(2): 020301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.020301>

## 微波连续变量极化纠缠\*

罗均文 吴德伟<sup>†</sup> 李响 朱浩男 魏天丽

(空军工程大学信息与导航学院, 西安 710077)

(2018年10月26日收到; 2018年12月4日收到修改稿)

极化微波作为当前被广泛应用的信息载体, 具有许多独特的优势. 随着超导技术的发展, 量子微波技术逐渐兴起, 将量子纠缠应用于极化微波将具有广阔的应用前景. 本文阐述了连续变量极化纠缠的原理, 提出了极化纠缠微波方案并进行了仿真分析, 利用归一化的不可分度  $I$  作为判据, 分析了在整个约瑟夫森混合器 100 MHz 工作带宽内斯托克斯参量的不可分度  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$ ,  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$ , 并进一步分析了  $I$  分别与压缩度  $r$ 、振幅比值  $Q$  的关系, 发现  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$ ,  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  分别对振幅比值  $Q$ 、压缩度  $r$  的变化敏感, 且在本文研究的条件下  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  始终大于 1,  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  始终小于 1, 斯托克斯参量  $\hat{S}_2$ ,  $\hat{S}_3$  构成不可分态, 方案产生的两个微波信号  $\hat{E}_a$  和  $\hat{E}_b$  存在二组分极化纠缠, 最佳纠缠出现在 70 MHz 附近, 此时  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  取得最小值 0.25.

**关键词:** 连续变量, 极化纠缠, 约瑟夫森混合器, 斯托克斯参量, 不可分度

**PACS:** 42.50.Dv, 03.67.-a, 07.50.Qx

**DOI:** 10.7498/aps.68.20181911

## 1 引言

近三十年来, 量子信息技术发展迅猛, 纠缠资源作为量子力学的核心, 其性质得到了广泛的研究与应用<sup>[1,2]</sup>. 根据观测量的不同产生了不同的纠缠类型, 如正交分量纠缠、极化纠缠等<sup>[3,4]</sup>. 极化是电磁波的一个重要性质, 广泛应用于雷达、导航、通信等领域, 且表征极化状态的斯托克斯参量探测时不需要本地振荡信号, 相较正交分量纠缠的探测更为容易, 因此极化纠缠的实现对于纠缠的应用具有重要的意义.

早期的极化纠缠是由光子对实现的, 属于离散变量的极化纠缠<sup>[5]</sup>. Bowen 等<sup>[6]</sup> 提出了连续变量光极化压缩及纠缠, 将斯托克斯参量量子化, 提出了相应的测量方案和纠缠判据, 且进行了实验验证. Korolkova 等<sup>[7]</sup> 使用超短脉冲源和克尔非线性效应实现了 1550 nm 波段的连续变量极化纠缠. Guo 等<sup>[8]</sup> 研究了连续变量轨道角动量的压缩和纠

缠, 同样分析了轨道角动量的斯托克斯参量, 使用的分析方法借鉴自连续变量极化压缩与纠缠. 吴量等<sup>[9]</sup> 在 795 nm 波段进行了两组分极化纠缠光场的实验制备, 并认为该极化纠缠光场可应用于未来的量子存储, 实现量子通道和量子节点之间、两个量子节点之间的纠缠以及量子态的传输, 之后该小组又基于极化分束网络实现了三组分的极化纠缠光场<sup>[10]</sup>. 周瑶瑶等<sup>[11]</sup> 研究了镀膜参数差异对连续变量纠缠度的影响.

由于可见光波段的光子具有较高的能量, 且对应探测器工作条件友好, 因此目前有关的极化纠缠均通过可见光实现. 相较于可见光, 微波波段会受到光子能量较低、器件工作条件苛刻等不利因素的影响<sup>[12]</sup>, 但同时具有更长的相干时间、与现有超导器件的良好兼容性以及信号可放大、可中继的强大优势<sup>[13]</sup>, 因此近年来成为了量子纠缠研究的一个热点<sup>[14-16]</sup>.

本文从理论上分析了两组分极化纠缠的产生、探测原理, 提出了一种微波连续变量极化纠缠的可

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61573372, 61603413) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: wudewei74609@126.com

能实现方案并进行了仿真,得到了极化纠缠的微波信号斯托克斯参量  $\hat{S}_1$ ,  $\hat{S}_2$  与  $\hat{S}_3$  之间的不可分度,分析了压缩度  $r$ 、极化分量振幅比值  $Q$  分别同不可分度  $I$  的关系,并探讨了正交分量纠缠与极化纠缠的转换关系.

## 2 基本原理

任意电磁波的极化状态可以由四个斯托克斯参量完全描述,分别记为  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  和  $S_3$ ,而量子化的斯托克斯参量使用算符表示为  $\hat{S}_0$ ,  $\hat{S}_1$ ,  $\hat{S}_2$  和  $\hat{S}_3$ <sup>[17]</sup>.在经典电磁波中,电磁波可以分解为水平极化分量  $E_H$  和垂直极化分量  $E_V$ <sup>[18]</sup>,也就是

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_H + \mathbf{E}_V \\ &= \mathbf{e}_H E_H \cos(\omega t - \phi_H) + \mathbf{e}_V E_V \cos(\omega t - \phi_V), \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $E_H$  和  $E_V$  分别是水平极化分量和垂直极化分量的振幅,  $\phi_H$  和  $\phi_V$  表示对应的相位,则相位差  $\phi$  可表示为

$$\phi = |\phi_H - \phi_V|. \quad (2)$$

将电磁场量子化后,电磁波的水平极化分量用  $\hat{E}_H$  表示,垂直极化分量用  $\hat{E}_V$  表示,则可将斯托克斯算符展开为

$$\begin{cases} \hat{S}_0 = \hat{E}_H^\dagger \hat{E}_H + \hat{E}_V^\dagger \hat{E}_V, \\ \hat{S}_1 = \hat{E}_H^\dagger \hat{E}_H - \hat{E}_V^\dagger \hat{E}_V, \\ \hat{S}_2 = \hat{E}_H^\dagger \hat{E}_V \exp(i\phi) + \hat{E}_V^\dagger \hat{E}_H \exp(-i\phi), \\ \hat{S}_3 = i\hat{E}_V^\dagger \hat{E}_H \exp(-i\phi) - i\hat{E}_H^\dagger \hat{E}_V \exp(i\phi), \end{cases} \quad (3)$$

同时,四个参量满足对易关系:

$$\begin{cases} [\hat{S}_0, \hat{S}_j] = 0, \quad j = 1, 2, 3, \\ [\hat{S}_1, \hat{S}_2] = 2i\hat{S}_3, \\ [\hat{S}_2, \hat{S}_3] = 2i\hat{S}_1, \\ [\hat{S}_3, \hat{S}_1] = 2i\hat{S}_2. \end{cases} \quad (4)$$

当  $E_V \gg E_H$  时,结合不确定性原理以及正交分量量子起伏,并认为  $\hat{E}_H$ ,  $\hat{E}_V$  的量子起伏不相关,忽略干涉项,可以得到斯托克斯参量的均值和量子起伏为

$$\begin{cases} \langle \hat{S}_0 \rangle = E_H^2 + E_V^2, \\ \langle \hat{S}_1 \rangle = E_H^2 - E_V^2, \\ \langle \hat{S}_2 \rangle = 2E_H E_V \cos \phi, \\ \langle \hat{S}_3 \rangle = 2E_H E_V \sin \phi, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \Delta^2 \hat{S}_0 = \Delta^2 \hat{S}_1 = E_H^2 \langle \delta(\hat{X}_H)^2 \rangle + E_V^2 \langle \delta(\hat{X}_V)^2 \rangle, \\ \Delta^2 \hat{S}_2(\phi) = \cos^2 \phi \left[ E_V^2 \langle \delta(\hat{X}_H)^2 \rangle + E_H^2 \langle \delta(\hat{X}_V)^2 \rangle \right] \\ \quad + \sin^2 \phi \left[ E_V^2 \langle \delta(\hat{Y}_H)^2 \rangle + E_H^2 \langle \delta(\hat{Y}_V)^2 \rangle \right], \\ \Delta^2 \hat{S}_3(\phi) = \Delta^2 \hat{S}_2 \left( \phi - \frac{\pi}{2} \right), \end{cases} \quad (6)$$

(6) 式中,  $\delta\hat{X}_{H(V)}$  为水平(垂直)极化分量的正交振幅量子起伏,  $\delta\hat{Y}_{H(V)}$  为水平(垂直)极化分量的正交相位量子起伏.

极化纠缠可以通过转换正交分量纠缠而得到,即将两路正交分量纠缠的信号与两路强相干态信号分别在不同的极化分束器件上耦合,所产生的两路输出表现为极化纠缠,其原理如图 1 所示.正交分量纠缠信号  $\hat{E}_{aH}$ ,  $\hat{E}_{bH}$  作为水平极化分量,与强相干态信号  $\hat{E}_{aV}$ ,  $\hat{E}_{bV}$  分别在极化分束器件上合成,得到两路极化纠缠信号  $\hat{E}_a$ ,  $\hat{E}_b$ ,其纠缠特性的具体观测量为  $\hat{E}_a$ ,  $\hat{E}_b$  的斯托克斯参量.在极化纠缠探测部分,直接使用两套相同的平衡零拍探测装置,通过对探测器输出电流作加减法得到两路信号的  $\hat{S}_0$ ,  $\hat{S}_1$  参量.由 (3) 式可知,两路信号  $\hat{S}_2$ ,  $\hat{S}_3$  参量的测量必须进行极化偏转,同时引入额外相位,完成基变换,使得两参量能够对应物理可观测量,如电流,然后再使用平衡零拍探测装置进行测量.因此,测量  $\hat{S}_2$  时需要在极化分束器 (PBS) 前加入一个与水平方向成  $45^\circ$  角的半波片,再经平衡零拍探测装置探测,而测量  $\hat{S}_3$  则需要在测量  $\hat{S}_2$  的基础上,在半波片后加上一个与水平方向成  $22.5^\circ$  角的  $1/4$  波片.这样便可将所有斯托克斯参量测出,进而分析各斯托克斯参量的性质.

正交分量纠缠中使用段氏判据<sup>[19]</sup>验证两路信号纠缠与否,为了验证二组分极化纠缠,需要对段氏判据进行拓展,使之能够验证斯托克斯参量间的二组分纠缠.以下标  $a, b$  区别观测量所在信号,则正交分量纠缠的段氏判据可表示为

$$\Delta^2(\hat{X}_a \pm \hat{X}_b) + \Delta^2(\hat{Y}_a \mp \hat{Y}_b) < 4. \quad (7)$$

为简单起见,本文均用形如  $\Delta^2(\hat{M}_a \pm \hat{M}_b)$  的式子表示  $\min[\Delta^2(\hat{M}_a + \hat{M}_b), \Delta^2(\hat{M}_a - \hat{M}_b)]$ .根据标准不确定性关系,对于任意一对可观测量  $M$  和  $N$ ,可以将段氏判据拓展为(参阅附录 A)

$$\Delta^2(\hat{M}_a \pm \hat{M}_b) + \Delta^2(\hat{N}_a \mp \hat{N}_b) < 2[|\delta M, \delta N|]. \quad (8)$$

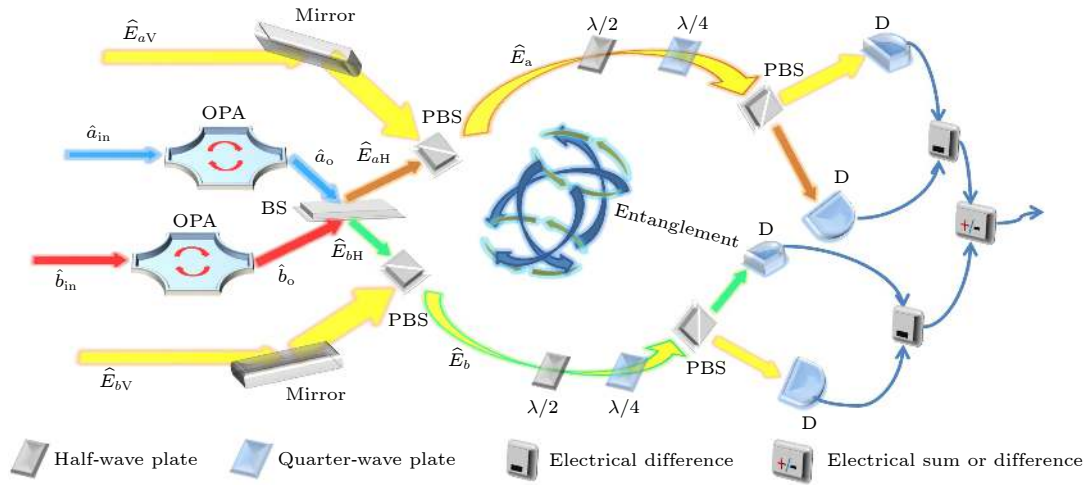


图 1 两组分极化纠缠光场生成及探测原理图 (OPA, 光参量放大器; BS, 分束器; PBS, 极化分束器; D, 探测器)

Fig. 1. Scheme of preparation and measurement towards bipartite polarization entangled optical fields. OPA, optical parametric amplifier; BS, beam splitter; PBS, polarization beam splitter; D, detector.

为方便对数据进行讨论, 可将判据归一化, 从而得到二组分纠缠的不可分度 (inseparability):

$$I(\hat{M}, \hat{N}) = \frac{\Delta^2(\hat{M}_a \pm \hat{M}_b) + \Delta^2(\hat{N}_a \mp \hat{N}_b)}{2|\delta M, \delta N|}. \quad (9)$$

当  $I(\hat{M}, \hat{N}) < 1$  时, 说明对应  $M$  和  $N$  这对观测量, 量子态不可分, 信号 1 和信号 2 纠缠. 因此, 斯托克斯参量中除  $\hat{S}_0$  外,  $\hat{S}_1$ ,  $\hat{S}_2$  和  $\hat{S}_3$  间的不可分度可表示为

$$I(\hat{S}_1, \hat{S}_2) = \frac{\Delta^2(\hat{S}_{a1} \pm \hat{S}_{b1}) + \Delta^2(\hat{S}_{a2} \mp \hat{S}_{b2})}{8|E_H E_V \sin \phi|}, \quad (10)$$

$$I(\hat{S}_1, \hat{S}_3) = \frac{\Delta^2(\hat{S}_{a1} \pm \hat{S}_{b1}) + \Delta^2(\hat{S}_{a3} \mp \hat{S}_{b3})}{8|E_H E_V \cos \phi|}, \quad (11)$$

$$I(\hat{S}_2, \hat{S}_3) = \frac{\Delta^2(\hat{S}_{a2} \pm \hat{S}_{b2}) + \Delta^2(\hat{S}_{a3} \mp \hat{S}_{b3})}{4|E_H^2 - E_V^2|}. \quad (12)$$

显然, 从 (10)–(12) 式可以看出, 在某些取值情况下, 可能无法同时获得三个不可分度, 因此不可分度只是一个充分不必要条件, 这是由于标准不确定性关系中去除了关联项引起的.

### 3 方案设计与结果分析

借鉴可见光波段实现极化纠缠的方案, 提出了一种微波波段极化纠缠方案, 其原理如图 2 所示.

如图 2 所示, 在极化纠缠生成部分, 使用一个约瑟夫森混合器 (Josephson mixer, JM)<sup>[20]</sup> 对两输入信号  $\hat{a}_{in}$ ,  $\hat{b}_{in}$  进行双模压缩, 使得

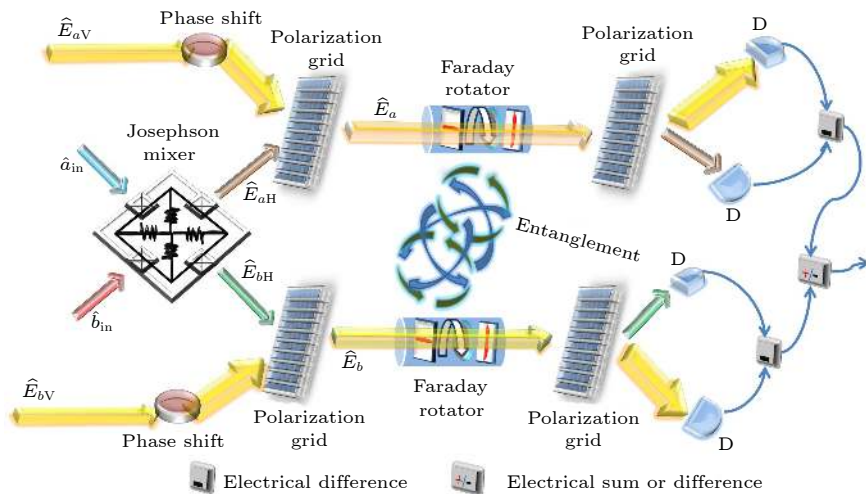


图 2 二组分极化纠缠微波方案示意图 (D, 探测器; 方案整体工作温度为 0.5 mK)

Fig. 2. Schematic of bipartite polarization entangled microwave. D, detector. Overall operation temperature of the proposal is 0.5 mK.

$$\begin{cases} \hat{E}_{aH} = \hat{a}_{in} \cosh r - \hat{b}_{in}^\dagger \sinh r, \\ \hat{E}_{bH} = \hat{b}_{in} \cosh r - \hat{a}_{in}^\dagger \sinh r. \end{cases} \quad (13)$$

此时输出信号是正交分量纠缠的, 再将两输出作为水平极化分量  $\hat{E}_{aH}$ ,  $\hat{E}_{bH}$ , 分别在两个极化栅上与垂直极化的强相干态微波信号  $\hat{E}_{aV}$ ,  $\hat{E}_{bV}$  耦合, 形成极化纠缠信号  $\hat{E}_a$ ,  $\hat{E}_b$ . 若令两极化分量的振幅比为  $Q$ , 即  $Q = \langle \hat{E}_V \rangle / \langle \hat{E}_H \rangle$ , 则其中两个极化分量的振幅和相位满足关系:

$$\begin{cases} E_{aV} = E_{bV} = E_V, \\ E_{aH} = E_{bH} = E_H, \\ E_V^2 = Q^2 E_H^2, \quad Q \gg 1, \\ \phi = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (14)$$

方案部分参数设定如表 1 所列.

在表 1 所列的条件下,  $\hat{E}_{aH}$ ,  $\hat{E}_{bH}$  的正交分量间的时域关联如图 3 所示. 可以看出, 此时两信号的正交振幅正关联、正交相位反关联, 且关联性强.

表 1 方案部分参数

Table 1. Part of the parameters in the scheme.

参数名称	输入信号频率/GHz	输入信号振幅	压缩参量 $r$	极化分量振幅比值 $Q$
参数值	5	1	2	5

若不考虑量子起伏, 合成信号  $\mathbf{E}_a$ ,  $\mathbf{E}_b$  可经典地表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \mathbf{E}_{iH} + \mathbf{E}_{iV} \\ &= \mathbf{e}_{iH} E_H \cos(\omega t - \phi_H) + \mathbf{e}_{iV} E_V \cos(\omega t - \phi_V) \\ &= \mathbf{e}_{iH} E_H \cos(\omega t - \phi_H) + \mathbf{e}_{iV} Q E_H \sin(\omega t - \phi_H), \\ & \quad i = a, b. \end{aligned} \quad (15)$$

其电场状态如图 4 所示, 显示为椭圆极化状态.

为验证极化纠缠, 必须考虑量子起伏, 需要使用 (10)–(12) 式进行判断. 对于  $\hat{S}_0$  与  $\hat{S}_1$  的测量直接使用平衡零差探测装置即可, 而对于  $\hat{S}_2$  与  $\hat{S}_3$  则需要在极化栅 (polarization grid) 前加入法拉第旋转器 (Faraday rotator) 进行基变换, 使得

$$\begin{cases} \hat{E}_V = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{E}_x + \hat{E}_y), \\ \hat{E}_H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{E}_x - \hat{E}_y), \\ \hat{S}_2 = \hat{E}_H^\dagger \hat{E}_V \exp(i\phi) + \hat{E}_V^\dagger \hat{E}_H \exp(-i\phi) \\ = \hat{E}_x^\dagger \hat{E}_x - \hat{E}_y^\dagger \hat{E}_y, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \hat{E}_V = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{E}_x + i\hat{E}_y), \\ \hat{E}_H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{E}_x - i\hat{E}_y), \\ \hat{S}_3 = i\hat{E}_V^\dagger \hat{E}_H \exp(-i\phi) - i\hat{E}_H^\dagger \hat{E}_V \exp(i\phi) \\ = \hat{E}_y^\dagger \hat{E}_y - \hat{E}_x^\dagger \hat{E}_x. \end{cases} \quad (17)$$

这样,  $\hat{E}_a$ ,  $\hat{E}_b$  信号各自的所有斯托克斯参量便可全部测出. 将两套平衡零拍探测装置的输出电流再进行加减, 就可以得到  $\hat{S}_{ai} \pm \hat{S}_{bi}$  (其中  $i = 0, 1, 2, 3$ ). 进一步地, 利用频谱分析仪获取  $\Delta^2(\hat{S}_{ai} \pm \hat{S}_{bi})$  (其中  $i = 1, 2, 3$ ), 得到相应的不可分度, 从而判断二组分纠缠的存在与否. 由于 (14) 式所选择的条件, 相位差  $\frac{\pi}{2}$  使得 (11) 式无法判断, 故只能判断  $\hat{S}_1$  与  $\hat{S}_2$  之间、 $\hat{S}_2$  与  $\hat{S}_3$  之间是否存在二组分纠缠.

根据表 1 及 (14) 式, 可得  $\hat{E}_a$ ,  $\hat{E}_b$  间各斯托克斯参量的起伏如图 5 所示.

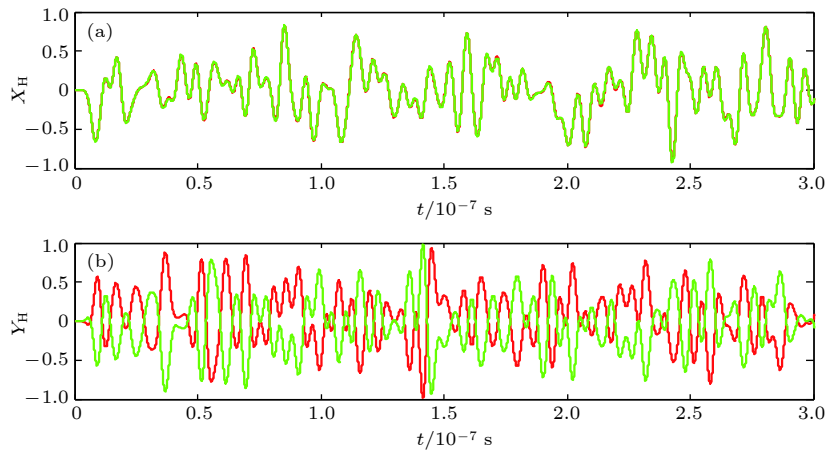


图 3  $\hat{E}_{aH}$ ,  $\hat{E}_{bH}$  的正交分量间的时域关联 (a) 振幅分量  $X_H$ ; (b) 相位分量  $Y_H$

Fig. 3. Quadrature components correlations of  $\hat{E}_{aH}$  and  $\hat{E}_{bH}$  in time domain: (a) Amplitude component  $X_H$ ; (b) phase component  $Y_H$ .

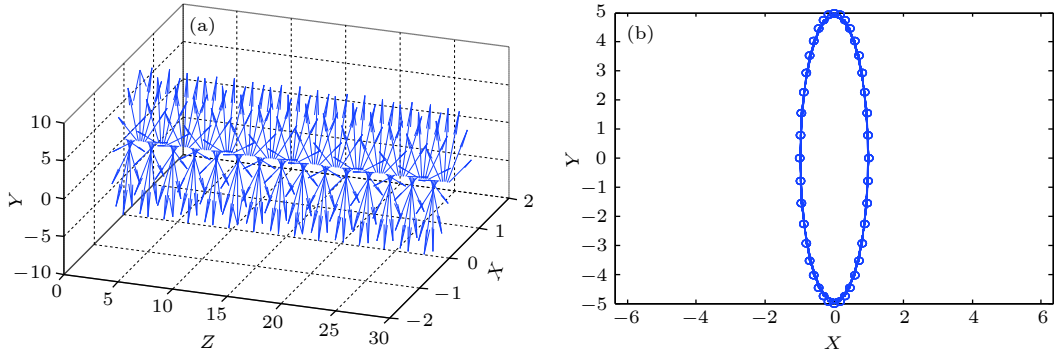


图 4 合成信号传输过程电场状态 (a) 和矢端轨迹 (b)

Fig. 4. Electric field state (a) and vector end trajectory (b) of combined signal in transmission.

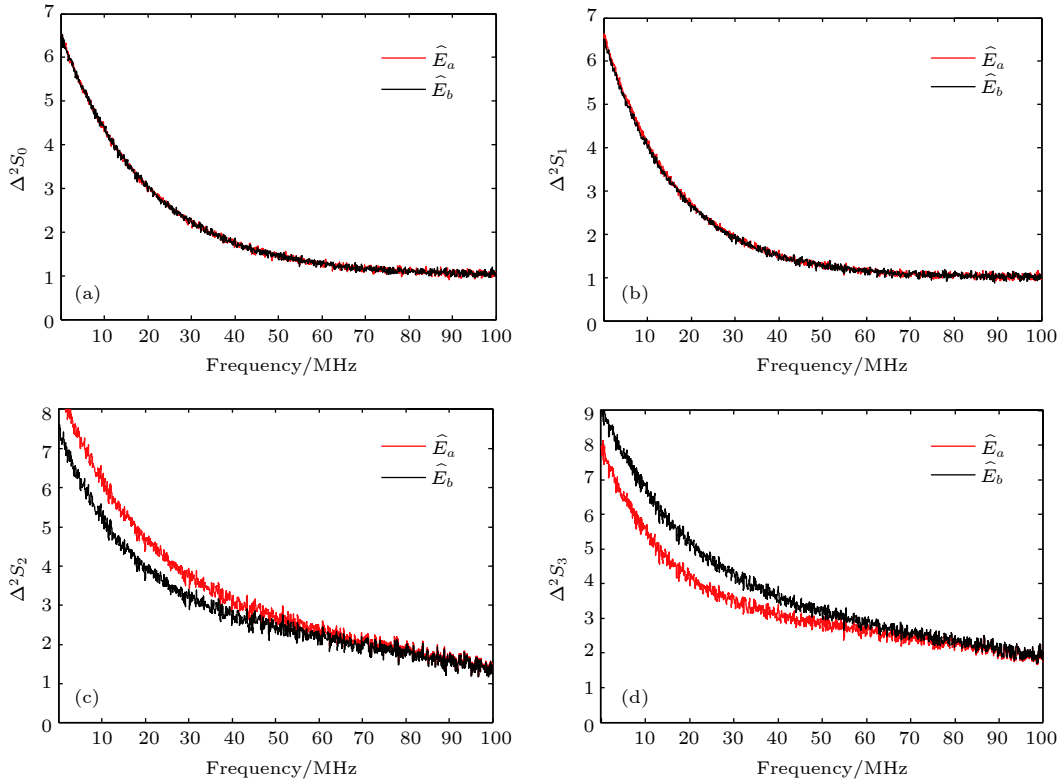

 图 5  $\hat{E}_a$ ,  $\hat{E}_b$  对应斯托克斯参量的起伏关系

 Fig. 5. Fluctuations correlation of corresponding Stokes vectors between  $\hat{E}_a$  and  $\hat{E}_b$ .

从图 5 可以看出, 各分量在低频处均有较高噪声, 这是由弛豫振荡噪声<sup>[21]</sup>引起的, 而两信号中的  $\hat{S}_0$  和  $\hat{S}_1$  参量起伏基本一致, 均在 50 MHz 以上, 趋于散粒噪声极限,  $\hat{S}_2$  和  $\hat{S}_3$  参量的起伏则在整个工作带宽范围内均高于散粒噪声极限. 事实上, 在表 1 及 (14) 式所设条件下, (6) 式可进一步化简为

$$\begin{cases} \Delta^2 \hat{S}_0 = \Delta^2 \hat{S}_1 = E_V^2 \langle \delta(\hat{X}_V)^2 \rangle, \\ \Delta^2 \hat{S}_2 = E_V^2 \langle \delta(\hat{Y}_H)^2 \rangle, \\ \Delta^2 \hat{S}_3 = E_V^2 \langle \delta(\hat{X}_H)^2 \rangle. \end{cases} \quad (18)$$

$\hat{S}_2$  和  $\hat{S}_3$  参量的起伏在整个频谱范围内均高于散粒噪声极限, 原因可能是正交分量纠缠的水平极化分量的高噪起伏被投影到这两个参量上了, 这也说明  $\hat{S}_2$  和  $\hat{S}_3$  参量起伏可能受到了水平极化分量中的正交分量纠缠的影响.

进一步将 (10) 和 (12) 式展开分析:

$$\begin{aligned} & I(\hat{S}_1, \hat{S}_2) \\ &= \frac{\Delta^2(\hat{S}_{a1} \pm \hat{S}_{b1}) + \Delta^2(\hat{S}_{a2} \mp \hat{S}_{b2})}{8 |E_H E_V \sin \phi|} \\ &= Q \left[ \frac{\Delta^2(\hat{X}_{aV} \pm \hat{X}_{bV}) + \Delta^2(\hat{Y}_{aH} \mp \hat{Y}_{bH})}{8} \right], \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & I(\hat{S}_2, \hat{S}_3) \\
 &= \frac{\Delta^2(\hat{S}_{a2} \pm \hat{S}_{b2}) + \Delta^2(\hat{S}_{a3} \mp \hat{S}_{b3})}{4|E_H^2 - E_V^2|} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) \left[ \frac{\Delta^2(\hat{X}_{aH} \pm \hat{X}_{bH}) + \Delta^2(\hat{Y}_{aH} \mp \hat{Y}_{bH})}{4} \right]. \tag{20}
 \end{aligned}$$

从 (19) 和 (20) 式可以看出:  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  中引入了垂直极化分量的正交振幅起伏,  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  中引入了水平极化分量的正交振幅起伏, 且两个不可分度中均引入了水平极化分量的正交相位分量起伏; 同时可知,  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  和  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  与压缩度  $r$ 、极化分量振幅比值  $Q$  有关, 下面分别对其影响进行讨论. 一方面, 当  $Q=5$  时, 给出  $I$  与  $r$  的关系, 如图 6 所示.

由图 6 可知, 随着  $r$  的增大,  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  有略微减小, 在整个工作带宽范围内均保持大于 1, 说明  $r$  的变化对  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  影响不大, 这是由于  $r$  只影响水平极化分量中的正交分量, 而  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  中占主导地

位的分量是来自强相干态的垂直分量, 因此来自水平极化分量的正交相位起伏对  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  的影响有限. 对于  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$ , 其随着  $r$  的增大而减小, 且变化幅度较大, 在整个工作带宽范围内均小于 1, 说明  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  受  $r$  影响较大. 同时可以发现, 对于不同的  $r$ ,  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  曲线均在 70 MHz 附近, 趋于极小值 0.25, 说明该处的纠缠程度最佳.

另一方面, 当  $r=2$  时, 给出  $I$  与  $Q$  的关系, 如图 7 所示. 从图 7 可以看出,  $Q$  越大,  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  的值越大,  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  的值越小, 且  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  随  $Q$  变化幅度较大,  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  随  $Q$  变化幅度很小, 这可由 (20) 式给出解释, 即当  $Q$  值较大时,  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  将趋向一定值, 从而几乎不再受  $Q$  的影响. 在整个 JM 工作带宽内,  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  始终大于 1, 而  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  则始终小于 1, 且  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  也在 70 MHz 附近取得最小值 0.25, 该点处纠缠程度最佳.

参数  $Q$  体现的是垂直极化分量的强相干态信

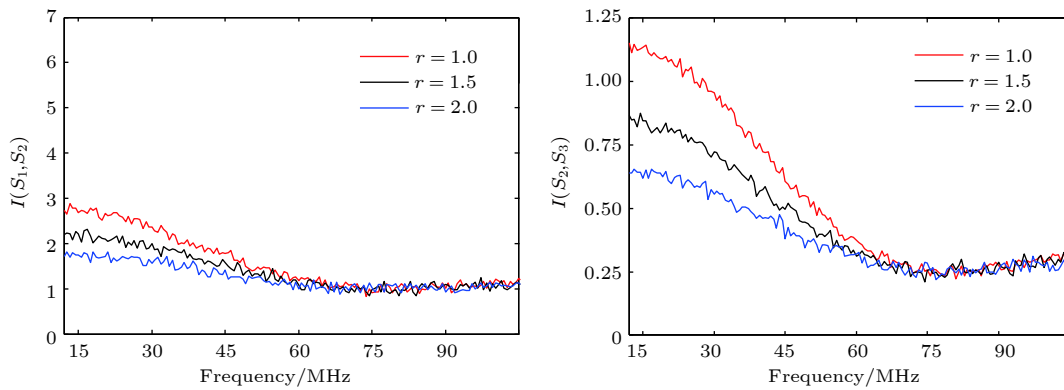


图 6 不可分度  $I$  与压缩度  $r$  的关系 (a)  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$ ; (b)  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$

Fig. 6. Relations of inseparability  $I$  and squeezing degree  $r$ : (a)  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$ ; (b)  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$ .

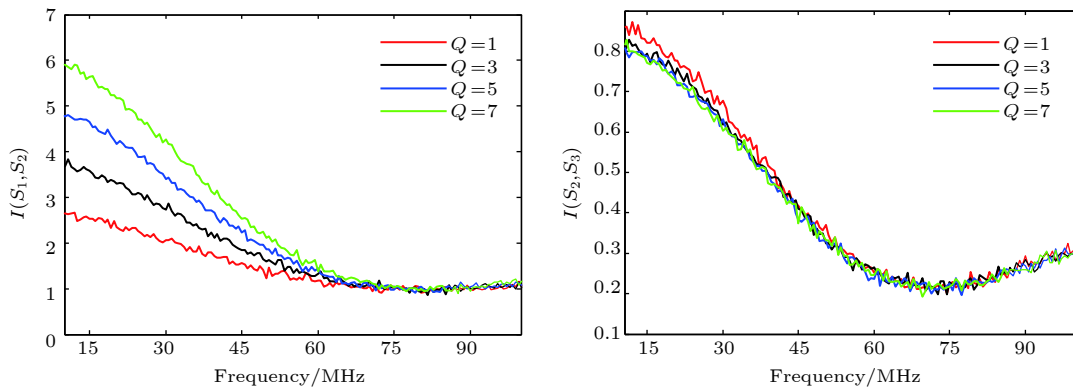


图 7 不可分度  $I$  与振幅比值  $Q$  的关系 (a)  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$ ; (b)  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$ .

Fig. 7. Relations of inseparability  $I$  and amplitude ratio  $Q$ : (a)  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$ ; (b)  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$ .

号对于最终输出的涨落的影响, 参数  $r$  体现的是水平极化信号对于最终输出的涨落的影响, 不可分度的大小取决于各信号涨落的大小,  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  对  $Q$  值变化敏感, 而  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  对  $r$  值变化敏感, 这说明强相干态信号的涨落在纠缠转换中主要投影到了斯托克斯参量中的  $\hat{S}_1$  和  $\hat{S}_2$  上, 而正交分量纠缠信号的涨落则主要投影到了斯托克斯参量中的  $\hat{S}_2$  和  $\hat{S}_3$  上, 并相应地主导了  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  和  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  的值.

因此, 在表 1 及 (14) 式所设条件下,  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  大于 1,  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  小于 1, 即  $\hat{E}_a$  和  $\hat{E}_b$  信号中的一对斯托克斯参量  $\hat{S}_2$  和  $\hat{S}_3$  构成不可分态, 方案产生的两个微波信号  $\hat{E}_a$  和  $\hat{E}_b$  是极化纠缠的, 且极化纠缠受正交分量纠缠影响, 且  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  对  $Q$  的变化敏感, 而  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  则对  $r$  的变化敏感.

## 4 结 论

对连续变量极化纠缠原理进行了阐述, 提出了微波二组分极化纠缠的方案, 着重对正交分量纠缠到极化纠缠的转换进行了分析, 在设定的方案条件

下, 获得了水平极化分量的正交振幅、相位的时域关联, 同时得出了在整个 JM 工作带宽内的不可分度  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  和  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$ , 详细分析了不可分度  $I$  分别与压缩度  $r$ 、振幅比值  $Q$  的关系, 发现  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  对  $Q$  值变化敏感, 而  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  对  $r$  值变化敏感,  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  始终大于 1、 $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  始终小于 1, 斯托克斯参量  $\hat{S}_2$  和  $\hat{S}_3$  构成不可分态, 方案产生的两个微波信号  $\hat{E}_a$  和  $\hat{E}_b$  存在二组分极化纠缠.

## 附录A 段氏不可分判据的拓展

推导量子态可分条件, 对其违反即为不可分, 从而可得不可分判据. 最初的段氏判据是从信号的正交分量入手的.

设  $\hat{x}_1$  和  $\hat{x}_2$  分别为两信号的正交振幅分量,  $\hat{y}_1$  和  $\hat{y}_2$  分别为两信号的正交相位分量, 此时设正交振幅和变量、正交相位差变量分别为  $\hat{\mu}$  和  $\hat{\nu}$ , 即

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2, \\ \hat{\nu} = \hat{y}_1 - \hat{y}_2. \end{cases} \quad (\text{A1})$$

推导  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\nu}$  方差, 以下使用  $\delta O$  和  $\Delta^2 O$  分别代表任意物理观测量  $O$  的标准差和均方差:

$$\begin{aligned} \langle \Delta^2 \hat{\mu} \rangle + \langle \Delta^2 \hat{\nu} \rangle &= \langle \hat{\mu}^2 \rangle + \langle \hat{\nu}^2 \rangle - \langle \hat{\mu} \rangle^2 - \langle \hat{\nu} \rangle^2 \\ &= \langle (\hat{x}_1 + \hat{x}_2)^2 \rangle + \langle (\hat{y}_1 - \hat{y}_2)^2 \rangle - \langle \hat{\mu} \rangle^2 - \langle \hat{\nu} \rangle^2 \\ &= \langle \hat{x}_1^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{x}_2^2 \rangle + \langle \hat{y}_1^2 - 2\hat{y}_1\hat{y}_2 + \hat{y}_2^2 \rangle - \langle \hat{\mu} \rangle^2 - \langle \hat{\nu} \rangle^2 \\ &= \langle \hat{x}_1^2 \rangle + \langle \hat{x}_2^2 \rangle + \langle \hat{y}_1^2 \rangle + \langle \hat{y}_2^2 \rangle + 2\langle \hat{x}_1 \rangle \langle \hat{x}_2 \rangle - 2\langle \hat{y}_1 \rangle \langle \hat{y}_2 \rangle - \langle \hat{\mu} \rangle^2 - \langle \hat{\nu} \rangle^2 \\ &= \langle \Delta^2 \hat{x}_1 \rangle + \langle \Delta^2 \hat{x}_2 \rangle + \langle \Delta^2 \hat{y}_1 \rangle + \langle \Delta^2 \hat{y}_2 \rangle + 2\langle \hat{x}_1 \rangle \langle \hat{x}_2 \rangle - 2\langle \hat{y}_1 \rangle \langle \hat{y}_2 \rangle \\ &\quad + \langle \hat{x}_1 \rangle^2 + \langle \hat{x}_2 \rangle^2 + \langle \hat{y}_1 \rangle^2 + \langle \hat{y}_2 \rangle^2 - \langle \hat{\mu} \rangle^2 - \langle \hat{\nu} \rangle^2 \\ &= \langle \Delta^2 \hat{x}_1 \rangle + \langle \Delta^2 \hat{x}_2 \rangle + \langle \Delta^2 \hat{y}_1 \rangle + \langle \Delta^2 \hat{y}_2 \rangle + (\langle \hat{x}_1 \rangle + \langle \hat{x}_2 \rangle)^2 + (\langle \hat{y}_1 \rangle - \langle \hat{y}_2 \rangle)^2 \\ &\quad - (\langle \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \rangle)^2 - (\langle \hat{y}_1 - \hat{y}_2 \rangle)^2 \\ &= \langle \Delta^2 \hat{x}_1 \rangle + \langle \Delta^2 \hat{x}_2 \rangle + \langle \Delta^2 \hat{y}_1 \rangle + \langle \Delta^2 \hat{y}_2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

根据平方和式可知

$$\langle \Delta^2 \hat{x}_j \rangle + \langle \Delta^2 \hat{y}_j \rangle \geq 2 \langle (\delta \hat{x}_j) \rangle \langle (\delta \hat{y}_j) \rangle, \quad j = 1, 2, \quad (\text{A3})$$

列出不确定性关系有

$$\langle (\delta \hat{x}_j) \rangle \langle (\delta \hat{y}_j) \rangle \geq \frac{|\langle \delta \hat{x}_j, \delta \hat{y}_j \rangle|}{2} = \frac{|\langle \hat{x}_j, \hat{y}_j \rangle|}{2} = \frac{|C|}{2}, \quad j = 1, 2, \quad (\text{A4})$$

则根据不确定性关系可得

$$\begin{aligned} \langle \Delta^2 \hat{x}_j \rangle + \langle \Delta^2 \hat{y}_j \rangle &\geq 2 \langle (\delta \hat{x}_j) \rangle \langle (\delta \hat{y}_j) \rangle \\ &\geq |\langle \hat{x}_j, \hat{y}_j \rangle| = |C|, \\ j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

正交分量  $\hat{x}_j$  和  $\hat{y}_j$  满足对易关系:

$$[\hat{x}_j, \hat{y}_j] = Ci = 2i, \quad j = 1, 2, \quad (\text{A6})$$

故 (A2) 式可化为

$$\begin{aligned} \langle \Delta^2 \hat{\mu} \rangle + \langle \Delta^2 \hat{\nu} \rangle &= \langle \Delta^2 \hat{x}_1 \rangle + \langle \Delta^2 \hat{x}_2 \rangle + \langle \Delta^2 \hat{y}_1 \rangle + \langle \Delta^2 \hat{y}_2 \rangle \\ &\geq 2 \langle (\delta \hat{x}_1) \rangle \langle (\delta \hat{y}_1) \rangle + 2 \langle (\delta \hat{x}_2) \rangle \langle (\delta \hat{y}_2) \rangle \\ &\geq |\langle \delta \hat{x}_1, \delta \hat{y}_1 \rangle| + |\langle \delta \hat{x}_2, \delta \hat{y}_2 \rangle| \\ &= 2 |\langle \hat{x}_j, \delta \hat{y}_j \rangle| \\ &= 2 |\langle \hat{x}_j, \hat{y}_j \rangle| \\ &= 4, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

该情况下量子态可分, 当 (A7) 式被违反时则不可分, 故段氏不可分判据即为

$$\langle \Delta^2 \hat{\mu} \rangle + \langle \Delta^2 \hat{\nu} \rangle < 2 |[\hat{x}_j, \hat{y}_j]|, \quad j = 1, 2. \quad (\text{A8})$$

具体针对正交分量而言时,  $C$  的值为 2, 则可以得到

$$\langle \Delta^2 \hat{\mu} \rangle + \langle \Delta^2 \hat{\nu} \rangle < 4. \quad (\text{A9})$$

此即为正文中 (7) 式的推导过程, 附录 A 只对正交振幅和、正交相位差两观测量进行了举例推导, 但该判据对于正交振幅差、正交相位和观测量同样成立.

根据 (A7) 和 (A8) 式可对段氏判据进行拓展, 对于任意一对厄米量  $M$  和  $N$ , 对于两信号  $\hat{E}_a$  和  $\hat{E}_b$ , 则有不可分判据如正文中 (8) 式所示:

$$\Delta^2(\hat{M}_a \pm \hat{M}_b) + \Delta^2(\hat{N}_a \mp \hat{N}_b) < 2 |[\delta M, \delta N]|.$$

以上即为段氏不可分判据的拓展.

## 参考文献

- [1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [2] Liu C C, Wang D, Sun W Y, Ye L 2017 *Quantum Inf. Process.* **16** 219
- [3] Ourjoumtsev A 2010 *Nat. Photon.* **4** 136
- [4] Bowen W P, Treps N, Schnabel R, Ralph T C, Lam P K 2003 *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **5** s467
- [5] Zhou L, Ou-Yang Y, Wang L, Sheng Y B 2017 *Quantum Inf. Process.* **16** 151
- [6] Bowen W P, Treps N, Schnabel R, Lam P K 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 253601
- [7] Korolkova N, Leuchs G, Loudon R, Ralph T C, Silberhorn C 2002 *Phys. Rev. A* **65** 052306
- [8] Guo J, Cai C X, Ma L, Liu K, Sun H X, Gao J R 2017 *Sci. Rep.* **7** 4434
- [9] Wu L, Liu Y H, Deng R J, Yan Z H, Jia X J 2017 *Acta Opt. Sin.* **5** 0527001 (in Chinese) [吴量, 刘艳红, 邓瑞婕, 闫智辉, 贾晓军 2017 光学学报 **5** 0527001]
- [10] Wu L, Yan Z H, Liu Y H, Deng R J, Jia X J, Xie C D, Peng K C 2016 *Appl. Phys. Lett.* **108** 161102
- [11] Zhou Y Y, Yu J, Yan Z H, Jia X J 2018 *Acta Opt. Sin.* **7** 0727001 (in Chinese) [周瑶瑶, 蔚娟, 闫智辉, 贾晓军 2018 光学学报 **7** 0727001]
- [12] Chen Y F, Hover D, Sendelbach S, Maurer L N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 217401
- [13] Hofheinz M, Huard B, Portier F 2016 *C. R. Phys.* **17** 679
- [14] Flurin E, Roch N, Mallet F, Devoret M H, Huard B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 183901
- [15] Roch N, Flurin E, Nguyen F, Morfin P, Campagne-Ibarcq P, Devoret M H, Huard B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 147701
- [16] Flurin E, Roch N, Pillet J D, Mallet F, Huard B 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 090503
- [17] Robson B A 1974 *The Theory of Polarization Phenomena* (Oxford: Clarendon)
- [18] Christopher S R 1998 *Radio Sci.* **33** 1617
- [19] Duan L M, Giedke G, Cirac J I, Zoller P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2722
- [20] Flurin E 2014 *Ph. D. Dissertation* (Berkeley: University of California)
- [21] Sneeep J G, Verhoeven C J M 1990 *IEEE J. Solid-State Circuits* **25** 692

# Continuous variable polarization entanglement in microwave domain\*

Luo Jun-Wen Wu De-Wei<sup>†</sup> Li Xiang Zhu Hao-Nan Wei Tian-Li*(Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)*

( Received 26 October 2018; revised manuscript received 4 December 2018 )

## Abstract

As a widely utilized information carrier, polarization microwave shows plenty of merits. Quantum microwave is booming gradually due to the development of superconducting technology, which makes it a promising potential to apply quantum entanglement to polarization microwave. In this paper, we introduce the concept of continuous variable polarization entanglement. Meanwhile, a scheme of polarization entanglement in microwave domain is proposed and simulated. The detail derivations are given and discussed. Polarization entangled microwaves are prepared by combining quadrature entangled signals and strong coherent signals on polarization beam splitters, and quadrature entangled signals are prepared by utilizing Josephson mixer. In order to probe the polarization entanglement between output signals, inseparability of Stokes vectors  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  and  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$ , is analyzed in 100 MHz operation bandwidth of Josephson mixer. The relation between inseparability  $I$  and squeezing degree  $r$  and between inseparability  $I$  and amplitude ratio  $Q$  are analyzed respectively. The results show that  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  is sensitive to the variation of  $Q$ , while  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  is sensitive to the change of  $r$ . The physical reasons for these results are explored and discussed. Apart from these,  $I(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  remains its value above 1 under the condition in this paper, but on the contrary,  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  keeps its value well below 1. It proves that  $\hat{S}_2$  and  $\hat{S}_3$  of Stokes vectors are inseparable from each other, thus output signals  $\hat{E}_a$  and  $\hat{E}_b$  of our scheme exhibit bipartite entanglement. The best entanglement appears nearly at about 70 MHz, at this point the minimum  $I(\hat{S}_2, \hat{S}_3)$  value is 0.25.

**Keywords:** continuous variable, polarization entanglement, Josephson mixer, Stokes vectors, inseparability**PACS:** 42.50.Dv, 03.67.-a, 07.50.Qx**DOI:** 10.7498/aps.68.20181911

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61573372, 61603413).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [wudewei74609@126.com](mailto:wudewei74609@126.com)